

## 数 学 分 析 (上册)

复旦大学数学系主编

陈传璋 金福临 胡家骥 朱学炎 欧阳光中 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海市印十二厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 10.375 字数 245,000

1962年12月第2版 1978年3月第5次印刷

书号: 13119·355 定价: 1.15元

## 內 容 提 要

本书是1960年复旦大学数学系編著“数学分析”試用本的修訂本。修訂是根据两年来試用經驗并參照讀者所提出的一些意見改写的,較初版有了較多的补充和闡述,并附有适量的习题。

本书分上下两册,上册計极限論、微分学两篇,下册包括积分学、无穷級数和广义积分两篇,可作綜合大学数学系数学分析教材,亦可作高等院校有关专业的参考书。

## 数 学 分 析 (下 册)

复旦大学数学系主编

陈传璋 金福临 胡家驊 朱学炎 欧阳光中 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海群众印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 14.625 字數 349,000

1960年5月第1版 1962年12月第2版 1978年5月第5次印刷

书号: 13119·357 定价: 1.65 元

## 內 容 提 要

本书是1960年复旦大学数学系編著“数学分析”試用本的修訂本。修訂是根据两年來試用經驗并參照讀者所提出的一些意見改写的，較初版有了較多的补充和闡述，并附有适量的习题。

本书分上下两册，上册計极限論、微分学两篇，下册包括积分学、无穷級数和广义积分两篇，可作綜合大学数学系数学分析教材，亦可作高等院校有关专业的参考书。

## 序

本书是在复旦大学数学系 1960 年編著的“数学分析(一)”試用本的基础上重新編写的。其目的是作为綜合大学数学系数学分析基础課的教材或参考书。在这次改編工作中,根据基础課的教学要求及原书在复旦大学数学系試教的实际情况,并吸取了各方面意見,基本上仍旧保持原书所采用的系統結構,进一步注意到加强基础理論、基础知識和基本訓練,从而对內容作了比較多的补充,也作了适当的改动。此外,并附入适量的习题。

本书分上下两册計四篇。上册:第一篇极限論,包括变量与函数、数列极限、函数极限、函数連續性等;第二篇微分学,包括一元函数微分学及其应用、多元函数微分学及其应用。下册:第三篇积分学,包括不定积分和定积分及其应用、各种积分的概念及計算和它們之間的联系、場論;第四篇无穷級数和广义积分,包括无穷級数、广义积分、富里埃級数等。

我們对很多兄弟学校及有关單位同志們曾对本书試用本提出不少宝贵意見和积极建議,并对曹志浩、張乃玲、陈开明、秦曾复、廖有为等同志对本书編写工作所进行的协助,以及上海科学技术出版社对本书出版工作所給予的支持,表示衷心感謝。

由于我們水平有限,編写時間也比較匆促,一定还存在不少缺点,我們除了进一步通过教学实践来修改,充实,提高外,殷切期望同志們、讀者們随时給予批評指教。

▽ Nobla

# 数 学 分 析

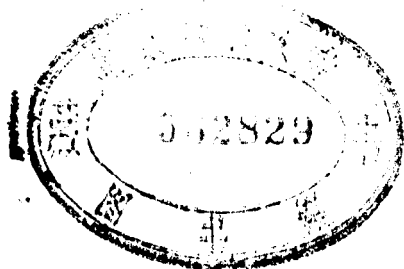
下 册

复旦大学数学系 主編

陈傳璋 金福临 胡家贛 朱学炎 欧阳光中 編

11/1/61/23

(第 二 版)



上海科学技术出版社

# 目 录

## (上 册)

### 序

|    |   |
|----|---|
| 緒論 | 1 |
|----|---|

## 第一篇 极 限 論

|           |   |
|-----------|---|
| 第一章 变量与函数 | 9 |
|-----------|---|

|    |    |
|----|----|
| 习题 | 28 |
|----|----|

|        |    |
|--------|----|
| 第二章 极限 | 33 |
|--------|----|

|           |    |
|-----------|----|
| § 1 极限的概念 | 33 |
|-----------|----|

|                |    |
|----------------|----|
| § 2 数列极限的性质和运算 | 48 |
|----------------|----|

|                 |    |
|-----------------|----|
| § 3 关于数列的几个基本定理 | 60 |
|-----------------|----|

|          |    |
|----------|----|
| § 4 函数极限 | 76 |
|----------|----|

|          |    |
|----------|----|
| § 5 連續函数 | 96 |
|----------|----|

|                |     |
|----------------|-----|
| § 6 閉区間連續函数的性质 | 108 |
|----------------|-----|

|                    |     |
|--------------------|-----|
| § 7 多元(二元)函数的极限与連續 | 119 |
|--------------------|-----|

|                    |     |
|--------------------|-----|
| § 8 无穷小量、无穷大量的阶的比較 | 130 |
|--------------------|-----|

|    |     |
|----|-----|
| 习题 | 132 |
|----|-----|

|          |     |
|----------|-----|
| 附录 实数的理論 | 146 |
|----------|-----|

## 第二篇 微 分 学

|           |     |
|-----------|-----|
| 第一章 导数与微分 | 160 |
|-----------|-----|

|              |     |
|--------------|-----|
| § 1 导数的引进与定义 | 160 |
|--------------|-----|

|             |     |
|-------------|-----|
| § 2 简单函数的导数 | 164 |
|-------------|-----|

|          |     |
|----------|-----|
| § 3 求导法則 | 166 |
|----------|-----|

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| § 4 不可导的函数举例          | 175 |
| § 5 微分                | 178 |
| § 6 高阶导数与高阶微分         | 182 |
| 习题                    | 188 |
| 第二章 微分学的基本定理          | 196 |
| § 1 中值定理              | 196 |
| § 2 洛必达法则             | 202 |
| § 3 泰勒公式              | 210 |
| 习题                    | 214 |
| 第三章 导数的应用, 函数作图       | 218 |
| § 1 函数的上升、下降与极值       | 218 |
| § 2 一元函数作图法           | 228 |
| 习题                    | 242 |
| 第四章 多元函数的微分学          | 245 |
| § 1 偏导数与全微分           | 245 |
| § 2 二元函数的泰勒公式         | 263 |
| § 3 二元函数的极值           | 265 |
| 习题                    | 271 |
| 第五章 隐函数存在定理, 函数相关     | 276 |
| 习题                    | 297 |
| 第六章 限制极值(条件极值)        | 302 |
| 习题                    | 311 |
| 第七章 微分学在几何上的一些应用      | 313 |
| § 1 平面曲线的切线和法线        | 313 |
| § 2 平面曲线的弧长微分、曲率和曲率半径 | 314 |
| § 3 空间曲线的切线和法平面       | 317 |
| § 4 曲面的切平面与法线         | 320 |
| 习题                    | 323 |

017/3

# 目 录

## (下 册)

### 第三篇 积 分 学

#### 第一章 不定积分 .....326

§ 1 不定积分与它的简单计算方法.....326

§ 2 不定积分的计算.....330

习题.....353

#### 第二章 定积分概念 .....358

§ 1 定积分问题的提出及定积分的定义.....358

§ 2 积分存在的充分必要条件.....362

§ 3 可积函数类.....370

§ 4 可积函数的性质.....373

§ 5 定积分的计算.....378

§ 6 椭圆积分.....388

习题.....392

#### 第三章 定积分的应用和定积分的近似计算 .....396

§ 1 曲线的弧长.....396

§ 2 平面图形的面积.....404

§ 3 体积.....411

§ 4 旋转体的侧面积.....415

§ 5 重心.....418

§ 6 定积分的近似计算.....422

习题.....427

#### 第四章 含参变量的积分..... 431

习题.....437



|                                                     |     |
|-----------------------------------------------------|-----|
| 第五章 各种不同形式积分(二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分)的定义及性质 ..... | 439 |
| § 1 二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分的概念 .....              | 439 |
| § 2 积分存在的充要条件 .....                                 | 444 |
| § 3 各种积分的性质 .....                                   | 447 |
| 习题 .....                                            | 449 |
| 第六章 各种积分的计算及应用 .....                                | 451 |
| § 1 二重积分的计算 .....                                   | 451 |
| § 2 三重积分的计算 .....                                   | 475 |
| § 3 第一类曲线积分的计算 .....                                | 490 |
| § 4 第一类曲面积分的计算 .....                                | 493 |
| § 5 二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分在物理上的应用 .....          | 500 |
| § 6 第二类曲线积分及第二类曲面积分 .....                           | 507 |
| 习题 .....                                            | 538 |
| 第七章 各种积分间的联系和场论 .....                               | 545 |
| § 1 格林公式 .....                                      | 545 |
| § 2 奥斯特洛格拉德斯基公式 .....                               | 549 |
| § 3 斯托克司公式 .....                                    | 552 |
| § 4 曲线积分和道路的无关性 .....                               | 557 |
| § 5 场论 .....                                        | 562 |
| 习题 .....                                            | 571 |

## 第四篇 无穷级数和广义积分

|                        |    |
|------------------------|----|
| 第一章 数项级数 .....         | 58 |
| § 1 预备知识 上限和下限 .....   | 58 |
| § 2 级数的收敛性及其基本性质 ..... | 58 |
| § 3 正项级数 .....         | 59 |
| § 4 任意项 .....          | 60 |

|                                                     |     |
|-----------------------------------------------------|-----|
| § 5 绝对收敛级数和条件收敛级数的性质                                | 611 |
| § 6 无穷乘积                                            | 619 |
| 习题                                                  | 625 |
| 第二章 函数项级数                                           | 629 |
| § 1 函数序列和函数项级数的收敛和一致收敛                              | 629 |
| § 2 一致收敛级数的性质                                       | 638 |
| § 3 一致收敛级数的判别法                                      | 643 |
| 习题                                                  | 649 |
| 第三章 幂级数                                             | 652 |
| § 1 幂级数的收敛半径和它的性质                                   | 652 |
| § 2 函数的幂级数展开式                                       | 657 |
| § 3 幂级数在近似计算中的应用                                    | 664 |
| 习题                                                  | 666 |
| 第四章 广义积分                                            | 669 |
| § 1 无穷限的积分                                          | 669 |
| § 2 无穷限积分的收敛性判别法                                    | 675 |
| § 3 无界函数的积分                                         | 681 |
| § 4 广义重积分                                           | 687 |
| 习题                                                  | 692 |
| 第五章 含参变量的广义积分                                       | 696 |
| § 1 含参变量广义积分的一致收敛性                                  | 696 |
| § 2 一致收敛积分的性质                                       | 701 |
| § 3 例题                                              | 707 |
| § 4 欧拉积分[Beta 函数 $B(p, q)$ 与 Gamma 函数 $\Gamma(s)$ ] | 711 |
| 习题                                                  | 718 |
| 第六章 富里埃级数                                           | 721 |
| § 1 三角级数和富里埃级数                                      | 721 |
| § 2 一般正交函数系                                         | 727 |
| § 3 狄利克来积分和黎曼引理                                     | 733 |
| § 4 富里埃级数的收敛性定理(狄尼判别法及其推论)                          | 739 |

|                        |     |
|------------------------|-----|
| § 5 狄利克来引理、狄利克来—約当判别法  | 742 |
| § 6 函数 $f(x)$ 的富里埃級数展开 | 746 |
| § 7 富里埃級数的逐項积分与逐項微分    | 753 |
| § 8 平方平均逼近             | 757 |
| § 9 算术平均求和概念与費埃耳定理     | 761 |
| § 10 三角函数系的封閉性         | 767 |
| § 11 富里埃积分             | 769 |
| 习题                     | 780 |

## 緒 論

本书包括了数学发展过程中微积分的主要内容。从数学历史来讲,微积分的产生标志着从初等数学到高等数学的飞跃。高等数学的研究对象和方法有自己明显的特点。高等数学和初等数学虽然有許多相同的地方,但也存在着許多本质上的差别。我們在这里准备浅显地說明一下高等数学研究的对象和方法具有哪些主要的特点,高等数学和初等数学的联系与差别,以及我們学习高等数学时需要明确的一些主要問題,以便讀者一开始就能密切地注意到这些問題。

高等数学研究的客觀对象和方法具有哪些主要特点呢?

我們可以看一看数学发展的历史。十六世紀,由于生产技术的进步,也推动了数学的发展。我們知道,在这一世紀,机械学、航海学、物理学、力学提出了許多新的問題,如:运动着的物体的速度和它的运动規律有怎样的关系,天体是沿着怎样的軌道运行的,不規則图形的面积怎样計算等等。这些問題就要求有新的数学工具来解决,我們可以从下面几个具体例子來說明。

[例 1] 設物体运动規律是

$$s = t^3,$$

$s$  是物体运动的路程,  $t$  是經過的时间;我們要求出  $t=1$  秒这一瞬間物体的速度是多少。也就是物理学中所謂的瞬时速度是多少。

利用初等数学的知識,很容易計算出某一段時間間隔內这个物体运动的“平均速度”,那么,我們就从研究平均速度入手。但不能只計算一个或几个平均速度,而要有选择地計算一連串的平均

速度, 观察它們变化的趋势。例如先算出 1 秒到 1.5 秒間的平均速度

$$\bar{v}_1 = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{3.375 - 1}{0.5} = 4.750 \text{ 米/秒},$$

再算出 1 秒到 1.2 秒間的平均速度

$$\bar{v}_2 = \frac{1.728 - 1}{0.2} = 3.640 \text{ 米/秒},$$

继续算下去, 得到一連串的平均速度:

1 秒到 1.1 秒間的平均速度  $\bar{v}_3 = 3.310$  米/秒,

1 秒到 1.01 秒間的平均速度  $\bar{v}_4 = 3.030$  米/秒,

1 秒到 1.001 秒間的平均速度  $\bar{v}_5 = 3.003$  米/秒,

.....

可以看出, 平均速度  $\bar{v}$  随着時間間隔的变化而变化。当时間

間隔取得越小时,  $\bar{v}_n$  就越接近于我們要寻求的答案。从上述平均速度的趋势看来,  $t=1$  秒时的瞬时速度大体上是 3 米/秒。

[例 2] 某个工厂制造一种铁盒子时提出了这样一个問題: 边长 1 分米的正方形原材料(图 0-0-1), 剪去阴影部分做一个高为  $x$  的无

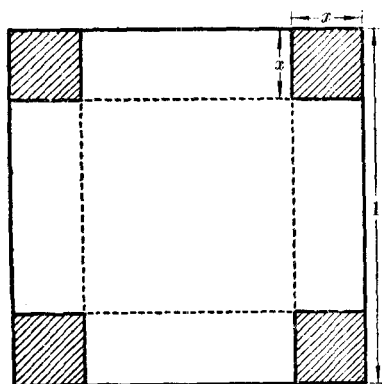


图 0-0-1

盖小盒, 問  $x$  取怎样的尺寸才能使盒的容积最大?

不难得出容积  $V$  和盒高  $x$  满足以下公式:

$$V = x(1-2x)^2.$$

当取  $x = \frac{9}{20}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$  (分米) 时, 得

$V = 0.0045, 0.0160, 0.0370, 0.0720, 0.0716$  (分米<sup>3</sup>)。

这些容积  $V$  (图 0-0-2) 随  $x$  的变化而变化, 当  $x$  由大变小时,  $V$  相应地由小到大再由大到小。从而, 我們可以看出最大体积  $V$  大体上是出現在  $x = \frac{1}{5}$  及  $x = \frac{1}{7}$  之間。如果在  $x = \frac{1}{5}$  及  $x = \frac{1}{7}$  之間再取一串数值, 算得更細些, 那么我們对于什么时候容积最大, 会看得更准确些。

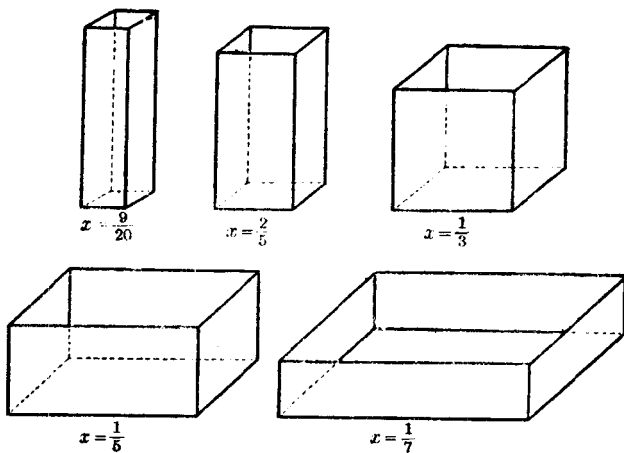


图 0-0-2

[例 3] 現代科学技术常要求我們計算許多不規則图形的面积(图 0-0-3)。当然, 越不規則, 計算起来越复杂。我們来計算一

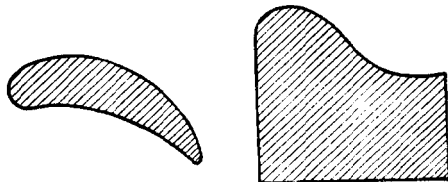


图 0-0-3

个较为简单的叫做“曲边梯形”的面积作为例子，曲边是  $y=x^2$  的一部分(图 0-0-4)。

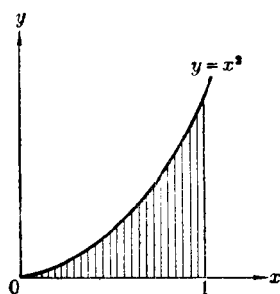


图 0-0-4

利用初等数学中的方法，我們按照图 0-0-5 中所示作出許多小矩形，这些小矩形面积的和近似于我們所求的面积，用这样的方法可以作出一連串不同的矩形面积之和  $s_n$  作为近似值。当然任何一个  $s_n$  不等于所求的曲边梯形的面积，但是随着分段愈来愈細， $s_n$  的变化趋势也愈来愈接近于曲边梯形面积。由图 0-0-5 所示可以看出，所求面积的值大体上在  $\frac{1}{3}$  左右。

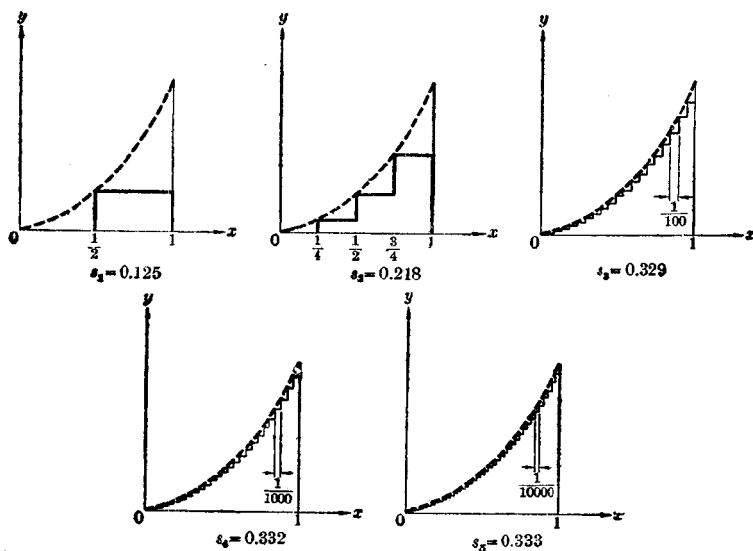


图 0-0-5

从以上三个例子我們看到：

1. 用初等数学工具来解决这一类問題不仅相当麻煩,而且又不能得到最終的答案,只能作大体上的估計;这是因为初等数学只能在有限的範圍內孤立地来討論問題。例如做盒子吧,用初等数学的办法,只能作出有限个盒子来加以比較;再如求速度吧,初等数学只能够考虑某个時間間隔內的平均速度;因此初等数学只能孤立地考虑某个片断。

2. 这一类問題都要求人們具有这样的一种观念,那就是必須在变化的过程中来考慮問題。無論如何不能只考虑一个片断,而應該考虑前后联系和变化的发展。例如做盒子吧,决不能停留在有限个盒子上,而應該在容积的变化过程中来找出一个具有最大容积的盒子。

由于大量类似的問題需要解决,从而产生了高等数学。

虽然如此,初等数学在很多的場合下仍旧起着重要的作用,但它总有一定的局限性,从上面的問題中我們也看到了这一点。

高等数学的方法和初等数学的方法根本不同,它要求在变化的过程中来掌握变量的实质。这样,既需要洞察过程的全貌,又需要作极其精細的分析,往往要研究在某一点极其微小的附近变量变化的情况。作个譬喻,一个好的短跑教练,他不仅要洞察整个跑步过程的全貌(从起点到終点),同时还要对某些地方作极其精細的分析。例如必須仔細分析起跑动作以及終点冲刺动作。

为了作进一步說明,我們再举一个例子。

[例 4] 如同第二个例子一样,計算下面两个曲边梯形的面积,我們得到如图 0-0-6 所示的一系列矩形面积的和。

这些和数,随着分割愈来愈密,也就愈来愈接近于所求的面积。从图中我們看到,  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的那块曲边梯形面积,大致上是



2, 但  $y = \frac{1}{x^3}$  的那块曲边梯形面积却是越来越大, 以致求不出这块面积。这两个图形虽然大致上差不多, 但为什么一个面积可以求出来而另一个面积求不出来呢?

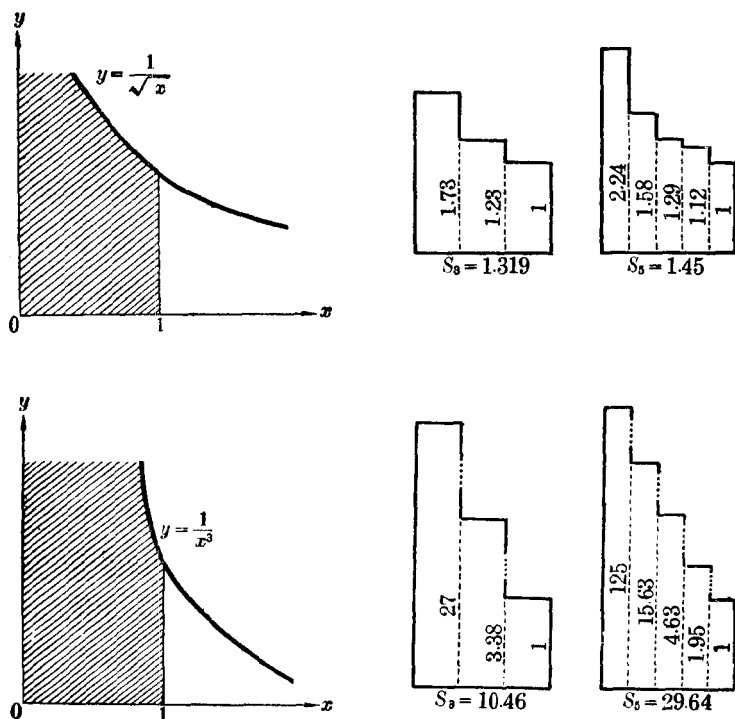


图 0-0-6

这是因为在 0 点出了问题, 如果我们不去算 0 到 1 的那块面积, 而是算  $\frac{1}{2}$  到 1, 或从  $\frac{1}{8}$  到 1, 从  $\frac{1}{4}$  到 1 等等之间的面积, 可象例 3 那样得到最终的结果。因此我们看到, 只要把 0 点除去, 计算从某个定数  $\delta > 0$  到 1 的那块面积, 直观上告诉我们, 无论对哪一个图形这个面积一定是存在的。