〔苏〕B.N.阿诺尔德 著

经典力学的数学方法

齐民友 译

高等教育出版社

经典力学的数学方法

[苏] В.И.阿诺尔德著
齐民友 译

高等教育出版社

（京）112号

苏联著名数学家 В. И. Арнольд 著 Математические методы классической механики（1974年版）一书自出版以来，已被译成英、法、日文本。本书是根据 K. Vogtmann 和 A. Weinstein 的英译本（1978 年版）译出，并参照法、日文本作了一些补正。该书广泛地应用了现代数学的工具，使经典力学这个古老的学科别开生面，同时又可了解现代数学的许多方面。

本书对理科力学、数学专业的高年级学生是很有价值的参考书，同时对从事数学、力学和理论物理学的工作者也是大有裨益的。

经典力学的数学方法

[苏]В.И.阿诺尔德 著

齐民友 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京顺义县印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张16.625 字数400 000

1992年5月第1版 1992年5月第1次印刷

印数 00.001—1 605

ISBN 7—04—000601—4／O·231

定价10.15元

序

经典力学中用了许多不同的数学方法和概念：微分方程和相流、光滑映射和流形、李群和李代数、辛几何和遍历理论。许多现代的数学理论都来自力学问题，后来才有了公理化的抽象形式，使它们很难读了。

在这本书里，我们要从最初步开始建立起经典力学的数学工具；所以除了标准的分析课程（微分和积分，微分方程），几何课程（矢量空间，矢量）和线性代数课程（线性算子，二次形式）以外，不假设读者有比这更进一步的知识。

借助于这个工具，我们要考察动力学的所有基本问题，包括振动理论，刚体运动理论和哈密尔顿的形式化。作者一直试图表现出各种现象的几何的、定性的侧面。在这一方面，本书与那些由数学家讲授的传统的理论力学课程比较，更接近于为理论物理学家开设的理论力学课。

本书相当大的部分用于变分原理和分析力学。F. 克莱因在他的《十九世纪数学发展史讲义》一书中这样刻划过分析力学："……一个物理学家想要解决自己的问题，从这些理论中所得无几，而工程师则将一无所得。"以后年代中科学的发展明确地否定了这个评论。哈密尔顿形式化是量子力学的基础，而且是物理学的数学武库中最常用的工具之一。在认识到辛构造和惠更斯原理对各种优化问题的意义以后，在工程计算中也开始经常应用哈密尔顿方程了。另一方面，与空间探索相关的天体力学的新近发展，对分析力学的方法和问题也赋予了新的意义。

经典力学和数学与物理学的其它领域的联系是多种多样的。本书附录就是用来讲其中的少数几个。经典力学的工具被应用

到：黎曼几何的基础，理想流体动力学，柯莫戈洛夫关于条件周期运动的摄动理论，数学物理方程的短波渐近法以及几何光学中聚焦面的分类。

这些附录是为有兴趣的读者写的，而不是一般的必修课程的一部分。其中有些可以成为专门课程的基础（例如关于非线性振动理论的渐近方法或准经典渐近）。这些附录也包含了一些参考性质的知识（例如有一个二次哈密尔顿函数的标准形式表）。在本书的基本各章中作者总是力求把证明写得尽可能明确而避免再引用其它材料，附录总的说来则是结果的总结，其证明则可在所引述的文献中找到。

这本书的基础是作者在1966—1968年为国立莫斯科大学数学力学系数学专业三、四年级学生所开的一门一年半的必修课。

作者要感谢波得洛夫斯基，他坚持要把这些讲义印发、写成并且出版．在出版这个讲义的准备过程中，布尼莫维奇、万因戈金和诺维柯夫的笔记，特别是由柯列斯尼科夫组织的本讲义油印版（国立莫斯科大学，1968）十分有用。作者要感谢他们，以及对油印讲义提过意见的所有学生和同事；在准备本书时采纳了许多这样的意见．作者要感谢L．A．列昂托维奇，他建议用一个极限过程来处理联络，还要感谢伏罗维奇和尤多维奇详细审阅手稿。

В．И．Арнольд

目　　录

第一部分　牛顿力学

第二部分　拉格朗日力学

第三部分　哈密尔顿力学

第一部分　牛 顿 力 学

牛顿力学研究质点组在三维欧氏空间中的运动。牛顿力学的基本概念和定理（甚至在用笛卡尔坐标表述时）对于这个空间的6维①欧氏运动群都是不变的。

一个有势的牛顿力学系可以用质点的质量和力学系的位能来表述。保持位能不变的空间中的运动对应于各种守恒律。

牛顿运动方程使我们能完全解出一系列重要的力学问题，包括在有心力场中的运动问题。

第一章　实 验 事 实

我们将在本章中给出作为力学基础的实验事实：伽里略相对性原理和牛顿微分方程。我们要考查由相对性原理所加于运动方程上的限制，还要举出一些简单例子。

1　相对性原理和决定性原理

我们将在本节中介绍和讨论惯性参考系（坐标系）的概念。本节内容的数学提法将在下一节给出。

经典力学的基础是一些实验事实②。我们将列出其中的几

① 对更大的伽里略时空变换群也是不变的。

② 所有这些"实验事实"都只是近似为真，而可用更精确的实验推翻。为了避免叙述繁冗，以下我们不再讲这一点，讲到我们的数学模型时，都当它们是精确地描写了物理现象的。

个.

A　空间与时间

我们所在的空间是三维欧氏空间，时间则是一维的.

B　伽里略相对性原理

存在一些参考系（坐标系）称为惯性系，它们有以下两个性质：

1. 在所有惯性系中，一切自然规律在任何时刻都相同.

2. 相对于一个惯性系作匀速直线运动的一切参考系也都是惯性系.

换句话说，如果附着在地球上的参考系是惯性系，那么在一个相对地球作匀速直线运动的列车上，实验者完全在列车内作任何实验都不能使他觉察到列车的运动.

事实上，附着在地球上的参考系只是近似的是惯性系. 附着在太阳或其它恒星等上的参考系则更接近于惯性系.

C　牛顿的决定性原理

一个力学系的初始状态（即其中各点在某一时刻的位置与速度的总体）唯一地决定其运动.

因为我们很早就认识到这一点，所以很难怀疑这个事实. 可以想像这样一个世界，在其中为了决定一个系统的未来还需要知道其初始时刻的加速度，但是经验表明，我们的世界并不是这样.

2　伽里略群和牛顿方程

在本节中我们将定义和研究伽里略时空变换群. 然后我们考虑牛顿方程以及它对于伽里略变换的不变性质对方程右方所加的最简单的限制①.

① 不需要第一节论断的数学表述的读者可以略去本节.

A　记号

我们用R记全体实数的集合。用$\mathbf{R}^n$记n维实矢量空间。

图1　平移

n维仿射空间A^n与$\mathbf{R}^n$的区别在于它没有"固定原点"。群$\mathbf{R}^n$可以作为平移群作用在A^n上（图1）：

$$a\to a+\boldsymbol{b},\ a\in A^n,\ \boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n,\ a+\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n.$$

[所以A^n中两点的和没有定义，但其差有定义而且是$\mathbf{R}^n$中的一个矢量]。

矢量空间$\mathbf{R}^n$上的一个欧氏构造就是一个正定对称双线性形式，称为数量积。数量积使我们能定义相应的仿射空间A^n中两点的距离：

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x-y,x-y)}$$

仿射空间带上这个距离函数就叫做欧氏空间并记作E^n。

B　伽里略构造

伽里略时空构造包含以下三要素：

1．宇宙——这是一个四维仿射①空间A^4．A^4中的点称为世界点或事件。宇宙A^4中的平移构成一个矢量空间$\mathbf{R}^4$。

2．时间——这是一个线性映射$t:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}$，由宇宙的平移矢量空间映到实的"时间轴"。由事件$a\in A^4$到事件$b\in A^4$的时间间隔即数$t(b-a)$（图2）。若$t(b-a)=0$，就说事件$a$和$b$是同时的。

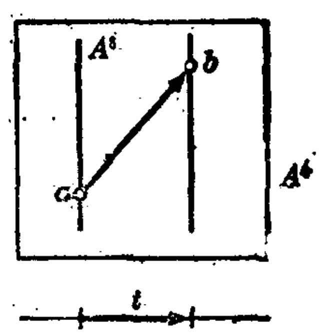

图2　时间t的间隔

与一个固定事件同时的事件之集合是A^4的一个三维仿射子空间。它叫做同时事件空间A^3。

---

① 以前，对宇宙并不赋以仿射构造而赋以线性构造（即宇宙的地心系统）。

映射 t 的核由 A^4 的这样一些平移构成，它们把某一事件（从而也将每个事件）变为与它同时的事件。这个核是矢量空间 $\mathbf{R}^4$ 的一个 3 维线性子空间 $\mathbf{R}^3$。

伽里略构造还包含一个要素：

3．同时事件的距离

$$\rho(a,b)=\|a-b\|=\sqrt{(a-b,a-b)}\quad a,b\in A^3$$

由 $\mathbf{R}^3$ 上的数量积给出。这个距离使每个同时事件空间都成为 3 维欧氏空间 E^3。

具有伽里略时空构造的空间 A^4 称为**伽里略空间**。

可以谈到在不同位置同时发生的两个事件，但是“*在三维空间同一位置上发生的不同时事件* $a,b\in A^4$”这种说法没有意义，因为我们没有选定一个坐标系。

伽里略群就是伽里略空间中保持其构造的一切变换所成的群。这个群的元素称为**伽里略变换**。所以，伽里略变换就是 A^4 中保持时间间隔和同时事件的距离不变的仿射变换。

例　考虑时间轴 t 和一个三维矢量空间 $\mathbf{R}^3$ 的直积①$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$；设 $\mathbf{R}^3$ 有一固定的欧氏构造。这样的空间有自然的伽里略构造。我们称之为**伽里略坐标空间**。

我们要举出这空间中伽里略变换的三个例子。首先是**速度为 $\boldsymbol{v}$ 的匀速运动**：

$$g_1(t,\boldsymbol{x})=(t,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}t)\quad\forall t\in\mathbf{R},\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3.$$

其次，**原点的平移**：

$$g_2(t,\boldsymbol{x})=(t+s,\boldsymbol{x}+\mathbf{s})\quad\forall t\in\mathbf{R},\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3.$$

① 提一下，两个集合 A 和 B 的直积就是有序对 (a,b) 的集合，$a\in A,b\in B$。两个空间（矢量、仿射或欧氏空间）的直积仍有同类型空间的构造。

最后，坐标轴的旋转：

$$g_3(t,x)=(t,Gx),\quad \forall t\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}^3.$$

G: $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 是一个正交变换。

问题　证明空间 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ 的每个伽里略变换都可唯一地表为一个旋转、一个平移和一个匀速运动的组合（$g=g_1\circ g_2\circ g_3$）（所以，伽里略群的维数是 $3+4+3=10$）。

问题　证明一切伽里略空间均互相同构①，而特别是同构于坐标空间 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$。

令 M 为一集合．一个 1－1 对应 φ_1: $M\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ 称为集 M 上的伽里略坐标系。坐标系 φ_2 称为对 φ_1 均匀地运动，若 $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}$: $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ 是一个伽里略变换。伽里略坐标系 φ_1 和 φ_2 给 M 以相同的伽里略构造。

C　运动，速度，加速度

$\mathbf{R}^N$ 中的运动就是一个可微映射 x: $I\to\mathbf{R}^N$，I 是实轴上的一个区间。

导数

$$\dot{x}(t_0)=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}=\lim_{h\to 0}\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}\in\mathbf{R}^N$$

称为 $t_0\in I$ 点的速度矢量。

二阶导数

$$\ddot{x}(t_0)=\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=t_0}$$

称为 t_0 点的加速度矢量。

---

① 即存在相互之间的一个保持伽里略构造的1-1映射。

我们将假设遇到的函数都可以连续求导所需要的那么多次。以下除非另有声明，映射，函数等等都理解为可微映射，可微函数等等。映射 x：$I \to \mathbb{R}^N$ 的象称为$\mathbb{R}^N$ 中的一个轨迹或曲线。

问题 平面上一个可微运动的轨迹可否具有图 3 的形状？其加速度矢量可否有图上所示的值？

答 是．否。

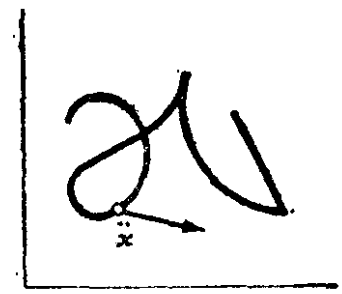

图 3 一点的运动轨迹

我们现在定义在三维欧氏空间中 n 个动点的力学系。

令x：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 为$\mathbb{R}^3$ 中的运动．它的图象① 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ 中的曲线。

伽里略空间中的曲线若是一个运动在某个（因此也在每个）伽里略坐标系下的图象，就称为世界线(图4)。

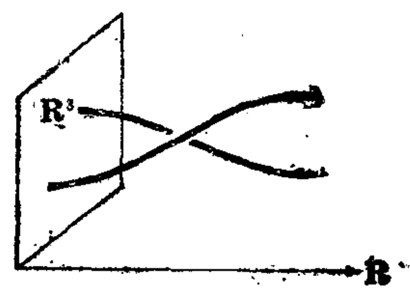

图 4 世界线

n 点系统的运动在伽里略空间中给出 n 条世界线．在伽里略坐标系中，它们可用 n 个映射x_i：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $i = 1, 2, \cdots, n$ 来表示。

n 个$\mathbb{R}^3$ 的直积称为n点系统的构形空间．上述 n 个映射 x_i：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 构成了由时间轴到构形空间的一个映射：

$$x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N, \quad N = 3n.$$

这个映射也称为此 n 点系统在伽里略坐标系 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ 中的运动。

D 牛顿方程

根据牛顿的决定性原理（节 1 C)，一个系统的一切运动都由其初始位置（$x(t_0) \in \mathbb{R}^N$）和初速度（$\dot{x}(t_0) \in \mathbb{R}^N$）唯一地决定。

---

① 映射 f：$A \to B$的图象是直积$A \times B$中由（$a, f(a)$)，$a \in A$所成的子集．

特别是，初始位置和初速度决定了加速度．换言之，存在一个函数F：$\mathrm{R}^N\times\mathrm{R}^N\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}^N$ 使得

$$(1)\qquad \ddot{x}=F(x,\dot{x},t).$$

牛顿以方程（1）作为力学的基础．它称为牛顿方程。

由常微分方程解的存在与唯一性定理，函数F与初始条件$x(t_0)$ 和$\dot{x}(t_0)$ 唯一决定一个运动①。

对每个特定的力学系，函数F的形状是由实验决定的。从数学观点来看，F的形状构成该力学系的定义。

E　由相对性原理所加的限制

伽里略相对性原理指出：在物理时空中有一个特定的伽里略构造（“惯性参考系类”），具有以下性质。

若对任一力学系② 各点的世界线作同一伽里略变换，将得出同一系统的世界线（但有新初始条件）（图5）。

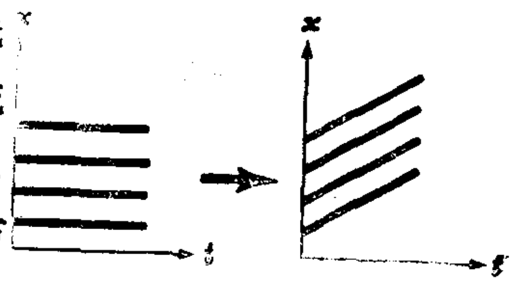

图5　伽里略相对性原理

这就对在惯性系中写出的牛顿方程的右方加上了一系列限制：方程（1）对伽里略变换群必须不变。

---

① 需要在一定的光滑性条件下，这些条件我们假设是适合的．一般说来，方程（1）只在时间轴的某区间上决定一个运动．为简单计，我们设此区间就是整个时间轴，而在大多数力学问题中都是如此．

② 在叙述相对性原理时，必须记住，讲的只是封闭的物理系统（包括力学系统），即是说，在研究这个给定现象时，一切其相互作用对此现象有影响的物体，都必须包括在该系统内。严格说来，我们应该把宇宙中一切物体都包括在系统中．但是从经验中知道，可以忽略其中的许多．例如在研究行星绕日运动时，我们可以忽略行星之间的引力．
另一方面，在研究地球附近的物体时，如果不把地球包括在内，这系统就不是封闭的；在研究飞机的运动时，如果不把飞机周围的空气包括在内，系统也不是封闭的，等等．将来，“力学系”一词在大多数情况下表示封闭系，如果有非封闭系的问题，将要明显地指出（例如见节3）．

例 1 时间平移是伽里略变换. 对于时间平移的不变性意味着"自然界的法则是恒定的", 即, 若 $x=\varphi(t)$ 是方程 (1) 的解, 则对任意 $s\in\mathbf{R}$, $\varphi(t+s)$ 也是一个解.

由此可知, 在惯性参考系中 (1) 式右方不含时间:

$$\ddot{x}=\Phi(x, \dot{x}).$$

注 右方含时间的微分方程, 在以下情况下出现.

设我们在研究力学系 I + II 的部分 I. 部分 II 对部分 I 的影响有时可以用描述部分 I 的方程组中参数对时间的变化来代替.

例 在研究地球上大多数现象时, 月球对地球的影响可以不计. 然而, 在研究潮汐时, 必须考虑到这个影响; 但是, 不必引入月球的引力, 只要引入地球上重力大小的周期性变化就可以做到这一点.

在求解一个问题时作形式运算的结果也会出现变系数方程.

例 2 三维空间中的平移也是伽里略变换. 方程 (1) 对于这种平移的不变性意味着空间是均匀的, 即"空间各点有相同性质."也就是说, 若 $x_i=\varphi_i(t)(i=1, \cdots, n)$ 是适合 (1) 的 n 个点的运动, 则对任意 $r\in\mathbf{R}^3$, 运动 $\varphi_i(t)+r(i=1, \cdots, n)$ 也满足方程 (1).

由此可得, 惯性参考系中的方程 (1) 的右方只能依赖于"相对坐标" x_j-x_k.

过渡到匀速运动的坐标系下也有不变性 (这并不改变 $\ddot{x}_i$ 和 x_j-x_k, 但对每个 $\dot{x}_j$ 都会加上一个定矢量 v), 由此可知, 惯性参考系下的方程 (1) 之右方只能依赖于相对速度

$$\ddot{x}_i=f_i(\{x_j-x_k, \dot{x}_j-\dot{x}_k\}), \ i, j, k=1, \cdots, n.$$

例 3 伽里略变换中还有三维空间的旋转. 对这些旋转的不变

性，意味着空间是各向同性的；没有什么特殊的方向。

于是，如果 φ_i：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ $(i=1,\ \cdots,\ n)$是 n 个点的系统的满足（1）的运动，而G：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是一个正交变换，则运动$G\varphi_i$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3(i=1,\ \cdots,\ n)$ 也满足（1）.换言之

$$\boldsymbol{F}(G\boldsymbol{x},G\dot{\boldsymbol{x}})=G\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}\ ).$$

$G\boldsymbol{x}$表示 $(G\boldsymbol{x}_1,\cdots,G\boldsymbol{x}_n)$，$\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^3$。

问题 若一力学系只由一点组成，证明它在惯性参考系中的加速度为零（"牛顿第一定律"）.

提示 由例1，例2，加速度矢量不依赖于$\boldsymbol{x}$，$\dot{\boldsymbol{x}}$或t，而由例3，矢量$\boldsymbol{F}$应对旋转不变。

问题 一个力学系由两点组成．在初始时刻其速度（在某惯性参考系中）均为零．证明它们将停留在初始时刻联结它们的直线上。

问题 一个力学系由三点组成．在初始时刻其速度（在某惯性参考系中）均为零．证明它们总位于初始时刻包含它们的平面上。

问题 一个力学系由两点组成．证明对任意初始条件都存在一个惯性参考系，使在其中这两点总位于一个固定平面上。

问题 证明"镜子里面"的力学和我们的力学是一样的。

提示 在伽里略群中有一个反射变换，改变$\mathbb{R}^3$的定向。

问题 惯性参考系类是否唯一？

答 否．改变长度和时间单位或时间的方向就可得出其它的惯性参考系类。

3 力学系的例子

我们已经提到对于每个力学系，牛顿方程（1）中函数$\boldsymbol{F}$的形状由实