

知识丛书

国际数学竞赛解题方法

单增 葛军 著



中国少年儿童出版社

(京)新登字084号

责任编辑：陈效师

**当代中学生精品书屋
求知书屋**

*

中国少年儿童出版社出版 发行
张家口市印刷总厂印刷 新华书店经销

*

787×970 1/32 25.875印张 10插页 516千字
1996年9月河北第1版 1996年9月河北第1次印刷
本次印数11,000册 定价33.60元
ISBN 7-5007-3221-X/G·2017
凡有印装问题，可向承印厂调换

内 容 提 要

作者是中国数学奥林匹克教练组组长。他对第一届到第三十届IMO的试题进行了深入的研究和探讨,从总共182道题中,筛选出59道有代表性的问题,进行了分析和总结,使读者可以居高临下一览IMO的试题特点与风貌。

本书充分展示了作者深厚的数学功力和独到的解题才华。全书语言简练、明快、活泼,使人在繁难的数学问题面前心态平静、充满自信。作者巧妙地摘引了诗、歌、名句放在每节之前,使你仿佛在悦耳的古典或现代轻音乐中逐步进入角色。

现代数学的思想方法正在向中学渗透,有志参加IMO的同学、数学爱好者以及数学教育工作者必将从本书中得到有益的启示。

前 言

国际数学奥林匹克 (IMO)，自1959年开始，每年一届，仅1980年中止一次，至1989年已经举行了三十届。

1989年，我国6名中学生在第三十届IMO 中荣获4块金牌、2块银牌，总分居第一位。1990年，第三十一届IMO确定在中国举行。这两件事情对我国的数学竞赛与数学教育是有很重要意义的。

从第一届至第三十届IMO 的试题共182道。对这些试题进行研究和探讨，不仅可以提高我国各级数学竞赛的水平，而且可以从中看到数学竞赛的演进，看到现代数学的思想方法在向中学渗透，因而也就可以看到数学教育发展的正确方向。

我们想做一点初步的工作，着重在两个方面：第一是加强分析，也就是设想自己来解某一道题，应当如何思考，如何找出解法；第二是加强总结，对解法的优劣作一些讲评，对题目的来源与推广作一些讨论。

我们从182道题中选出59道，这些题较有代表性，通过这些题，读者可以了解到IMO 的试题的特点与风貌。

目 录

1	三十年前	(1)
2	路在脚下	(5)
3	以曲求伸	(10)
4	依靠感觉	(15)
5	先分后合	(22)
6	解锁去枷	(26)
7	天上人间	(31)
8	老树新花	(35)
9	等与不等	(43)
10	大胆假设	(54)
11	上下求索	(63)
12	横看侧看	(68)
13	抽屉苹果	(74)
14	子虚乌有	(81)
15	惨淡经营	(85)
16	以巧伏人	(95)
17	数学皇后	(103)
18	后生可畏	(112)
19	再进一步	(116)

1 三十年前

旧时王谢堂前燕，

飞入寻常百姓家。

——刘禹锡：《乌衣巷》

下面是三十年前（1959年），第一届IMO（在罗马尼亚古都布拉索夫举行）的两道试题（编号是原来的编号，括号中的国名是出这道题的国家，以下同此）。

例1 （2，罗马尼亚） x 取什么实数值时，等式

$$(a) \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \sqrt{2},$$

$$(b) \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = 1,$$

$$(c) \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = 2$$

能成立？这里的平方根取非负数。

例2 （3，匈牙利）设 a 、 b 、 c 及 x 为实数，并且 $\cos x$ 满足二次方程

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0. \quad (1)$$

求作一个使 $\cos(2x)$ 能够满足的二次方程。

在 $a=4$ ， $b=2$ ， $c=-1$ 时，比较一下这两个方程。

这两道题平平常常，在现在中学的习题里就能够找到，可见数学竞赛并非高不可攀。当然现在的水平大大地超过了三十年前，但这种类型的题目用作训练，加强基础，还是很有用处的。

虽然题目不难，也还是要谨慎从事，尤其罗马尼亚那道题，很容易出错。

这道题着重考察所谓算术根的概念。题目中的最后一句话“这里的平方根取非负数”，已经泄漏了天机。

此外还需要注意方程左边那个式子的定义域是 $x \geq \frac{1}{2}$ 。在这个定义域中，左式有意义而且取非负值。现在将 (a) 中的方程两边平方，由于

$$\begin{aligned} & \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} \cdot \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} \\ &= \sqrt{x^2 - (2x-1)} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \end{aligned}$$

(算术根)，经过整理后，方程成为

$$2x + 2|x-1| = 2。$$

函数

$$2x + 2|x-1| = \begin{cases} 4x-2, & \text{若 } x > 1; \\ 2, & \text{若 } x \leq 1. \end{cases}$$

所以 (a) 的答案是

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1. \quad (\text{注意定义域!})$$

同样可得 (b) 无解, (c) 的解为 $\frac{3}{2}$ 。

本题的另一种解法需要一点技巧: 将形如 $\sqrt{a+2\sqrt{b}}$ 的式子化简。这只有在 b 可表成两个实数 c, d 之积, 并且 $a=c+d$ 时才是可能的。

$$\begin{aligned}\text{例如 } \sqrt{5+2\sqrt{6}} &= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{3},\end{aligned}$$

其中 $b=6=2\times 3$, $a=5=2+3$ 。

现在先在 (a) 中, 使方程两边同乘 $\sqrt{2}$, 得

$$\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}} = 2。$$

这样 $\sqrt{2x-1}$ 前面有一因数 2, $2x-1=(2x-1)\cdot 1$, $2x=(2x-1)+1$, 所以

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}} &= \sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2} \\ &= \sqrt{2x-1} + 1.\end{aligned}$$

同样 (但请注意算术根)

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}} &= \sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2} \\ &= \left| \sqrt{2x-1}-1 \right| = \begin{cases} \sqrt{2x-1}-1, & \text{若 } x>1; \\ 1-\sqrt{2x-1}, & \text{若 } \frac{1}{2}\leq x\leq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

从而不难得出与前面相同的结果。

另一道题当然要用二倍角公式

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1。$$

即

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}。 \quad (1)$$

这样，方程

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

中的 $\cos^2 x$ 已经能用 $\cos 2x$ 的多项式代替。为了处理 $b \cos x$ 中的 $\cos x$ ，最好是先将它变成 $\cos^2 x$ 。为此，移项，得

$$a \cos^2 x + c = -b \cos x。$$

平方，得

$$(a \cos^2 x + c)^2 = b^2 \cos^2 x，$$

然后再用(1)式代入，经过化简，得

$$a^2 \cos^2 2x + 2(a^2 + 2ac - b^2) \cos 2x + (a + 2c)^2 - 2b^2 = 0。$$

这就是所求的方程（用这个方法，可以从 X 满足的方程导出一个 X^2 满足的方程。只需先将奇次项移到方程的一边，然后再平方）。

在 $a=4$ ， $b=2$ ， $c=-1$ 时，新方程与原方程相同（这时 $\cos x$ 与 $\cos 2x$ 是同一个二次方程的根。容易算出 $x = 2k\pi \pm \frac{2}{5}\pi$ ， k 为整数）。

“做学问当于无疑处有疑。”一道题做完以后，往往可以提出一些新的问题。例如在这里我们可以问：

当 a 、 b 、 c 为哪些值时，新方程与原方程相同？

答案是 $a:b:c = 4:2:(-1)$ ， $1:(-2):1$ 或 $(-2):1:1$ 。

2 路在脚下

敢问路在何方？

路在脚下。

——电视剧《西游记》插曲

近年的竞赛题是不是特别难呢？

并不是这样。

如果说“今非昔比”的话，今天的竞赛题着重在自己去找路，不像过去的题，往往有成熟的套路。这就更富于竞争性，更需要发挥你的创造力，更有利于发展你的个性。

路，并不一定非常难找。往往就在脚下，只是需要你低头去看，去观察，去发现。

请看第三十届（1989年）的一道题：

例 （1，菲律宾）求证：集合 $\{1, 2, \dots, 1989\}$ 可以分为117个互不相交的子集 $A_i (i = 1, 2, \dots, 117)$ ，使得

- （1）每个 A_i 含有17个元素；
- （2）每个 A_i 中各元素之和相同。

原始的问题是分为17个互不相交的子集。选题的委员会认为太容易了，将17改成117。其实“换汤不换药”，本质并无变化。

要证明“可以分为……，使得……”，最有效的方法就是构造法，即把符合要求的一种分法具体切实地写出来。

“登高必自卑，行远必自迩”。1989太大了，117太多了。我们先用小一些的数作试验品。例如将 $\{1, 2, \dots, 10\}$ 分为5个具有类似性质的子集，能不能办到？（选题的人将题越改越难，我们正好反其道而行之。）

这个问题应该说是非常容易的，略一尝试就可得出一个答案，我们把它写成二行五列的表

1	2	3	3	5
10	9	8	7	6

每一列是一个子集，共有5个子集，每个子集两个元素。各子集互不相交，而且每相邻两列的元素之和相等（因为上一行右面的元素多1，而下一行右面的元素少1），所以各子集元素的和相同。

从这里向前推进一步：将 $\{1, 2, \dots, 20\}$ 分为5个具有类似性质的子集也不困难，例如表

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16

就代表一种分法（并不是唯一的分法），其中每一列代表子集。这个表可以更简单地写成

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

5	4	3	2	1	(本行各数应加5)
1	2	3	4	5	(本行各数应加 2×5)
5	4	3	2	1	(本行各数应加 3×5)

使它的本质显露得更加清楚。

连续的20个整数（不限定为1~20）也可以这样处理，因为同一行的每个数都加上一个相同的数后，各列的和仍然相等。

当各子集的元数 n 是偶数时，上面的方法足以解决问题。现在考虑各子集的元数 n 是奇数的情况。先考虑最简单的情况：如何将 $\{1, 2, \dots, 15\}$ 分为5个子集（ $n=3$ ），具有上面所述的性质？

采用三行五列的表，第一行仍照顺序从左到右写下1至5。第二行的1至5（实际上是 $1+5$ 至 $5+5$ ）不能按照顺序从右到左写了（否则每列前两行的和相等，第三行无论怎么写也无法使各列的和相等）。

怎样写第二行，可以说是问题的关键。

这也许需要尝试好多次才能成功。不过，如果你希望有不很复杂的规律（不是杂乱无章），并且与原来的做法差别不太大的话，那么最好是（可能是事后诸葛的总结）：1仍旧写在最右面，2则与1隔一格，3再与2隔一格，4又与3隔一格（即转回到第2列），5与4隔一格，得到

1	2	3	4	5	
3	5	2	4	1	(本行各数应加5)
5	2	4	1	3	(本行各数应加 2×5)

表中第三行，即将第二行左移一格。这时每相

邻两列有一个数相同(撇去应加的5的倍数),另两个数的和相等,因而各列的和均相等。

原来的问题已经不难解决了。我们可以列出17行117列的表:

每两行与后两行相同	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	59	117	58	116	57	……	3	61	2	60	1	117	58	116	57	115	……	61	2	60	1	59
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	……	113	114	115	116	117	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1	117	116	115	114	113	……	5	4	3	2	1

(表中第 j 行各数应加上 $(j-1) \times 117$, $j=1, 2, \dots, 17$ 。)

表中每一列是一个子集,不难看出这些子集满

足要求。

选题委员会还考虑了问题的另一种变形：

“设 $M = \{1, 2, \dots, n\}$ ，若 M 可以表示为 m 个的互不相交的子集 A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 的并集，使得

(i) 每个 A_i 的元数相同；

(ii) 对 $i = 1, 2, \dots, m$ ， A_i 中所有元素的和相等。

求 m 所应满足的充分必要条件。”

我们设 A_i 的元数为 l ，则 $lm = n$ 。由前面的讨论，不难得出在 l 为偶数或者 l 为大于 1 的奇数并且 m 为奇数时， M 均可以表示为 m 个具有所述的子集的并。

在 l 为奇数、 m 为偶数时，由于

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

所以各子集的元素和应为 $\frac{n(n+1)}{2m} = \frac{l(n+1)}{2}$ ，

但 n 为偶数， l 、 $n+1$ 都是奇数， $\frac{l(n+1)}{2}$ 不是整

数，矛盾！即合乎要求的分法并不存在。

于是 m 所应满足的充分必要条件是：

“ $\frac{n}{m}$ 是整数，大于 1 并且在 $\frac{n}{m}$ 为奇数时， m 也是奇数。”

3 以曲求伸

尺蠖之曲，

为求伸也。

——《周易·系辞下》

上一节，我们先退到比较简单的情况，找出规律，然后再进到较为复杂，较为一般的情况。这种以曲求伸，欲进先退的方法，在数学中常常用到。我国著名数学家华罗庚先生就曾经指出：“善于‘退’，足够地‘退’，‘退’到最原始而不失去重要性的地方，是学好数学的一个诀窍！”

例 （29届4，爱尔兰）证明不等式

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4} \quad (1)$$

的解集是总长为1988的一些不相交的区间的并集。

我们先退到最简单的情况，即（1）的左边只有一项或两项。只有一项的情况是

$$\frac{1}{x-1} \geq \frac{5}{4} \quad (2)$$

这个不等式的左边必须是正数，所以

$$x > 1. \quad (3)$$

在（3）的限制下（2）可化成

$$\frac{4}{5} \geq x-1。$$

于是，(2) 的解为

$$\frac{4}{5} + 1 \geq x > 1。 \quad (4)$$

解集是一个长为 $\frac{4}{5}$ 的区间（一端开，一端闭）。

只有两项的情况是

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} \geq \frac{5}{4}。 \quad (5)$$

在 $(x-1)(x-2) \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0$ 时，(5) 可化为

$$(x-2) + 2(x-1) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \frac{5}{4}(x-1)(x-2)。$$

即

$$\begin{aligned} & -(x-1)(x-2) \\ & + \frac{4}{5} \left((x-2) + 2(x-1) \right) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0。 \end{aligned} \quad (6)$$

(6) 是一个二次不等式，当然并不难解。但我们的目的并不是解这个不等式，而是要求出 (5) 的解集的总长。更重要的是，我们希望能通过这些特殊情况的讨论，发现普遍的规律。所以 (6) 式左边没有进行化简，我们特别小心翼翼，唯恐这种化简会使可以发现的规律变得模糊不清。

这里需要打消一个顾虑：“不解(6)怎么能求出(5)的解集的长呢？”事实上，这是能够做到的。我们现在就来做这件事。

利用一下二次函数的图象（解二次不等式时常利用图象）。函数 $y = (x-1)(x-2)$ 是一条开口向上的抛物线，与 x 轴相交于 $(1,0)$ 、 $(2,0)$ 两点。函

$$数y = -(x-1)(x-2) + \frac{4}{5} \left((x-2) + 2(x-1) \right)$$

也是一条抛物线，开口向下。

不难算出，在 $x=1$ 时， $y = -(x-1)(x-2) + \frac{4}{5} \left((x-2) + 2(x-1) \right)$ 的值是负的；在 $x=2$ 时，值是正的。因此函数的图象与 x 轴有一个交点 $(x_1, 0)$ ， $1 < x_1 < 2$ 。并且由于图象是开口向下的抛物线，它与 x 轴还有一个交点 $(x_2, 0)$ ， $2 < x_2$ 。

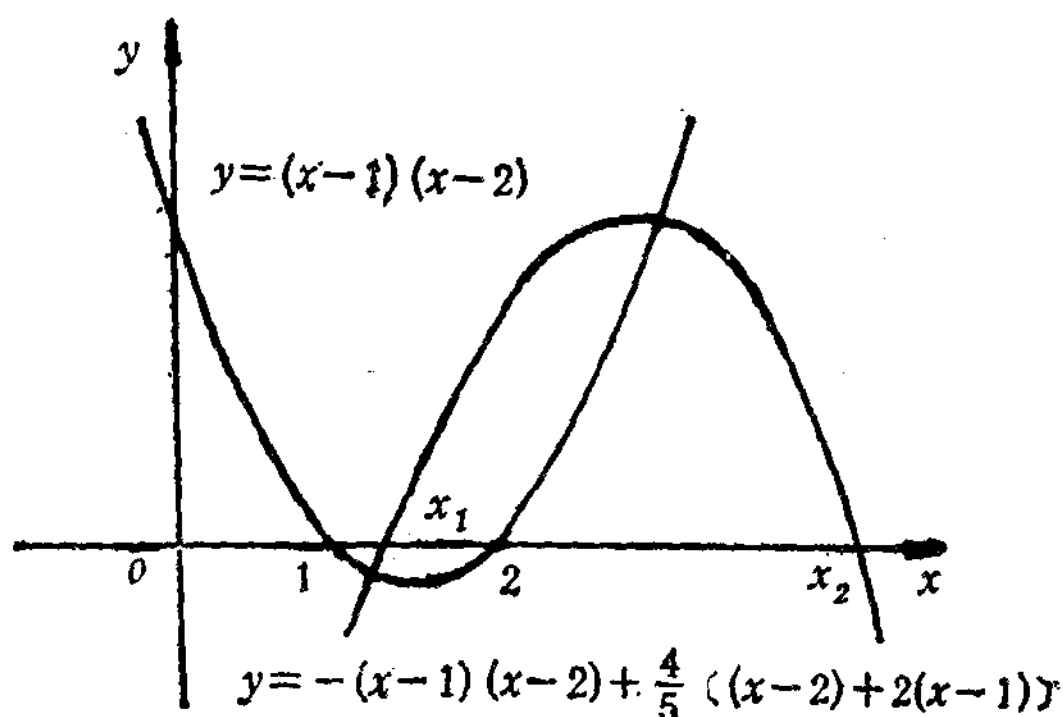


图 1