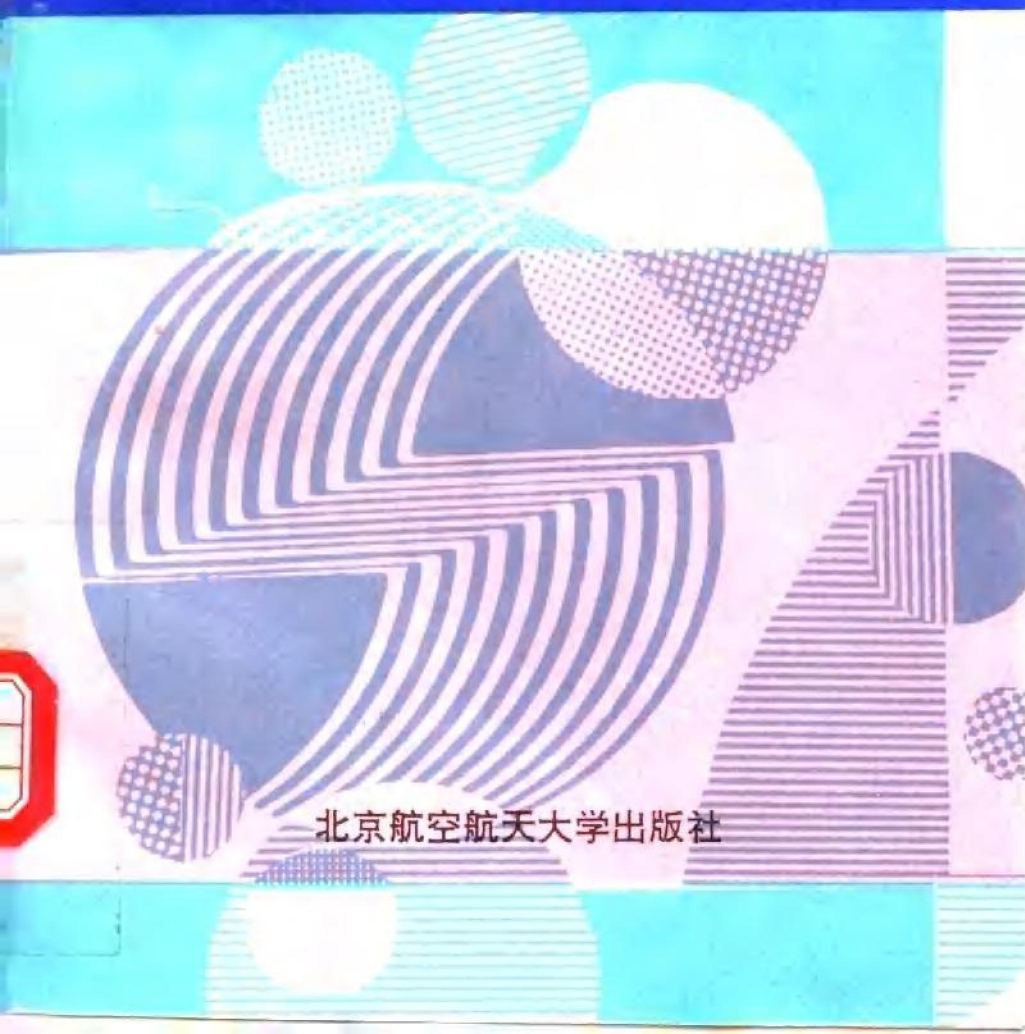
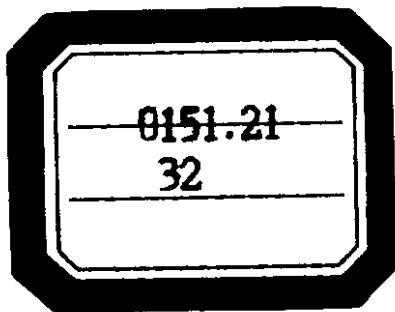


矩阵论引论

主编 陈祖明
编者 周家胜



北京航空航天大学出版社



1759785

矩阵论引论

主编 陈祖明
编者 周家胜

501/225/13



北京航空航天大学出版社



北师大图书 B1379548

内 容 简 介

本书为工科院校硕士研究生矩阵理论教材,内容包括:矩阵的初等性质;线性代数;矩阵分解;矩阵广义逆;矩阵分析以及矩阵的直积和拉直运算。

本书叙述深入浅出,思路清晰,并配有大量习题,故既可作为硕士研究生的教材,又可作为自学读物,也可作为工科院校有关专业教师的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论引论/陈祖明等编著. —北京:北京航空航天大学出版社,1998. 7

ISBN 7-81012-760-8

I. 矩… I. 陈… III. 矩阵-理论-研究生-教材 IV. 0151. 21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 29213 号

矩 阵 论 引 论

主编 陈祖明 编者 周家胜

责任编辑 郭维烈

责任校对 李宝田

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市学院路 37 号(100083) 62015720(发行部电话)

北京密云华都印刷厂印刷 各地书店经销

开本:850×1168 1/32 印张:12 字数:316 千字

1998 年 7 月第 1 版 1998 年 7 月第 1 次印刷 印数:3000 册

ISBN 7-81012-760-8/O·040 定价:14.00 元

符号说明

- A^+ 矩阵 A 的 Moore-Penrose 广义逆
- A^T 矩阵 A 的转置
- A^H 矩阵 A 的共轭转置
- A_L^{-1} 矩阵 A 的左逆
- A_R^{-1} 矩阵 A 的右逆
- O 表所有元素为 0 的矩阵
- I 表对角线元素为 1, 其余元素为零的矩阵, 单位矩阵
- $(A)_{ij}$ 矩阵 A 的第 (i, j) 元素
- $\sigma(A)$ 矩阵 A 的谱, A 的所有特征值集合
- $\rho(A)$ 矩阵 A 的谱半径, $\max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$
- $N(A)$ 矩阵 A 的零空间, A 的核
- $R(A)$ 矩阵 A 的值域, A 的列空间
- $\|A\|$ 矩阵 A 的范数
- $\det A$ 矩阵 A 的行列式
- $\text{adj}A$ 矩阵 A 的伴随矩阵
- $\text{tr}A$ 矩阵 A 的迹, A 的主对角元之和
- \mathbf{R} 实数的集合、实直线
- \mathbf{R}^n n 维实坐标向量空间
- $\mathbf{R}^{m \times n}$ $m \times n$ 阶实矩阵空间
- $\mathbf{R}_r^{m \times n}$ 所有秩为 r 的 $m \times n$ 阶实矩阵集合
- \mathbf{C} 复数集, 复平面
- $\mathbf{C}^{m \times n}$ $m \times n$ 阶复矩阵空间
- $\text{Re}\lambda$ 复数 λ 的实部
- $\text{Im}\lambda$ 复数 λ 的虚部

E^n n 维欧氏空间

X^c 子空间 X 的代数补

X^\perp 集合 X 的正交补

$(x|y)$ 向量 x 与 y 的内积

$(\cdot|\cdot)$ 内积

$\dot{+}$ 直和

\otimes 直积

$x \perp y$ 向量 x 与 y 正交、垂直

$X \cap Y$ 集合 X 与 Y 的交集

$X \dot{+} Y$ 子空间 X 与 Y 的直和

$X \dot{+} Y$ 或 $\text{diag}(X, Y)$ 矩阵 X 与 Y 的直和

$A \otimes B$ 矩阵 A 与 B 的直积, Kronecker 积

$L(X, Y)$ 从空间 X 到 Y 的线性变换空间

$\text{rank}(A)$ 矩阵 A 的秩

$\dim X$ 空间 X 的维数

$\text{null}(A)$ 矩阵 A 或线性算子 A 的零度

$\text{Span}[a_1, a_2, \dots, a_n]$ 向量 a_1, a_2, \dots, a_n 张成的线性子空间, 张空间

$P_{L, M}$ 沿空间 M 向空间 L 的投影

\vec{A} 矩阵 A 的拉直

$\frac{dY}{dX}$ 矩阵 Y 关于矩阵 X 的微分

$\max_{x \in S} f(x)$ $f(x)$ 在 S 上的最大值

$\min_{x \in S} f(x)$ $f(x)$ 在 S 上的最小值

$\inf_{x \in S} f(x)$ $f(x)$ 在 S 上的下确界

$\sup_{x \in S} f(x)$ $f(x)$ 在 S 上的上确界

$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 以 a_1, a_2, \dots, a_n 为对角元的 $n \times n$ 阶对角矩阵

$R(T)$ 线性变换 T 的值空间

- $N(T)$ 线性变换 T 的零空间或核
 $m_A(\lambda)$ 矩阵 A 的最小多项式
 $m_T(\lambda)$ 线性变换 T 的最小多项式
 $A^{(i)}$ 矩阵 A 的 (i) -逆
 $A\{i\}$ 矩阵 A 的 (i) -逆的集合
 $A^{(i,j,\dots,k)}$ 矩阵 A 的 $\{i,j,\dots,k\}$ -逆
 $A\{i,j,\dots,k\}$ 矩阵 A 的 $\{i,j,\dots,k\}$ -逆的集合
 \mathcal{B}_X 空间 X 的基底
 $m_{\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y}(T)$ 线性变换 $T \in L(X, Y)$ 关于基底偶 $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$ 的矩阵表示
 $m_{\mathcal{B}_X}(T)$ 线性变换 $T \in L(X, X)$ 关于基底 \mathcal{B}_X 的矩阵表示
 \mathbf{C}_R^n 实数域上 n 元复坐标向量所形成的线性空间
 $\mathbf{C}_R^{m \times n}$ 实数域上 $m \times n$ 阶复矩阵所形成的线性空间
 $\mathbf{C}[x]_n$ 复系数 n 次多项式空间
 $\mathbf{R}[x]_n$ 实系数 n 次多项式空间
 $\mathbf{C}[x]$ 复系数多项式空间
 $\mathbf{R}[x]$ 实系数多项式空间
 $p(x) | q(x)$ 多项式 $q(x)$ 可被多项式 $p(x)$ 整除
 $\mathbf{E}(\lambda)$ 特征值 λ 的特征子空间
 $A \sim B$ 矩阵 A 与矩阵 B 相似
 $X \simeq Y$ 空间 X 与空间 Y 同构
 \mathbf{C}^n n 维复坐标向量空间

前 言

由于在近代数学、工程技术、经济理论及管理科学中,大量地涉及到矩阵理论的知识,因此,矩阵理论自然就是学习和研究上述学科必不可少的基础之一。

另一方面,矩阵理论发展到今天,已经形成了一整套的理论和方法,内容非常丰富,文献和专著浩如瀚海。这就给在专门科技领域中工作而又必须用到矩阵知识的人们,特别是工程技术人员带来了许多困难。本书的编写目的就是为上述各类人员架设一座通向矩阵理论的桥梁,并通过这座桥梁使读者能尽快地得到各自需要的矩阵知识。

编书所遇到的最大困难恐怕要算是材料的取舍了。期望编一本适合各种专业需要的教材当然是不明智的,也是作者能力所不及的。即使勉强写了出来,恐怕其结果要么显得冗长,要么形如蜻蜓点水,令人抓不着要领。这当然不是人们所期望的。因此,我们的编写原则是:重点突出点,起点高一点,论述详细点,联系实际点。而为选材得当我们又广泛地征求了各有关专业同志的意见。按照这些同志的意见和作者多年来从事矩阵论教学的体会,同时依照国家教委关于工科硕士研究生《矩阵理论》教学大纲的规定,最后选定了矩阵的初等理论、线性空间、矩阵分解、矩阵分析、广义逆矩阵及矩阵的拉直运算等为本书基本内容。我们认为,这些内容在矩阵理论中既有基本理论意义,又有重要应用价值。

学习本书的读者只须具备工科院校本科生必须的线性代数、高等数学和少量复变函数知识就可以了。为了检验读者对各章节内容理解的程度,同时也为了扩大读者的知识面,我们在各节后面大都安排了一些习题,其中带星号的题目要求读者有一定的创造

力才能完成。读者应力求完成不带星号的题目,而对带星号的则应量力而行,不可强求。

本书共分六章,前三章由陈祖明副教授执笔,后三章由周家胜副教授执笔。由于我们的水平有限,书中错误和疏漏之处在所难免。敬祈有关专家和读者不吝指正。

在本书的编写过程中得到我校柳重堪教授、王纪文教授、陆震教授、程鹏教授等的无私帮助。本书脱稿后,又承蒙史荣昌教授、杨刚副教授审阅全稿,并提出许多中肯的修改意见,在此一并表示衷心的感谢!

陈祖明、周家胜

1997年9月

目 录

符号说明

前 言

第一章 矩阵的初等理论

§ 1.1 矩阵及其初等运算.....	(1)
1. 矩阵和向量	(1)
习题 1.1	(4)
2. 矩阵的分块乘法与初等变换	(6)
习题 1.2	(14)
§ 1.2 矩阵的行列式和矩阵的秩.....	(16)
1. 行列式及其性质	(16)
习题 1.3	(21)
2. 矩阵的秩及其性质	(25)
习题 1.4	(29)
§ 1.3 矩阵的迹和矩阵的特征值.....	(31)
1. 矩阵的迹及其初等性质	(31)
2. 矩阵的特征值及其计算	(32)
习题 1.5	(39)

第二章 线性代数基础

§ 2.1 线性空间.....	(45)
1. 线性空间的定义及例子	(45)

习题 2.1	(50)
2. 子空间的概念	(52)
习题 2.2	(58)
3. 基底和维数	(61)
习题 2.3	(75)
4. 和空间与直和空间概念的推广	(78)
§ 2.2 内积空间	(79)
1. 内积空间的定义及例子	(80)
习题 2.4	(83)
2. 由内积诱导出的几何概念	(87)
3. 标准正交基底与 Gram-Schmidt 过程	(89)
习题 2.5	(98)
§ 2.3 线性变换	(102)
1. 映射和线性变换	(102)
习题 2.6	(105)
2. 线性变换的运算	(107)
习题 2.7	(109)
3. 与线性变换有关的子空间	(110)
习题 2.8	(113)
§ 2.4 线性变换的矩阵表示和空间的同构	(115)
1. 线性变换的矩阵表示	(116)
2. 线性空间的同构	(121)
习题 2.9	(126)
§ 2.5 线性变换的最简矩阵表示	(130)
1. 线性变换的特征值与特征向量	(130)
习题 2.10	(143)
2. 线性变换的零化多项式及最小多项式	(146)
习题 2.11	(153)
3. 不可对角化线性变换的最简矩阵表示	(156)

习题 2.12	(169)
---------------	-------

第三章 矩阵的几种重要分解

§ 3.1 矩阵的 UR 分解及其推论	(175)
1. 满秩方阵的 UR 分解	(175)
2. 长方矩阵的分解	(176)
3. 几个具体例子	(180)
4. 关于矩阵的满秩分解的几个推论	(185)
§ 3.2 舒尔引理与正规矩阵的分解	(187)
1. 舒尔引理	(187)
2. 矩阵的奇异值分解和极分解	(192)
习题 3.1	(195)
§ 3.3 幂等矩阵、投影算子及矩阵的谱分解式	(199)
1. 投影算子、幂等算子和幂等矩阵	(199)
2. 可对角化矩阵的谱分解	(206)
习题 3.2	(215)

第四章 矩阵的广义逆

§ 4.1 Moore-Penrose 广义逆矩阵	(218)
§ 4.2 广义逆矩阵 $A^{(1)}$	(219)
1. 广义逆 $A^{(1)}$ 的定义和构造	(219)
2. 广义逆 $A^{(1)}$ 的性质	(230)
3. 广义逆 $A^{(1)}$ 应用于解线性方程组	(233)
习题 4.1	(234)
§ 4.3 广义逆矩阵 $A^{(1,2)}$	(238)
1. 广义逆 $A^{(1,2)}$ 的定义及存在性	(238)
2. 广义逆 $A^{(1,2)}$ 的性质	(239)
3. 广义逆 $A^{(1,2)}$ 的构造	(243)
习题 4.2	(245)

§ 4.4	广义逆矩阵 $A^{(1,3)}$	(246)
1.	广义逆 $A^{(1,3)}$ 的定义和构造	(246)
2.	广义逆 $A^{(1,3)}$ 应用于解方程组	(248)
	习题 4.3	(250)
§ 4.5	广义逆矩阵 $A^{(1,4)}$	(252)
1.	广义逆 $A^{(1,4)}$ 的定义和构造	(252)
2.	广义逆 $A^{(1,4)}$ 应用于解方程组	(254)
	习题 4.4	(256)
§ 4.6	M-P 广义逆矩阵	(258)
1.	M-P 广义逆的存在及性质	(258)
2.	M-P 广义逆的几种显式表示	(263)
3.	M-P 广义逆用于解线性方程组	(266)
	习题 4.5	(268)
§ 4.7	几种计算 A^+ 的直接方法	(270)
1.	Lagrange-Sylvester 公式	(271)
2.	Neumann 展式	(271)

第五章 矩阵分析

§ 5.1	向量范数及矩阵范数	(274)
1.	向量范数	(274)
2.	矩阵范数	(281)
	习题 5.1	(288)
§ 5.2	矩阵序列与矩阵级数	(291)
1.	向量序列的极限	(291)
2.	矩阵序列的极限	(292)
3.	矩阵级数	(295)
	习题 5.2	(298)
§ 5.3	矩阵的微分与积分	(299)
1.	函数矩阵及其极限	(299)

2. 函数矩阵的微分和积分	(301)
3. 纯量函数关于矩阵的导数	(304)
4. 矩阵对矩阵的导数	(309)
习题 5.3	(313)
§ 5.4 矩阵函数	(314)
1. 矩阵多项式	(314)
2. 矩阵函数	(319)
3. 常用矩阵函数的性质	(339)
习题 5.4	(342)
§ 5.5 矩阵分析在微分方程中的应用	(346)
习题 5.5	(348)

第六章 矩阵的 Kronecker 积

§ 6.1 矩阵的 Kronecker 积的定义和性质	(350)
1. Kronecker 积的定义	(350)
2. Kronecker 积的性质	(350)
§ 6.2 Kronecker 积的应用	(354)
1. 矩阵的拉直及其与直积的关系	(354)
2. 直积的应用	(355)
习题 6.1	(362)

参考文献

第一章 矩阵的初等理论

本章的目的是对工科院校本科学生必备的矩阵知识,特别是矩阵的数值特征(秩、行列式、迹等)方面的知识加以复习和提高,对大部分结论将不加证明。这一方面是因为这些证明在几乎所有的线性代数教材中都可以找到;另一方面是为避免使本书篇幅过长。

§ 1.1 矩阵及其初等运算

1. 矩阵和向量

$m \times n$ 个元素排成的矩形阵称为矩阵,记为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

或

$$A = [a_{ij}]$$

其元素 a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) 一般取自某特定的域*, 但本书仅考虑其元素取自复(或实)数域。符号 $m \times n$ 称为 A 的阶。 $n \times n$ 阶矩阵称为 n 阶正方矩阵或 n 阶方阵或 n 阶矩阵。矩阵 A 与 B 相等, 意味着它们的阶相同且对应元素相等。矩阵

* 域的概念可参看谢邦杰编《线性代数》(1978年版)第277页或本书定义2.1.1。

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

和矩阵

$$A^H = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{m1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{bmatrix} = \overline{A^T} \quad (1.3)$$

分别称为矩阵 A 的转置矩阵和共轭转置矩阵,其中 \bar{a} 表示复数 a 的共轭复数。

满足条件 $A^T = A$ 的矩阵 A 称为对称矩阵;满足条件 $A^H = A$ 的矩阵 A 称为共轭对称矩阵,也称为Hermite 矩阵;满足条件 $A^T = -A$ 的矩阵 A 称为反对称矩阵,满足条件 $A^H = -A$ 的矩阵 A 称为反 Hermite 矩阵。它们显然都是正方矩阵。

一个形如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

的矩阵,即其第 j 列中的第 j 行位置上的元素为 1,其余元素为零 ($j=1,2,\dots,n$)的 $n \times n$ 阶矩阵称为 $n \times n$ 阶单位矩阵,记为 I_n ,或简记为 I 。

今后我们总以大写英文字母 $A, B, C \dots$ 等来表示矩阵,而以小写希腊字母 α, β, \dots 等表示数字。又以 \mathbf{R} 表示全体实数所形成的集合,以 \mathbf{C} 表示全体复数所成的集合。全体 $m \times n$ 阶、元素为实数的矩阵所成的集合记成 $\mathbf{R}^{m \times n}$,即

$$\mathbf{R}^{m \times n} = \{A | A = [a_{ij}], a_{ij} \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}, \quad (1.5)$$

类似地可定义记号 $\mathbf{C}^{m \times n}$ 。显然 $\mathbf{R}^{m \times n} \subset \mathbf{C}^{m \times n}$ 。

设 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $\alpha \in \mathbf{C}$, 下列矩阵

$$C = [a_{ij} + b_{ij}] = A + B; \quad (1.6)$$

$$D = [\alpha a_{ij}] = \alpha A, \quad (1.7)$$

分别称为 A 与 B 的和及 A 与 α 的积。

设 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbf{C}^{n \times p}$, 称矩阵

$$F = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right]_{m \times p} \stackrel{d}{=} AB \quad (1.8)$$

为 A 左乘 B 的积。显然要使 AB 有意义必须且只须 A 的列数等于 B 的行数。其次要注意一般来说 $AB \neq BA$ 。如果 $AB = BA$ 成立, 则称 A 与 B 是(关于乘法运算)可交换矩阵。如果 $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 且存在 $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 使得 $AB = BA = I_n$, 则说 A 是非奇异矩阵或可逆矩阵, 并说 B 是 A 的逆。否则便说 A 是一个奇异矩阵或不可逆矩阵。若 A 可逆, 则 A 的逆记为 A^{-1} 。可逆矩阵的逆是唯一的。

命题 1.1.1 设 $A, B, C \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$, 则有

$$(1) A + B = B + A; \quad (2) A + (B + C) = (A + B) + C;$$

$$(3) \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B; \quad (4) (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;$$

$$(5) (A + B)^T = A^T + B^T; \quad (6) (A + B)^H = A^H + B^H;$$

命题 1.1.2 设 $A, B \in \mathbf{C}^{m \times n}$; $C, D \in \mathbf{C}^{n \times p}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, 则有:

$$(1) A(C + D) = AC + AD; \quad (2) (A + B)C = AC + BC;$$

$$(3) \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A; \quad (4) \alpha(AC) = (\alpha A)C;$$

$$(5) (AC)^T = C^T A^T; \quad (6) (AC)^H = C^H A^H;$$

$$(7) A I_n = I_m A = A;$$

$$(8) A(DF) = (AD)F, \text{ 但 } F \in \mathbf{C}^{p \times q}.$$

命题 1.1.3 设 $A, B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 均为可逆矩阵, 则

$$(1) (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$(2) (A^{-1})^T = (A^T)^{-1};$$

$$(3) (A^{-1})^H = (A^H)^{-1};$$

$$(4) AB \text{ 与 } BA \text{ 均可逆, 且}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

由 m 个元素 a_1, a_2, \dots, a_m 组成的有序组

$$(a_1, a_2, \dots, a_m), \quad (1.9)$$

或

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

称为 m 元坐标向量, 简称为 m 元向量或向量。元素 $a_i (i=1, 2, \dots, m)$ 称为向量的分量。

有时为了区别起见, 又称形如(1.9)的向量为行向量, 而称形如(1.10)的向量为列向量。显然, 向量(1.9)可以看成 $1 \times m$ 阶矩阵, 而向量(1.10)可以看作 $m \times 1$ 阶矩阵。

一个列向量(1.10)有时又记作

$$(a_1, a_2, \dots, a_m)^T。$$

若 $a_i \in \mathbf{R} (i=1, 2, \dots, m)$, 则记形如(1.10)的向量全体为 \mathbf{R}^m ;

若 $a_i \in \mathbf{C} (i=1, 2, \dots, m)$, 则记之为 \mathbf{C}^m 。

今后我们将用小写英文字母 x, y, z, \dots 等来表示向量。

注1 由于向量是矩阵的特殊形式, 因此命题 1.1.1 和命题 1.1.2 对向量也适用;

注2 各个元素 $a_{ij} (i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n)$ 均为 0 的矩阵称为 $m \times n$ 阶零矩阵, 记为 $\mathbf{O}_{m \times n}$, 或简记为 \mathbf{O} , 它在矩阵运算中的地位相当于数 0 在数的运算中的地位。

注3 今后和式 $A + (-1)B$ 都简写成 $A - B$, 并称为 A 与 B 的差。

习 题 1.1

—

1. 设 $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, y = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 试计算(1) xy ;