线性规划与经济活动分析

XIAN XING GUI HUA YU JINGJI HUO DONG FEN XI

佟吉森　车煊　黄惠清　主编

兵器工业出版社

线性规划与经济分析

佟吉森　车　煊　黄惠清　主编

兵器工业出版社

(京) 新登字 049 号

图书在版编目 (CIP) 数据

线性规划与经济活动分析/佟吉森主编. - 北京: 兵器工业出版社, 1995. 4
ISBN 7-80038-848-4

Ⅰ. 线… Ⅱ. 佟… Ⅲ. 线性规划-关系-经济活动分析 Ⅳ. ①F275.5②O221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (95) 第 01026 号

兵器工业出版社出版发行
(北京市海淀区车道沟 10 号)
各地新华书店经销
北京昌平百善印刷厂印装

开本: 787×1092 1/32 印张: 5.875 字数: 130.5 千字
1995 年 6 月第 1 版 1995 年 6 月第 1 次印刷
印数: 3050 定价: 7.00 元

内 容 简 介

本书内容包括经济活动中的数学模型的建立、标准模型、模型解的性质、总单纯形方法、对偶理论、对偶理论的经济实质、影子价格、经济活动中某些数量变化对整体的影响等。

本书可作为高等财经院校经济类专业的经济规划教材，也可作为参考书或自学用书。

前　言

本书讲的是经济计划管理、经济工程设计必不可少的知识。其理论系统完整，方法奏效，并能用计算机解决超大规模的实际应用问题。它在经济活动分析的领域中占有重要地位。

提高经济效益，目的是以尽可能少的人力、物力、财力的投人，获得最大限度的成效产出。这正是线性规划与经济活动分析的实质。

该书经中央财政金融学院数学教研室集体讨论审订，由佟吉森副教授、车煊、黄惠清执笔主编。

由于编者水平有限，难免出现错误及缺点，诚望读者批评指正。

编者

1994 年 10 月

目　录

第一章　线性规划模型

线性规划是运筹学的一个重要分支。运筹学包含以下一些分支：数学规划、图论、网络流、决策分析、排队论、可靠性数学理论、库存论、对策论、搜索论、模拟．而线性规划是数学规划中理论成熟、方法有效、应用最广泛的一个分支。

运筹学是近几十年来发展非常迅速，应用面极广泛的一门学科。“运筹”就是运用筹划的意思。在各行各业中，人们通过行动来达到某种目的，如果行动的方案不止一个，就需要从数个或数十个甚至更多的方案中选择一个可行的最佳方案，通常称为最优方案。利用运筹学提供的科学方法能帮助我们选择出最优方案。在工业、农业、交通运输业、教育部门、医疗卫生部门、军事部门及政府部门，小到一个技术问题及日常工作的安排，大至整个部门的管理，运筹学都可以发挥作用。

§1.1　线性规划模型

本节通过对几个具体的线性规划问题的讨论及其数学模型的建立，总结出线性规划模型的一般形式。

线性规划是数学规划的一个分支．数学规划是求一个函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$（称为目标函数）在规定条件 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in A$（称为约束条件）下的极大值或极小值问题。

我们在多元函数微积分中学过求函数的极值，但数学规划与普通的求极值问题不一样。数学规划中的目标函数和约束条件都较为复杂，不是普通求极值方法所能解决的。当数学规划问题中的目标函数关于自变量是线性的，而约束条件也是由自变量组成的线性等式或不等式时，数学规划问题就称为线性规划，下面我们通过具体例子说明。

例 1　某工厂在计划期内要安排生产甲、乙两种产品。已知制造甲产品需要 A 型配件 5 个，B 型配件 3 个；制造乙产品需要 A 型配件 2 个，B 型配件 4 个。而在计划期内该工厂只能提供 A 型配件 180 个，B 型配件 135 个。又知道该工厂每生产一件甲产品可获利润 20 元，一件乙产品可获利润 15 元。问在计划期内甲、乙产品应该各安排生产多少件，才能使总利润最大？

我们将该例所述情况列成表格，这种表格通常称为决策表，见表 1－1。

表 1－1

单位产品所需配件 产品 / 配件	甲	乙	现有配件
A	5	2	180
B	3	4	135
单位产品利润（元）	20	15	

关于这类问题，我们可以转化为数学问题来讨论，即用数学语言来描述，也称为数学模型。

设 x_1、x_2 分别表示生产甲、乙产品的件数。

该工厂每生产 x_1 件甲产品可获利润 $20x_1$元，生产 x_2 件乙产品可获利润 $15x_2$ 元，若设总利润为 Z，则

$$Z=20x_1+15x_2 \qquad (1-1)$$

若要总利润最大，只要确定出变量 x_1、x_2 的值，使函数 Z 达到最大值即可。我们称函数 Z 为目标函数。

在该例中除了考虑目标函数外，还应考虑到生产时所需配件总数的限制。生产甲、乙两种产品共需要A型配件$5x_1+2x_2$个，B型配件为$3x_1+4x_2$个，而在计划期内该厂只能提供A型配件180个，B型配件135个，所以生产中所使用的A、B两种配件数量应满足以下条件：

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2\leqslant 180 \\ 3x_1+4x_2\leqslant 135 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \quad \text{(产品件数为非负数)} \end{cases} \tag{1-2}$$

(1-2) 中的不等式组称为约束条件。

该工厂所要达到的目标即决策目标是：在满足约束条件(1-2) 的情况下，确定x_1、x_2的值，使 (1-1) 式中的目标函数Z达到最大值。

以上讨论可以简单地用数学模型表示为

目标函数 $\max\ Z=20x_1+15x_2$

$$\text{约束条件}\begin{cases} 5x_1+2x_2\leqslant 180 \\ 3x_1+4x_2\leqslant 135 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

这种数学模型称为线性规划模型。

例2　某蔬菜公司有两个蔬菜基地，现从甲地调出蔬菜2100t(t表示吨)，从乙地调出蔬菜1200t。由甲、乙两个基地供应A、B、C、D四个菜站，若需调入A站1800t、B站1200t、C站100t、D站200t,已知每吨运费如表1-2,问应如何安排调运才能使总运费最省?

表1-2

运费(元/t) 调入站 / 调出地	A	B	C	D
甲	25	21	7	15
乙	51	51	37	15

设从甲地调入A、B、C、D站的蔬菜量分别为x_{11}、x_{12}、x_{13}、x_{14} t；从乙地调入A、B、C、D站的

蔬菜量分别为 x_{21}、x_{22}、x_{23}、x_{24} t。

设总运费为 Z，由表 1-2 得出

$$
\begin{aligned}
Z=&25x_{11}+21x_{12}+7x_{13}+15x_{14}+51x_{21}+51x_{22}\\
&+37x_{23}+15x_{24}
\end{aligned}
\tag{1-3}
$$

从甲地调入各菜站的蔬菜总量 $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}$ 应等于调出量 2100t；从乙地调入各菜站的蔬菜总量 $x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}$ 应等于调出量 1200t，即

$$
\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2100\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1200\\
x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)
\end{cases}
\tag{1-4}
$$

又调入 A、B、C、D 菜站的蔬菜量分别为 1800t、1200t、100t、200t，即

$$
\begin{cases}
x_{11}+x_{21}=1800\\
x_{12}+x_{22}=1200\\
x_{13}+x_{23}=100\\
x_{14}+x_{24}=200\\
x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)
\end{cases}
\tag{1-5}
$$

这家蔬菜公司的决策目标是：在满足约束条件（1-4）和（1-5）的情况下，确定 x_{ij} $(i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 的值，使（1-3）式中的目标函数 Z 达到最小值。

这个例子的数学模型可以表示为

目标函数 $\min\ Z=25x_{11}+21x_{12}+7x_{13}+15x_{14}$

$$
\text{约束条件}\quad
\begin{cases}
+51x_{21}+51x_{22}+37x_{23}+15x_{24}\\
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2100\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1200\\
x_{11}+x_{21}=1800\\
x_{12}+x_{22}=1200
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} x_{13}+x_{23}=100 \\ x_{14}+x_{24}=200 \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{cases}$$

我们通过对以上两个例子的讨论，可以发现他们的共同特点:

(1) 每一个问题都可以用一组未知数（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）表示某一方案；未知数（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）取一组确定的值就代表一个具体的方案。

(2) 存在一定的限制条件（约束条件），这些限制条件都可用一组线性等式或不等式来表达。

(3) 都有一个目标要求，并且这个目标可以表示为一个线性函数（目标函数）。按研究的问题不同，要求目标函数达到最大值或最小值。

这类问题的数学模型就称为线性规划模型。线性规划模型的一般形式为:

目标函数 $\max\ (\min)\ Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

$$\text{约束条件}\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)\ b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)\ b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)\ b_m \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,\ 2,\cdots,\ n) \end{cases}$$

§1.2 线性规划模型应用举例

一、生产安排问题

例 1 某工厂用 A_1, A_2, …, A_m 种原料生产 B_1, B_2, …, B_n 种产品。表 1－3 给出了该工厂在生产期内可提

供的原料数量、生产单位产品所需要的原料数，以及生产单位产品可得利润。问应如何安排生产才能使总利润最大？

表1－3

单位产品所需原料 产品 / 原料	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	现有原料
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
单位产品的利润	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

解　设 x_j 为产品 B_j 的生产数量（$j=1, 2,\cdots, n$）。

该问题的决策目标是：如何安排生产，即如何确定 x_1, $x_2,\cdots$, x_n 的值，使总利润最大。设 Z 为目标函数，由表1－3可得

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

由该工厂所能提供的原料限制，生产 B_1, $B_2,\cdots$, B_n 产品使用原料 A_i 的数量 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n$ 不超过该工厂所能提供的数量 b_i（$i=1, 2,\cdots, m$），则约束条件为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1, 2,\cdots, n) \quad \text{（生产数量为非负数）} \end{cases}$$

这一问题的数学模型是：

目标函数 $\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$

约束条件 $\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i & (i=1,\ 2,\cdots,\ m) \\ x_j \geqslant 0 & (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{cases}$

例 2　某工厂用机床 $A_1,\ A_2,\cdots,\ A_m$ 加工 $B_1,\ B_2,\cdots,\ B_n$ 种零件。表 1－4 给出了在生产周期内，该工厂必须要加工的零件数量，以及各机床工作的机时数、加工每个零件所用时间。表 1－5 给出了各机床加工每个零件的成本。问应怎样安排生产才能既完成加工任务、又使加工零件的总成本最低?

表 1－4

加工一个零件的时间 \ 零件 / 机床	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	工作机时
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
须加工零件数	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

表 1－5

加工一个零件的成本 \ 零件 / 机床	B_1	B_2	$\cdots$	B_n
A_1	d_{11}	d_{12}	$\cdots$	d_{1n}
A_2	d_{21}	d_{22}	$\cdots$	d_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	d_{m1}	d_{m2}	$\cdots$	d_{mn}

解　设 x_{ij} 为机床 A_i 加工零件 B_j 的数量 $(i=1,\ 2,\cdots,m;\ j=1,\ 2,\cdots,\ n)$。

该问题的决策目标是：确定所有 x_{ij} 的值，使加工零件

的总成本最小。设 Z 为总成本，由表 1－5 得出

$$\begin{aligned} Z= & d_{11}x_{11}+d_{12}x_{12}+\cdots+d_{1n}x_{1n} \\ & +d_{21}x_{21}+d_{22}x_{22}+\cdots+d_{2n}x_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & +d_{m1}x_{m1}+d_{m2}x_{m2}+\cdots+d_{mn}x_{mn} \end{aligned}$$

由各机床工作机时的限制，机床 A_i 加工 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 各种零件的时间总数不能超过机时数 a_i，由表 1－4 得出

$$c_{i1}x_{i1}+c_{i2}x_{i2}+\cdots+c_{in}x_{in}\leqslant a_i \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

各机床加工零件 B_j 的总数不能少于生产周期内工厂所需要的数量 b_j，即

$$x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{mj}\geqslant b_j \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

这一问题的数学模型是：

目标函数 $\min \ Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_{ij}$

$$\text{约束条件}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\leqslant a_i & (i=1, 2, \cdots, m) \\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}\geqslant b_j & (j=1, 2, \cdots, n) \\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

二、运输问题

例 3　设某种物资有 m 个产地 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 和 n 个销售点 $B_1, B_2, \cdots, B_n$。表 1－6 给出各地产量、销售点的销量以及各产地至各销售点的运费。问应如何安排调运才能使总运费最少？

解　设 x_{ij} t 为产地 A_i 运往销售点 B_j 的物资数量 $(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$。

该问题的决策目标是：如何调运即如何确定所有的 x_{ij}，使

表 1-6

运费 (元/t) 销售点 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量 (t)
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
销量 (t)	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

总运费最少。设总运费为 Z, 由表 1-6 得出

$$
\begin{aligned}
Z= & c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{1n}x_{1n} \\
& +c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\cdots+c_{2n}x_{2n} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& +c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\cdots+c_{mn}x_{mn}
\end{aligned}
$$

该问题的约束条件分为三种情况：产销平衡、产大于销、销大于产。

(1) 产销平衡时，从产地 A_i 运往销售点 B_1, B_2, …, B_n 的物资总量等于 A_i 的产量 a_i, 即

$$x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{in}=a_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

产地 A_1, A_2, …, A_m 运往销售点 B_j 的物资总量等于 B_j 的销售量 b_j, 即

$$x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{mj}=b_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

(2) 产大于销时，从产地 A_i 运往各销售点的物资总量少于 A_i 的产量 a_i, 即

$$x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{in}\leqslant a_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

各产地运往销售点 B_j 的物资总量等于 B_j 的销售量 b_j, 即

$$x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{mj}=b_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

(3) 销大于产时，从产地 A_i 运往各销售点的物资总量等

于 A_i 的产量 a_i，即

$$x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{in}=a_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

各产地运往销售点 B_j 的物资总量少于 B_j 的销售量 b_j，即

$$x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{mj}\leqslant b_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

通过以上讨论得出这一问题的数学模型:

目标函数 $\min\ Z=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$

约束条件

(1) 产销平衡

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{cases}$$

(2) 产大于销

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{cases}$$

(3) 销大于产

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}\leqslant b_j & (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{cases}$$