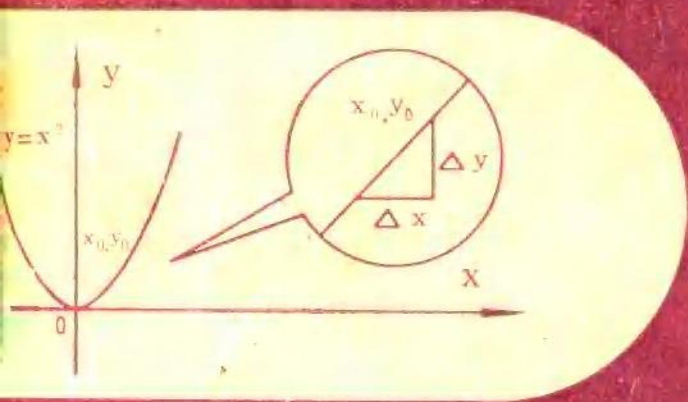
非标准微积分

FEIBIAOZHUN
WEIJIFEN

编



黑龙江科学技术出版社

非标准微积分

赵国清　李书波　单兴缘　编

黑龙江科学技术出版社

一九八三年·哈尔滨

内 容 简 介

本书先定义无穷小量，引进超实数的概念，然后推导出一元微积分的基本内容——微分与积分。为了与标准的以极限为基础的微积分相区别，一般称为非标准微积分。这种观点的微积分是一九六〇年由Abraham Robinson首创。这一成就，成为二十世纪数学界重大进展之一。

本书方法新颖，有些例题很少见，编写时力求使导数积分等基本概念简明直观，容易理解。可供微积分初学者自学，可做大专院校学生课外读物，也可做大中学校数学教师教学的参考。

封 面 设 计：田 甲

非标准微积分

赵国清　李书波　单兴缘　编

黑龙江科学技术出版社出版

（哈尔滨市南岗区分部街28号）

黑龙江新华印刷厂附属厂印刷・黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米1/32・印张 15 10/16 ・字数320千

1983年3月第一版・1983年3月第一次印刷

印数：1—5,000

书号：13217・054　　　定价：1.65元

前　　言

随着生产的发展，高等数学的主要内容已经深入到各个科学技术领域。约在十七世纪七十年代，由于生产实践的需要，力学与天文学的推动，由 Newton 与 Leibniz 等人，利用直观无穷小量的概念，建立了微积分学。这种直观方法的微积分，大约用了二百年。直到十九世纪七十年代，由 Weierstrass 首先提出了 ε、δ 的极限定义，严格地处理了微积分的内容。此后，标准的微积分教程，逐步地都以 ε、δ 的极限为基础，然后推导出高等数学的主要内容微分与积分。

微积分最初是以直观的无穷小量为基础。最近一百年来，由于数学的严密性，ε、δ 定义的极限代替了直观的无穷小量。这样，就使微积分的基础更牢固更精确了。但是，对初学微积分者，却感到抽象和困难。

二十世纪六十年代，Abraham Robinson 引进了超实数的概念。它是一种既用无穷小量的直观模型，又能精确地阐述微积分的方法。这种方法，一般地称为非标准分析。

我们用非标准分析的观点，引进了超实数的概念，编写了这本“非标准微积分”。

本书可为一般的微积分初学者及大专学生的课外阅读参考书，同时，由于此书方法新颖，有些例题很少见，对数学

教师教学也有一定的参考价值。

在本书的编写过程中，我们力求使导数与积分等基本概念简明直观和容易理解。然而，由于水平所限，缺点或错误在所难免，希望读者批评指正。

目　录

第一章　超实数

初等数学研究的对象，基本上是常量；而高等数学研究的对象，基本上是变量．高等数学的基本内容是微分与积分．微分与积分是研究事物运动和变化规律的数学方法．换句话说，就是研究人们在生活实践、生产活动和科学研究中所碰到的种种变量变化的规律性．对于变量与变量间的相互关系，以及变量的微小变化的研究，就是本章所要介绍的函数与超实数的两部分内容．

第一节　实　　数

一、实数轴

在初等数学里，已经熟悉了实数．因此，从实数开始，用字母 R 代表所有实数所成的集合．

实数可用一条直线上的点来表示，如图1—1所示．这

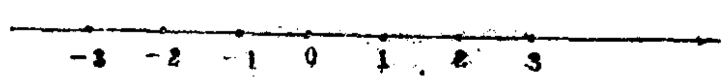


图　1—1

条直线，叫做实数轴．利用它，很容易对直线及线段进行研究．因此，实数轴是空间一条直线的有用的数学模型．

但是，用实数轴来描述一条直线，纯粹是一种数学上的创造，它可能给出，也可能不会给出实际空间中一条直线的

精确模型．实际上，当我们自以为明白线段是什么样的时候，仍不知道实际空间中很大或很小的线段是什么样子．

什么是实数呢？回答这个问题的一种方式是从正整数开始，一步一步地建立起整数、有理数一直到实数。这是一个较长的过程，在此不予讨论。这里将用另一种方式回答这个问题．直接把实数的一些性质列出来，这些性质称为公理．以公理为基础，实数中的其他性质都可用公理证明出来．这些公理，分为两类，第一类现在就给出；第二类公理涉及到一种新的数，称为超实数，因此晚些时候给出．

二、实数的公理

1．实数的代数公理

完备律　0和1为实数．如果a与b是实数，则$a+b$，ab和$-a$也是实数．如果a是实数，且$a\neq0$，则$\frac{1}{a}$是实数．

交换律　$a+b=b+a$，$ab=ba$．

结合律　$a+(b+c)=(a+b)+c$，$a(bc)=(ab)c$．

同一律　$0+a=a$，$1\cdot a=a$．

反向律　$a+(-a)=0$，如果$a\neq0$　$a\cdot\frac{1}{a}=1$．

分配律　$a\cdot(b+c)=ab+ac$．

2．实数的关系公理

$0<1$．

传递律　如果$a<b$且$b<c$，则$a<c$．

排中律　关系式$a<b$，$a=b$，$b<a$有且只有一个成立．

和　律　如果$a<b$，则$a+c<b+c$．

积　律　如果$a<b$且$0<c$，则$ac<bc$。

方根公理，对每一个实数$a>0$和每一个正整数n，存在一个实数$b>0$，使$b^n=a$。

3.阿基米德公理

对每一个实数a，都存在一个正整数n，使$a<n$。换句话说，每一个实数a都小于1的有限次和，即

$$a<\overbrace{1+1+1+\cdots\cdots+1}^{n}$$

从以上公理，容易得出，所有正整数是实数。因为1是实数，$2=1+1$也是实数，$3=1+2$，$4=1+3$，以此类推。

阿基米德公理有时可用另外一种形式给出，称为定理。

定理：令a为正实数，则存在某个正整数n，使$a>\frac{1}{n}$成立。

证明：根据阿基米德公理，对实数$\frac{1}{a}$来说，存在有正整数n，使$\frac{1}{a}<n$成立，两边都乘以正实数$\frac{a}{n}$，得$a>\frac{1}{n}$。

利用以上公理，“初等代数”中熟知的事实都可用这组公理加以证明。但是，还不能用这些公理推导全部的实数性质。例如，现在不能证明$3^{\sqrt{2}}$、π等是一个实数。须待第二类公理加以证明。

第二节　区　　　间

一、实数集合

所谓实数集合 X，是指 X 中每一个元素都是实数。或者说，满足某种条件的实数全体称为实数集合。特别简单的一种集合是一个区间。

二、区间

已知两个实数 a 和 b 且 $a<b$，闭区间〔a，b〕是满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数的集合。开区间（a，b）是满足 $a<x<b$ 的所有实数所成的集合。开区间与闭区间如图 1—2 所示。

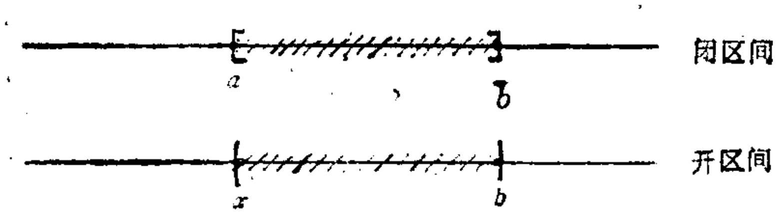


图　1—2

在闭区间〔a，b〕中，数 a 与 b 分别称为区间的下端点与上端点。在开区间（a，b）中，端点 a 与 b 不是集合（a，b）中的元素。

所有大于 a 的实数 x 的集合为（a，∞）。所有小于 b 的实数 x 的集合记为（$-\infty$，b），所有实数的集合 R 记为（$-\infty$，∞），符号 ∞ 读作无穷大，$-\infty$ 读作负无穷大。但它们并不代表任何数，只是用作一个区间的上端点或下端点。

满足 $a\leqslant x<b$ 的所有实数 x 的集合记为〔a，b），称为半开区间。对于各种不同类型的区间，列表于下：

类型	符号	定义公式
闭区间	$[a,\ b]$	$a \leq x \leq b$
开区间	$(a,\ b)$	$a < x < b$
开区间	$(a,\ \infty)$	$a < x$
开区间	$(-\infty,\ b)$	$x < b$
开区间	$(-\infty,\ \infty)$	
半开区间	$[a,\ b)$	$a \leq x < b$
半开区间	$[a,\ \infty)$	$a \leq x$
半开区间	$(a,\ b]$	$a < x \leq b$
半开区间	$(-\infty,\ b]$	$x \leq b$

三、子集

若集合 X 的每一个元素都是另一个集合 Y 的元素，则称集合 X 为集合 y 的子集. 例如开区间 $(a,\ b)$ 是闭区间 $[a,\ b]$ 的一个子集. 闭区间 $[1,\ 2]$ 是闭区间 $[0,\ 4]$ 的子集. 特别是每个集合 X 都是它自己的子集.

如果实数集合 X 是某一个闭区间 $[a,\ b]$ 的子集，称集合 X 为有界集合. 否则称 X 为无界集合. 举例如下：

有界集合的例子：

1. 闭区间 $[a,\ b]$.

2. 空集记为 Φ，它是每一个集合的子集.

3. 有 n 个数组成的集合 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n\}$.

无界集合的例子：

1. 所有正整数的集合 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots.\ \}$. 根据阿基米德公理，对每一个实数 b，都存在一个正整数 n，满足 $n > b$，所以这个集合无界.

2. 开区间$(-\infty, b)$.

3. 使$x\neq0$的所有x的集合，$\{x:x\neq0\}$.

习　　题 1--1

下列集合那些有界

1. 所有整数的集合.

2. 所有使$x^3<5$的实数x的集合.

3. 小于1000的所有正整数的集合.

4. 所有无理数的集合.

5. 满足$1<x^2$与$x^2<4$的x的集合.

下列集合那些有界？那些无界？

6. 所有整数的集合.

7. 满足$\frac{1}{100}<\frac{1}{n}$的所有整数$n$的集合.

8. 使$n^2<10$的所有整数n的集合.

9. 满足$1\leq x\leq 5$的所有有理数x的集合.

10. 使$x(x+1)(x-1)>0$的所有x的集合.

11. 用阿基米德公理证明，若$a<b$且$c>0$，则存在一个正整数n，使$a+nc>b$成立.

第三节　函数概念

一、函数的定义

在研究自然现象或解决生产问题时，会遇到两种量：一

种是不变的，即在某个过程中，这个量保持固定的数值；另一种是可变的，即在某个过程中，这个量可以取不同的数值。例如，一个物体由空中下落过程中，物体的质量是不变的量，而物体与地面的距离、物体下落的速度又都是变化着的量。

一般说，在某个过程中，保持数值不变的量，称为常量；而变化着的，可以取不同数值的量，称为变量。

事实上，“变”是绝对的，“不变”是相对的。因此说某一个量是常量还是变量，要根据具体情况作具体分析。例如，气温的变化使机器上的轴热胀冷缩，当气温变化引起轴长的变化不太大时，就可以把轴长看成是常量；但在精密的仪器上，轴长的微小变化也可能影响仪器的精度，这时就应把轴长看成是变量，以估计它对精度的影响。

在数学中，常用字母 a、b、c、k 等表示常量，而用字母 x、y、z、s 等表示变量。

在同一个变化过程中，各个量的变化都不是孤立的，而是相互联系，相互依赖的。例如，圆的面积依赖于它的半径。一天夜间的长度依赖于纬度和日期。一种商品的价格依赖于成本与供求。所要讨论的，首先是两个变量之间的一种确定的依赖关系，即所谓函数关系。许多变化过程在数量上的规律性，可以通过变量间的函数关系表现出来，下面先来看几个例子。

例 1. 物体在时刻 $t=0$ 从高度为 h 处自由下落。从物理学知道，物体下落的路程 s 与时间 t 之间的关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中，$g=9.8$ 米/秒^{2}是常量，s 和 t 是变量。

按照这个公式，对于每一个 t 的值，就可以算出确定的 s 值。例如，当 t 取 2 秒时，$s=19.6$ 米。应注意的是，t 的取值有一定的范围，因为当 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 时，物体已到达地面，所以 t 的变化范围是 $0\leq t\leq\sqrt{\frac{2h}{g}}$。

例 2. 某厂水爆清砂工段，记录了浇铸后铸件上一个有代表性的点的温度变化，以掌握铸件温度随时间变化的规律，提高水爆清砂效果。现将该点温度变化数据列表如下：

t（秒）	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
T(°C)	1220	1070	930	810	710	620	580	550	525	495	475

这里时间 t 和温度 T 都是变量。时间 t 只能取 0，2，…20 这十一个数。对每一个 t 的值，从表中可以确定出 T 的一个值。

例 3. 在一天中，气温 T 与时间 t 是两个变化着的量。图 1—3 是某地气象站自动记录的一天气温变化曲线。

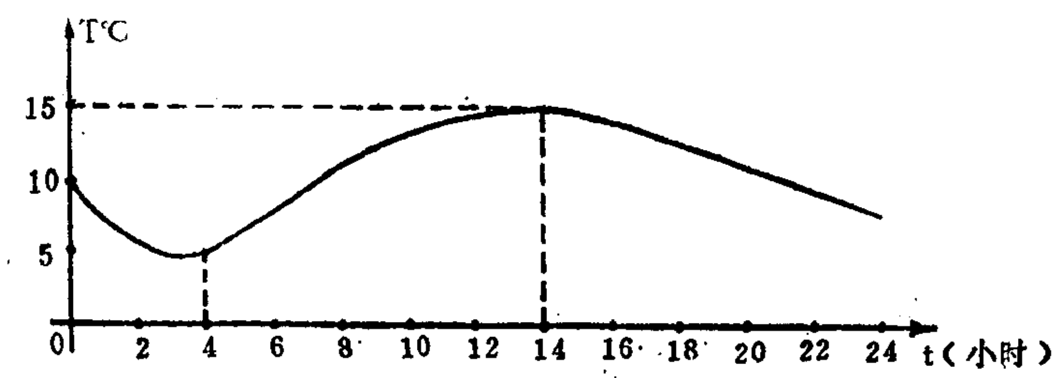


图 1—3

这里 t 的变化范围是 $0 \leq t \leq 24$。在 t 的变化范围内，每给定一个 t 值，就可从图中确定出 T 的一个相应的值，例 $t=14$ 时，$T=15°C$。

上面三个例题，其变量的具体意义各不相同，变量间的关系也是用不同的形式表示的。但是，在变量与变量之间的关系上有着共同的特点，就是当其中一个变量取确定的值时，另一个变量就按规定的法则有确定的值和它对应。概括这些共同的特点，可以抽象出函数的定义。

函数的定义，设在某一变化过程中，有两个变量 x 和 y。如果对于 x 在其变化范围内取得的每一个值，y 就按照规定的法则有确定的值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数。记作

$$y=f(x)$$

其中，x 叫自变量，y 叫因变量。

在函数定义中，自变量与因变量之间的对应关系，称为函数关系。自变量在变化过程中的取值范围，叫做函数的定义域。在变化过程中，因变量 y 值所成的实数集合，称为函数的值域。于是，可以看出函数概念中包含两个主要因素：

(1) 变量间的对应关系——函数关系。

(2) 自变量的取值范围——函数的定义域。

在例 1 中，函数关系为 $s=\frac{1}{2}gt^2$，函数的定义域为 $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\frac{2h}{g}}$。

对于函数，也可以这样理解：想象有图 1—4 那样的一

个黑方框．方框内有一个装置．方框左右两边都有一条实数轴，分别叫做输入轴和输出轴。在输入轴上指定一个数a，如果输出轴上出现一个点b，这就是说$f(a)=b$．如果输出轴上什么也不发生，说明$f(a)$没有定义，也就是说，a不是定义域所成集合内的一个元素．

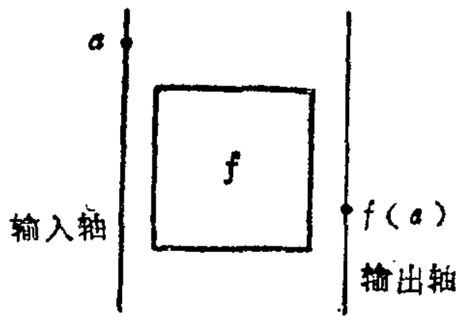


图 1—4

二、函数的表示法

函数的表示方法一般有三种：

（1）公式法：用数学式子表示自变量和因变量的对应关系．其优点是简明准确，便于理论分析．但不够直观（如例1）．

（2）表格法：将自变量和因变量的对应值列成表格．其优点是对应值明确．但往往数据不完全，不便于理论分析（如例2）．

（3）图形法：用坐标平面上的图形表示函数关系．其优点是明显直观，直接能看出函数的变化情况．但不便作理论分析（如例3）．

这三种表示法是相辅相成的，有时给出函数的公式，要作出函数的图形，便于作直观的分析；有时从实验结果画出函数图形，要求列出函数式，便于作理论分析；有些函数不易用公式表示，就主要靠图形或表格分析．

在熟悉了函数关系以后，需要全面地理解函数的记号及计算函数值．