高等学校教材

气体动力学基础

（1995年修订版）

潘锦珊 主编

西北工业大学出版社

高等学校教材

气体动力学基础

（1995 年修订版）

潘锦珊　主　编

潘锦珊　方人淞
申振华　刘景梅　编

西北工业大学出版社

1995 年 6 月　西安

(陕) 新登字 009 号

【内容简介】 本书共八章，讨论了气体动力学中的一些基本问题。首先介绍可压缩流体流动的基本方程及基本概念，然后较深入地讨论超声速流中膨胀波和激波的理论以及可压缩一维定常管流的理论。还介绍了求解可压缩二维定常无旋流场的小扰动法和特征线法及一维非定常均熵流和翼型的基本知识。

本书可作为航空、航天的动力专业和燃气轮机及工程热物理等专业的教科书，亦可供从事发动机设计工作的技术人员参考。

高等学校教材
气体动力学基础
(1995 年修订版)
主　编　潘锦珊
责任编辑　刘国春
责任校对　杨长照
*

(710072　西安市友谊西路 127 号　5261952)
陕西省新华书店 发行
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0729-8/TK·2 (课)
*
开本：787×1092 毫米 1/16　印张：18.25　字数：441 千字
1980 年 6 月第 1 版　1995 年 6 月第 3 版 第 1 次印刷
印数：7 801—10 800 册　定价：15.00 元

第二次修订版前言

本书为1980年出版的《气体动力学基础》的第二次修订本。这次修订对《气体动力学基础（修订版）》（即1989年第一次修订本）一书进行了重大的修改。因为新的航空动力专业教学计划要求动力专业学生需先修完流体力学基础课程，再学习气体动力学基础课程。相应地学时缩减为70学时。这样，原教材的内容就显得过多。需要删掉与流体力学重复的部分和精简一些章节的内容。为此，根据《气体动力学基础课程的基本要求》制订了《气体动力学基础（第二次修订版）》教材的编写大纲。本书就是根据这份编写大纲对《气体动力学基础（修订版）》一书进行修改编写的。

本书讲述了可压缩流体流动的基本方程及基本概念。对于超声速流中的膨胀波和激波理论做了深入的讨论。讲述了可压缩流体的一维定常流动理论。对于一维定常管流中的亚声速和超声速的流动规律做了详细的分析。介绍了多维理想流动的基本微分方程组及初始条件和边界条件；并介绍了求解二维无旋流动的小扰动法和特征线法等内容。此外，本书还简要地介绍了一维非定常均熵流和翼型的基本知识。

本书由西北工业大学潘锦珊主编。书中第一、八章由沈阳航空工业学院申振华编写；第二、三章由潘锦珊编写；第四、五章由南京航空航天大学方人淞编写；第六、七章由北京航空航天大学刘景梅编写。

本书由西安交通大学流体力学教研室景思睿副教授审阅。他对本书初稿提出了不少宝贵的修改意见，特此表示衷心的感谢。

对于书中可能存在的缺点和不妥之处，欢迎读者批评指正。

潘锦珊

于西北工业大学 1994 年 5 月

目 录

绪　论

气体动力学的研究对象及其特点　气体动力学是研究气体与物体之间有相对运动时，气体的运动规律以及气体和物体间的相互作用（如力和热的作用等）的一门科学。它是流体动力学的一个分支，它主要研究气体高速运动的规律。

大家知道，气体是一种可压缩流体。但是，当气体做低速运动时，由于气体压强变化较小，引起的密度变化也很小，通常可以忽略气体的压缩性，而把低速气体流动当做不可压缩流处理。然而，当气体做高速运动时，气体的压强和密度有显著的变化，则必须按可压缩流来处理。因此，考虑气流的可压缩性效应，是气体动力学的重要特征。在流体动力机械中，会遇到许多可压缩流流动问题，例如，气体在扩压器和喷管内的流动，高速气体绕过叶栅的流动，等等。

在可压缩流流动过程中，总是伴随有热力过程的发生，例如，气体在收缩喷管内的流动，气体压强下降，速度增大（动能增大），温度降低（热焓减小），密度减小，在忽略粘性及与外界无热交换的条件下，可作为等熵流过程处理。因此，研究可压缩流流动是以动力学及热力学两方面的一些基本物理定律为其理论基础的。这些定律是：质量守恒定律、牛顿第二运动定律、热力学第一定律和热力学第二定律。由上述 4 个基本定律所导出的气体动力学控制方程组，即：连续方程，动量方程，能量方程，熵方程是研究气体流动规律的基础。

气体动力学的发展简史　气体动力学的初期研究阶段（19 世纪下半叶 —20 世纪 30 年代），由于工程上蒸气机、炮弹的爆炸技术的发展，均涉及到气流的可压缩性问题。本世纪初发明了飞机，随着飞行速度的提高，螺旋桨叶尖也遇到气流的可压缩性问题。在这个时期，创立了一系列经典理论，其中有代表性的如：1860 年黎曼（Riemann）发表了关于有限振幅波在空气中传播的重要论文，朗金（Rankine，1870）和雨贡纽（Hugoniot，1887）提出了激波的基本理论。同一时期，马赫（Mach. E，1887）发表了关于抛射体以超声速运动时所产生的波的观察，得出了马赫角关系。其后，阿克来（Ackeret. J，1929）把流速和声速之比命名为马赫数；瑞利（Rayleigh，1896）发表了《声学理论》；恰普雷金（C. A. Чаплыгин）论气体射流的名著发表于本世纪之初。气体动力学的系统研究是在普朗特（Prandtl）的领导下开始的。普朗特和迈耶（Meyer）1908 年提出了斜激波和膨胀波理论；关于圆锥激波解则先由布兹曼（Busemann，1928）提出图解法，后又由泰勒和马可尔（Taylar and Maccoll，1933）提出数值解。拉伐尔（de Laval，1882）发明了收缩扩张形喷管，其后，由斯多道拉（Stodola，1903）以及普朗特和迈耶（1908）观测了这种喷管的流动特性；此外，小扰动线化方法、特征线方法和速度图法都在本世纪初期相继问世。

本世纪 30 年代— 本世纪 50 年代，由于喷气式飞机、火箭喷气技术、燃气轮机等技术的迅速发展，促进气体动力学的理论研究和实验研究日趋成熟，出现了一些优秀的《气体动力学》教材。近几十年来，随着计算机和数值计算方法的发展。用数值方法来求解气体动力学的控制方程组，解决了以往用解析方法无法解决的复杂流动问题，如跨声速流动。同时，对

无法用实验手段模拟的气体流动问题，也可以用数值方法来模拟。因此，数值方法在气体动力学研究中的作用和地位不断提高。所取得的成就是巨大的。此外，近几年非定常气体动力学的研究也日益引起人们的重视。

现代气体动力学的内容十分丰富，限于学时，本书只能讨论一些气体动力学的基本内容，而且主要研究无粘性气体运动。

第一章 可压缩流体流动的基本方程及基本概念

本章介绍可压缩流体流动所遵循的基本方程和一些基本概念。这些基本方程和基本概念为研究气体动力学奠定了必要的基础。

§1－1 可压缩流体流动的基本方程

一、体系和控制体

在推导可压缩流体流动的基本方程之前，我们必须首先明确关于体系和控制体的概念。

体系是某些确定的流体质点的集合，因而一经取定，在运动过程中，其质量就不再改变。体系以外的物质称为环境。将体系与环境隔开的假想表面称作体系的边界。体系的边界随着流体一起运动并且形状不断发生变化。在边界上可以有力的作用和能量的交换，但没有流体的通过。

自然界中四条基本物理定律，如质量守恒定律、牛顿运动第二定律及热力学第一、第二定律等都是针对体系而建立的。由于气体的运动十分复杂，体系的边界很难确定，因而采用体系的分析方法不够方便。在流体力学中，最常用的研究方法则是控制体的分析方法。

控制体是指流场中某个固定的空间区域。控制体的边界称作控制面，它总是封闭表面。在控制面上，可以有力的作用和能量的交换。通过控制面，可以有流体流入或流出控制体。

根据研究的流动情况和边界位置的不同，控制体的大小和形状可以任意选定。在分析问题时，首先选定控制体，然后就可以集中研究流体流过该控制体时诸参数的变化情况，以及控制体内流体与控制体外物质的相互作用。

应该知道，体系的分析方法与研究流体运动的拉格朗日法相适应，而控制体的分析方法则是与研究流体运动的欧拉法相适应的。

二、雷诺输运定理

为了使用欧拉法研究流体流过控制体时参数的变化规律，首先必须把针对给定体系建立的物理定律的数学表达式改造成适合于控制体形式的数学表达式。雷诺输运定理就是把体系中与流体体积有关的随流物理量的随流导数以控制体的形式来表示。借助这个定理，我们就可以很容易地把基本物理定律的数学表达式从体系形式转换成控制体形式。下面就来推导雷诺输运公式。

在流场中任取一个有限大小的控制体，其控制表面为 A，体积为 v，如图1－1所示（图中 dA 为微元面积矢量，V 为速度矢量）。同时取 t 瞬时位于控制体内的流体为体系。因此在 t 瞬时控制体与体系占据相同的空间，即占据由 Ⅰ 和 Ⅱ 表示的区域，在瞬时 $t+\Delta t$，体系随流体一起运动到新的位置，占据区域 Ⅱ 和 Ⅲ，其形状也发生了改变。但控制体仍在原来的位置。

设 $N=\int_v \eta \mathrm{d}v$ 为某瞬时 t 体系内流体所具有的与体系流体体积有关的某种随流物理量，如体系内流体的质量、能量、动量、动量矩等；η 为该体系内单位体积流体所具有的这种随流物理量，v 为体系的体积。一般情况下，N 和 η 是空间坐标和时间的函数。既可以是标量，也可以是矢量。在 Δt 时间间隔内，体系内流体所具有的随流物理量 N 对时间的变化率为

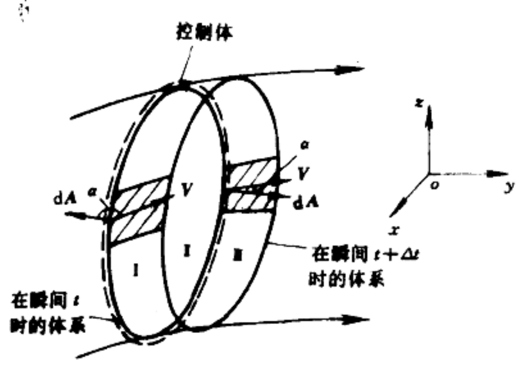

图 1-1

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_{体系}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)_{体系}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{N_{t+\Delta t}-N_t}{\Delta t}\right)_{体系}$$

它是一个随流导数，引用随流导数符号 $\frac{\mathrm{D}(\ )}{\mathrm{D}t}$，则有

$$\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_{体系}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{N_{t+\Delta t}-N_t}{\Delta t}\right)_{体系}$$

当考虑到 t 和 $t+\Delta t$ 瞬时体系所占据的空间位置时，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t}&=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(N_{\mathrm{I}}+N_{\mathrm{II}})_{t+\Delta t}-(N_{\mathrm{I}}+N_{\mathrm{II}})_t}{\Delta t}\right]\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(N_{\mathrm{I}})_{t+\Delta t}-(N_{\mathrm{I}})_t}{\Delta t}\right]+\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(N_{\mathrm{II}})_{t+\Delta t}}{\Delta t}\right]-\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(N_{\mathrm{I}})_t}{\Delta t}\right]\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(\int_{\mathrm{I}}\eta \mathrm{d}v)_{t+\Delta t}-(\int_{\mathrm{I}}\eta \mathrm{d}v)_t}{\Delta t}\right]+\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(\int_{\mathrm{II}}\eta \mathrm{d}v)_{t+\Delta t}}{\Delta t}\right]-\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(\int_{\mathrm{I}}\eta \mathrm{d}v)_t}{\Delta t}\right]\end{aligned}\tag{a}$$

当 Δt 趋近于零取极限时，区域 I 与控制体 v 相同，因此 (a) 式右边第一项为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\int_{\mathrm{I}}\eta \mathrm{d}v)_{t+\Delta t}-(\int_{\mathrm{I}}\eta \mathrm{d}v)_t}{\Delta t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_v \eta \mathrm{d}v\tag{b}$$

方程 (a) 中等号右边第二项中的积分表示在 Δt 时间内体系随流物理量进入区域 II，即流出控制体的数量，而第二项全项则表示体系随流物理量流出控制体的速率。由于通过控制面微元面积 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 的体积流率为 $(\boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A})$，因此

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(\int_{\mathrm{II}}\eta \mathrm{d}v)_{t+\Delta t}}{\Delta t}\right]=\int_{A_{出}}\eta \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}\tag{c}$$

式中，$A_{出}$ 为流出控制体的流体所穿过控制面的面积。

同理，方程 (a) 中等号右边第三项表示体系随流物理量流入控制体的速率，即

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(\int_{\mathrm{I}}\eta \mathrm{d}v)_t}{\Delta t}\right]=-\int_{A_{进}}\eta \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}\tag{d}$$

式中，$A_{进}$ 表示流进控制体的流体所穿过控制面的面积。由于流进控制体的 $\boldsymbol{V}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 之间的夹角总是大于 90° 而小于 270°，故 (d) 式中面积分值总是负的，但随流物理量只能是正值，因此在积分号前加上负号。

合并(c)、(d) 式,可得

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\left(\int_{\mathrm{II}} \eta \mathrm{d}v\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t}-\frac{\left(\int_{\mathrm{I}} \eta \mathrm{d}v\right)_{t-\Delta t}}{\Delta t}\right]=\int_{A_{出}} \eta \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}+\int_{A_{进}} \eta \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

$$=\oint_{A} \eta \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{e}$$

将(b) 和(e) 式代入(a) 式,则有

$$\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{v} \eta \mathrm{d}v=\frac{\partial}{\partial t}\int_{v} \eta \mathrm{d}v+\oint_{A} \eta \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{1-1}$$

或

$$\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{v} \eta \mathrm{d}v=\int_{v} \frac{\partial}{\partial t}(\eta) \mathrm{d}v+\oint_{A} \eta V_{n} \cdot \mathrm{d}A \tag{1-1a}$$

这就是雷诺输运公式。式中 v 为控制体的体积;A 为控制面面积;$\boldsymbol{V}$ 为流体速度矢量;V_n 为沿微元控制表面外法线方向的分速度。式(1-1) 说明,某瞬时体系内某随流物理量对时间的变化率等于同一瞬时与该体系重合的控制体内所含同一物理量对时间的变化率与该物理量通过控制面的净流出率之和。换言之,体系内流体的某物理量对时间的随流导数由两部分组成:一部分是当地导数,它等于控制体内该物理量的时间变化率;另一部分是迁移导数或对流导数,它等于单位时间内该物理量流出和流入控制体的差值。

下面就利用输运公式来建立适用于控制体的基本方程。

三、连续方程

连续方程是质量守恒定律应用于流体流动时的数学表达式。如果令(1-1) 式中的 N 代表体系的质量,且 $\eta=\rho$,则有 $N=\int_{v} \rho \mathrm{d}v$。根据质量守恒定律,体系内流体的质量在流动过程中不随时间而变化。则适用于体系的连续方程为:

$$\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{v} \rho \mathrm{d}v=0 \tag{1-2}$$

(一) 控制体的积分形式连续方程

利用输运公式(1-1),则(1-2) 式变成

$$\int_{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}v+\oint_{A} \rho \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}=0 \tag{1-3}$$

或

$$\int_{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}v=-\oint_{A} \rho \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{1-3a}$$

这就是适用于控制体的积分形式的连续方程。它说明控制体内流体质量的增加率等于通过控制面 A 进出控制体的流体净流入率。

对于定常流,由于 $\partial \rho / \partial t=0$,则连续方程变为

$$\oint_{A} \rho \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}=0 \tag{1-4}$$

或

$$-\int_{A_{进}} \rho \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}=\int_{A_{出}} \rho \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{1-4a}$$

上式说明,当不存在内部源汇时,对于定常流动,经过控制面流入控制体的流量必然等于流出

控制体的流量。

对于一维定常流动，式(1-4a)可写为

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \tag{1-5a}$$

式中，V_1，V_2 分别与截面 A_1，A_2 相垂直。

(1-5a)式也可改写为

$$\rho V A = 常数 \tag{1-5b}$$

(二) 微分形式的连续方程

为了得到微分形式的连续方程，可利用高斯散度定理把方程(1-3)中的面积分项改写成体积分项，即

$$\oint_A \rho \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \oint_A \rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A = \int_v \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) \mathrm{d}v \tag{1-6}$$

把上式代入(1-3)式，于是有

$$\int_v \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V})\right] \mathrm{d}v = 0 \tag{1-7}$$

由于积分体积 v 是任意取的，且假定被积函数连续，因此，只有当括号内的值处处为零时，积分才可能为零。于是我们就得到微分形式的连续方程，即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0 \tag{1-8}$$

将式中 $\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V})$ 项展开，则

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{V}$$

将其代入(1-8)式，有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$$

因为

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla \rho$$

则

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{1-9}$$

这是另一种形式的微分形式连续方程，它与方程(1-8)完全等价。

对于可压缩流体的定常流动，微分形式的连续方程为

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0 \tag{1-10}$$

对于不可压缩流体，因为 $\mathrm{D}\rho/\mathrm{D}t = 0$，则有连续方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{1-11}$$

这说明不可压缩流体在流动过程中速度 $\boldsymbol{V}$ 的散度，即体积膨胀率处处为零。

以上微分形式的连续方程都是矢量形式，它们对任意坐标系都成立，只是对于不同的坐标系，其标量形式是不同的。

四、动量方程

动量方程是牛顿运动第二定律应用于运动流体的数学表达式。对于某瞬时占据空间固定

体积 v 的流体所构成的体系，由牛顿运动第二定律知，体系的动量随时间的变化率等于作用在该体系上所有外力的合力，即

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_v \rho \boldsymbol{V}\mathrm{d}v = \Sigma \boldsymbol{F} \tag{1-12}$$

这就是适用于体系的动量方程，下面将方程(1-12)变换成适用于控制体的形式。

（一）控制体的积分形式动量方程

利用输运公式(1-1)，并令 $\eta = \rho\boldsymbol{V}$、$N = \int_v \rho\boldsymbol{V}\mathrm{d}v$，则(1-12)式可改写为

$$\int_v \frac{\partial(\rho\boldsymbol{V})}{\partial t}\mathrm{d}v + \oint_A \rho\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}) = \Sigma\boldsymbol{F} \tag{1-13}$$

式中，$\Sigma\boldsymbol{F}$ 为作用在控制体上的所有外力的合力，包括质量力（又叫彻体力）和表面力，而表面力又可分为法向力 $\boldsymbol{F}_n$ 和切向力 $\boldsymbol{F}_\tau$。如令 $\boldsymbol{R}$ 为作用在单位质量流体上的质量力，且 $\boldsymbol{R} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$，其中 X、Y、Z 分别是单位质量流体的质量力在 x、y、z 轴上的投影，则作用于控制体内所有流体上质量力的合力为

$$\boldsymbol{F}_b = \int_v \rho\boldsymbol{R}\mathrm{d}v \tag{a}$$

表面力为 $\boldsymbol{F}_s = \boldsymbol{F}_n + \boldsymbol{F}_\tau$。对于理想流体，切向应力为零，因此表面力为

$$\boldsymbol{F}_s = \boldsymbol{F}_n = -\oint_A p\mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{b}$$

负号表示压强方向与表面外法线方向相反。将(a)与(b)式代入(1-13)式，则有

$$\int_v \frac{\partial(\rho\boldsymbol{V})}{\partial t}\mathrm{d}v + \oint_A \rho\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}) = \int_v \rho\boldsymbol{R}\mathrm{d}v - \oint_A p\mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{1-14a}$$

对于直角坐标系，其三个分量形式为

$$\left.\begin{aligned}
\int_v \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial t}\mathrm{d}v + \oint_A \rho V_n V_x\mathrm{d}A &= -\oint_A p\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})\mathrm{d}A + \int_v X\rho\mathrm{d}v \\
\int_v \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial t}\mathrm{d}v + \oint_A \rho V_n V_y\mathrm{d}A &= -\oint_A p\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})\mathrm{d}A + \int_v Y\rho\mathrm{d}v \\
\int_v \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial t}\mathrm{d}v + \oint_A \rho V_n V_z\mathrm{d}A &= -\oint_A p\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})\mathrm{d}A + \int_v Z\rho\mathrm{d}v
\end{aligned}\right\} \tag{1-14b}$$

对于定常流，式(1-14a)变为

$$\oint_A \rho\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}) = \int_v \rho\boldsymbol{R}\mathrm{d}v - \oint_A p\mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{1-15}$$

注意，在应用积分形式的动量方程时，控制面 A 必须是封闭的。

（二）微分形式的动量方程（欧拉运动微分方程）

为了得到理想流体的微分形式的动量方程，可利用高斯散度定理把积分形式的动量方程(1-14a)中的面积分转换成体积分，这时压力项变为

$$-\oint_A p\mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\int_v \nabla p\mathrm{d}v$$

动量通量项变为

$$\begin{aligned}
\oint_A \rho\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}) &= \oint_A (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{V})\rho\boldsymbol{V}\mathrm{d}A \\
&= \int_v [\boldsymbol{V}(\nabla\cdot\rho\boldsymbol{V}) + \rho\boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V}]\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

则(1－14a)式左端变为

$$\int_v \frac{\partial(\rho \boldsymbol{V})}{\partial t}\mathrm{d}v + \int_v \boldsymbol{V}(\nabla \cdot \rho\boldsymbol{V})\mathrm{d}v + \int_v \rho\boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V}\mathrm{d}v$$
$$= \int_v \{\rho(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V}) + \boldsymbol{V}[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})]\}\mathrm{d}v$$
$$= \int_v \rho(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V})\mathrm{d}v$$

代入(1－14a)式,则有

$$\int_v\left[\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V}\right) + \nabla p - \rho\boldsymbol{R}\right]\mathrm{d}v = 0$$

因为 v 是任意取的,且假定被积函数连续,由此可知,被积函数恒为零,即

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R} - \frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1-16a}$$

或

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \boldsymbol{R} - \frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1-16b}$$

这就是理想流体的微分形式的动量方程,又称欧拉运动微分方程。

对于理想气体,可以忽略质量力,$\boldsymbol{R} = 0$,于是有

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1-16c}$$

对于定常流动,从(1－16a)式则有

$$\boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R} - \frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1-16d}$$

上述矢量形式的欧拉运动微分方程也可改写成直角坐标系或其他坐标系中的投影形式。

五、能量方程

能量方程是热力学第一定律应用于流动流体时的数学表达式。对于某瞬间占据空间体积 v 的流体所构成的体系,热力学第一定律可表述如下:单位时间内外界传给体系的热量等于体系所贮存的总能量的增加率加上体系对外界输出的功率,即

$$\frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} + \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} \tag{a}$$

式中,$\frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = \dot{Q}$ —— 单位时间内外界传给体系的热量;

$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t}$ —— 体系所贮存总能量的增加率;

$\frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = \dot{W}$ —— 单位时间内体系对外界所做的功。

体系与外界的热量交换形式有热传导、对流、辐射以及燃烧等,本书不考虑详细的换热过程,因此只以 δQ 代表体系与外界的换热量,并规定外界向体系传热时,δQ 取正值。

体系所贮存的总能量包括内能和动能。以 e 代表单位质量流体的贮存能。

$$e = u + \frac{V^2}{2}$$

式中 u 为单位质量流体的内能。

则整个体系所具有贮存能为

$$E = \int_v \rho\left(u + \frac{V^2}{2}\right)\mathrm{d}v$$

对于确定的体系，体系所具有总贮存能随时间的变化率是一个随流导数，故总贮存能的时间变化率以$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t}$表示，即

$$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_v \rho\left(u + \frac{V^2}{2}\right)\mathrm{d}v \tag{b}$$

体系对外界做功是通过体系克服外力产生运动而完成的。由于外力有质量力和表面力，故体系对外界所做的功也分克服质量力所做的功和克服表面力所做的功两种。规定体系对外界做功取正值，而外界对体系做功取负值。设单位质量流体所受到的质量力为 $\boldsymbol{R}$，则单位时间内作用于体系上的质量力对体系所做的功为

$$-\int_v \rho \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{V}\mathrm{d}v \tag{c}$$

表面力所做的功一般情况下应包括克服作用于表面的法向力所做的功和克服作用于体系表面的剪切力所做的功两部分。现在我们这里所研究的是理想流体，不存在粘性剪切力，因而克服粘性剪切力所做的功为零。因此，表面力所做的功率可以表示成

$$\oint_A p(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{V})\mathrm{d}A = \oint_A \frac{p}{\rho}(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}A \tag{d}$$

积分号前未加负号是因为它是表示体系对外界所做的功，按规定应为正，把(b)、(c)、(d) 式代入(a) 式，则体系的能量方程可以写成

$$\dot{Q} = \int_v \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\rho\left(u + \frac{V^2}{2}\right)\mathrm{d}v - \int_v \rho \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{V}\mathrm{d}v + \oint_A \frac{p}{\rho}(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}A \tag{1-17}$$

(一) 控制体的积分形式能量方程

现在把(1-17) 式转换成适合于控制体的形式。由于在推导体系的能量方程时所取的体系是某瞬间占据固定空间体积 v 的流体，因此当取该空间体积 v 为控制体时，外界向体系传输的热量就等于同一瞬间外界向该控制体内的流体所传输的热量，体系克服外界施加的表面力和质量力所做的功也就是控制体内的流体克服外界所施加的表面力和质量力所做的功。

利用输运公式(1-1)，并令 $N = \int_v \rho\left(u + \frac{V^2}{2}\right)\mathrm{d}v$，$\eta = \rho\left(u + \frac{V^2}{2}\right)$，则(1-17) 式中控制体内流体所贮存的能量随时间的变化率项可以写成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_v \rho\left(u + \frac{V^2}{2}\right)\mathrm{d}v &= \int_v \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(u + \frac{V^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}v \\ &\quad + \oint_A \left(u + \frac{V^2}{2}\right)(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}A\end{aligned}$$

设质量力有势，即 $\boldsymbol{R} = \nabla U$，因此作用于控制体内流体上的质量力在单位时间内所做的功为

$$\begin{aligned}-\int_v \rho \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{V}\mathrm{d}V &= -\int_v \nabla U \cdot \rho \boldsymbol{V}\mathrm{d}V \\ &= -\int_v \nabla \cdot (U\rho \boldsymbol{V})\mathrm{d}v + \int_v U\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V})\mathrm{d}v\end{aligned}$$

将连续方程 $\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 代入上式，并利用高斯散度定理，则有

$$-\int_v \rho \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{V} \mathrm{d}v = -\oint_A U(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}A - \int_v U \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}v$$

假定质量力势函数在固定点处不随时间而变化，即$\frac{\partial U}{\partial t}=0$（一般情况下总是这样的），则上式可改写成

$$-\int_v \rho \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{V} \mathrm{d}v = -\oint_A U(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}A - \int_v \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} \mathrm{d}v$$

把上面所得到的有关关系式代入(1-17)式，整理后得到

$$\dot{Q} = \int_v \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(u + \frac{V^2}{2} - U\right)\right]\mathrm{d}v + \oint_A\left(u + \frac{V^2}{2} - U\right)(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}A + \oint_A p/\rho(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}A$$

把面积分项加以合并，则有

$$\dot{Q} = \int_v \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(u + \frac{V^2}{2} - U\right)\right]\mathrm{d}v + \oint_A\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - U\right)(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}A \qquad (1-18)$$

这就是适用于控制体的积分形式能量方程式。方程式中的面积分项的积分面积 A 是指整个控制表面，如图 1-2 所示，$A = A_1 + A_2$。其中，A_1 是由物体表面所组成。当物体为旋转机械时，

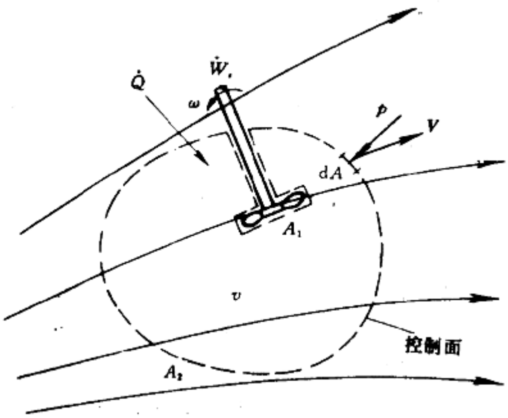

图 1-2

旋转机械与流体之间的功量交换应包括在上述能量方程中的 $\oint_A \frac{p}{\rho}(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}A$ 项内，这时 $\oint_A \frac{p}{\rho}(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}A$ 可以写成

$$\oint_A \frac{p}{\rho}(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}A = \int_{A_1} \frac{p}{\rho}(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}A + \int_{A_2} \frac{p}{\rho}(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}A$$

等式右边第一项代表旋转机械与流体的功量交换，为方便起见，以 $\dot{W}_t$ 表示。等式右边第二项表示控制体内的流体流动克服控制体外的流体作用于控制面上的压强力所做的流动功。因此，可以把(1-18)式改写成

$$\dot{Q} = \int_v \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(u + \frac{V^2}{2} - U\right)\right]\mathrm{d}v + \oint_A\left(u + \frac{V^2}{2} - U\right)(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}A + \int_{A_2} \frac{p}{\rho}(\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}A + \dot{W}_t$$