

高等学校教学参考书

结 构 力 学

第三版[增订本]

第 二 册

金宝桢(主编) 杨式德 朱宝华 合编
朱宝华 主订

高等教育出版社

高等学校教学参考书

结 构 力 学

第三版[增订本]

第 二 册

金宝桢(主编) 杨式德 朱宝华 合编
朱宝华 主订

高等教育出版社

第二册 目录

第十一章 超静定结构的一般概念1	§ 13-6 对称性的利用102
§ 11-1 超静定结构的类型及其应用1	* § 13-7 温度改变和支座移动时的计算105
§ 11-2 超静定次数及其确定4	§ 13-8 变截面杆件的转角位移方程和弯 曲常数109
§ 11-3 超静定结构的特性6	§ 13-9 用混合法计算刚架113
§ 11-4 超静定结构计算方法的分类7	第十四章 用渐近法计算超静定结构119
第十二章 用力法计算超静定结构10	§ 14-1 力矩分配法的基本概念、分配系数 及传递系数119
§ 12-1 力法的基本概念10	§ 14-2 用力矩分配法计算连续梁123
§ 12-2 超静定平面刚架在荷载作用下的 计算13	§ 14-3 力矩分配法的核验126
§ 12-3 超静定平面刚架在温度改变及支 座移动作用下的计算17	§ 14-4 用机动法作连续梁的影响线127
§ 12-4 超静定结构的位移20	§ 14-5 连续梁的内力包络图132
§ 12-5 超静定平面刚架计算的校核23	§ 14-6 用力矩分配法计算无结点线位移 的刚架133
§ 12-6 超静定平面刚架计算的简化26	§ 14-7 用力矩分配法计算有结点线位移 的刚架135
§ 12-7 三弯矩方程32	§ 14-8 剪力分配法141
* § 12-8 五弯矩方程41	§ 14-9 迭代法的基本原理146
* § 12-9 交叉梁系的计算45	§ 14-10 用迭代法计算有结点线位移的 多层刚架148
§ 12-10 用力法计算超静定桁架53	第十五章 矩阵位移法160
§ 12-11 超静定组合体系58	§ 15-1 引言160
§ 12-12 二铰拱的计算方法60	§ 15-2 结构的离散化及杆端位移、杆端力 的表示方法160
§ 12-13 抛物线二铰拱63	§ 15-3 按单元坐标系的单元刚度方程和 单元刚度矩阵162
§ 12-14 无铰拱在荷载作用下的计算66	§ 15-4 按结构坐标系的单元刚度方程和 单元刚度矩阵(坐标变换)170
§ 12-15 无铰拱的其他计算问题72	§ 15-5 矩阵位移法之一——先处理法175
第十三章 用位移法计算超静定结构78	§ 15-6 非结点荷载的处理185
§ 13-1 位移法的基本概念78	§ 15-7 矩阵位移法之二——后处理法187
§ 13-2 刚架结点位移数目的确定78	
§ 13-3 等截面杆件的转角位移方程80	
§ 13-4 应用基本体系及典型方程计算超 静定结构85	
§ 13-5 应用结点及截面平衡方程计算超 静定结构93	

第十一章 超静定结构的一般概念

§ 11-1. 超静定结构的类型及其应用

超静定结构的类型很多,其应用亦广。超静定的刚架、排架、拱、桁架以及连续梁等都是超静定结构的主要形式。

连续梁常用于钢筋混凝土房屋的构造中;同时,由于它比较经济与坚固,连续梁亦常作为桥梁的主要承重构件。例如,武汉的汉水公路桥的两端引桥,都是等跨的钢筋混凝土连续梁。

图 11-1 示桂林净瓶山漓江大桥,总长为 276 米,共有五跨,其中有每跨为 60 米的三跨连续梁。连续梁的中间支座可以是弹性的,也可以是刚性的。例如,在梁格式楼盖构造中,主梁就是次梁的弹性支座;在桥梁建筑中,除细长墩座应作为弹性支座外,通常的桥墩则可视作刚性支座。

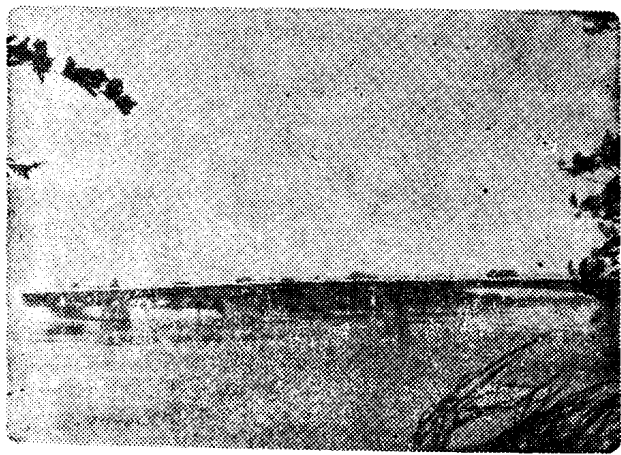


图 11-1

刚架一般是用钢筋混凝土或钢材造成的。在工业与民用建筑、桥梁、飞机、造船等工程中,刚架的应用极广。图 11-2, *a* 示上海体育学院运动房的一角,其中承重结构为钢筋混凝土梁柱组成的连续跨刚架。图 11-2, *b* 示上海石化总厂腈纶厂毛条车间的单层厂房,它是钢筋混凝土的连续跨斜梁式刚架。图 11-3 示单层厂房排架(一种特殊的刚架)正在施工的情况。刚架可分为平面刚架与空间刚架两种。实际的刚架多为空间刚架;但为了便于计算,有许多空间刚架常分解为平面刚架进行计算。

在图 11-4 中,图 *a* 示一多跨多层民用房屋刚架的计算简图,其中所有结点都是刚结点;图 *b* 示一单层多跨厂房刚架的计算简图,其中只有结点 *A* 是刚结点;图 *c* 示一单跨多层刚架的计算简

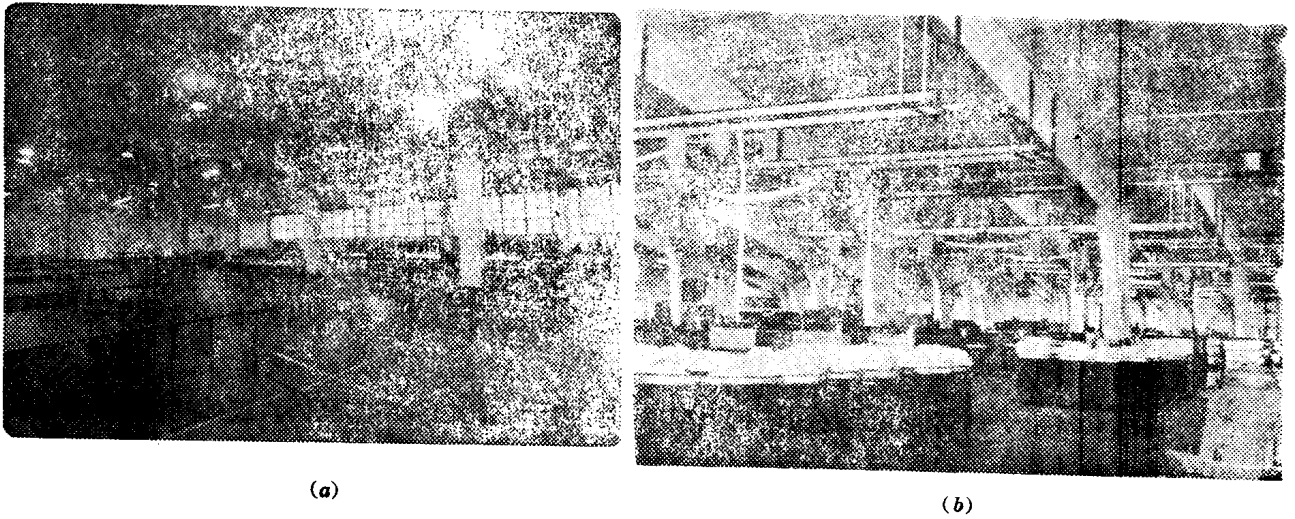


图 11-2

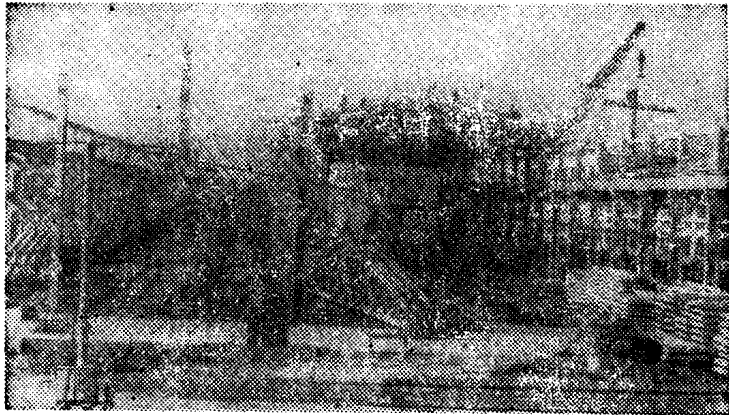


图 11-3

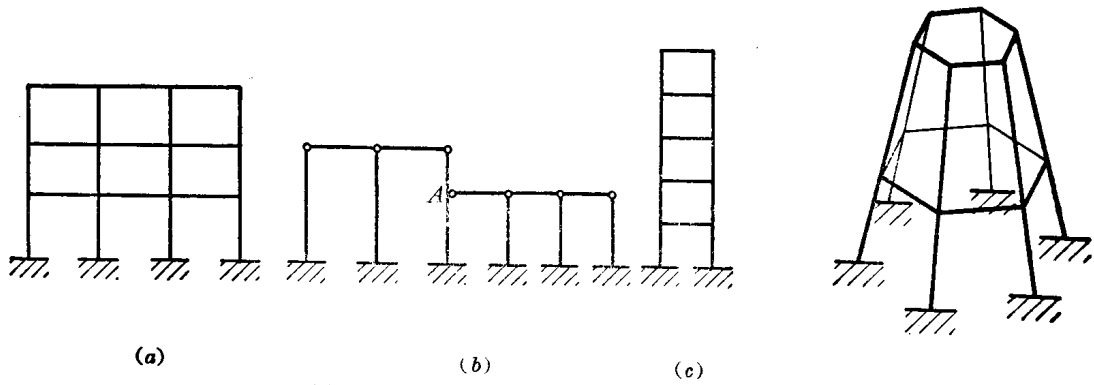


图 11-4

图 11-5

图,这种刚架用于粮仓及其他塔形建筑中。所有这些都是平面刚架;图 11-5 所示的水塔塔架是空间刚架的一个例子。

刚架有几个显著特点。首先,刚结点容易建造。现浇的钢筋混凝土结构的结点都可以作为

刚结点,因此钢筋混凝土刚架应用特别多。其次,由于刚结点的存在,在刚架内为保证几何不变性所需用的杆数较桁架为少。因此,刚架内部的空间较大,便于使用。此外,因为刚架各部分连续成为一体,在荷载作用下内力较小,所以使用材料也较为经济。

超静定拱与三铰拱相似,主要受轴向压力作用,故常用抗压强而抗拉弱的材料(如砖、石、混凝土等)建成。常用的超静定拱有两种形式:二铰拱和无铰拱。

二铰拱用于大跨度房屋及桥梁建筑,其常用的高跨比 f/l 由 1 至 $\frac{1}{10}$ (图 11-6, a)。使用拉杆的二铰拱(图 11-6, b),只产生竖向反力,因而可以支承于砖墙上或柱上。拉杆过长时,常加用吊杆(图 11-6, c)。

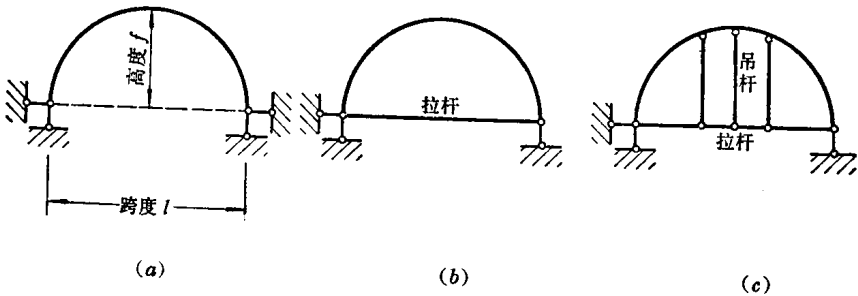


图 11-6

无铰拱(图 11-7)的应用范围很广。房屋建筑中门窗洞口上面常用砖石砌成拱形(图 11-8)。无铰拱在大跨屋盖建筑中也有应用。如上海工业展览馆工业大厅中的拱结构。无铰拱在桥梁建筑中应用也很多。如河南山西交界处正桥跨度为 88 米的丹河大桥。



图 11-7

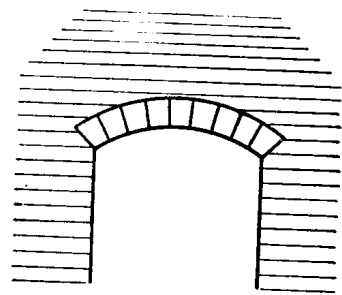


图 11-8

直至十九世纪中叶,拱一向被认为由一系列刚性楔块互相压挤而成平衡。设计无铰拱时,只要使压力曲线通过三个截面中的指定点即可认为满意。1848 年布莱斯(Bresse)首先应用弹性杆件理论对拱进行分析。1882 年高洛温(X. C. Голловин)又应用弹性理论计算拱结构,并指出用结构力学的计算方法误差不大。近年来实验研究的结果也证明了这一点。

超静定桁架从造成超静定的原因来说,可分为以下三种:第一种为外部超静定,即桁架只具有多余支杆而其本身并无多余杆件(图 11-9, a);第二种为内部超静定,即桁架本身具有多余杆件而并无多余支杆(图 11-9, b);第三种为内部及外部都是超静定,即桁架不仅具有多余杆件而且具有多余支杆(图 11-9, c)。当跨度相同并承受同样荷载时,超静定桁架的刚度一般比静定

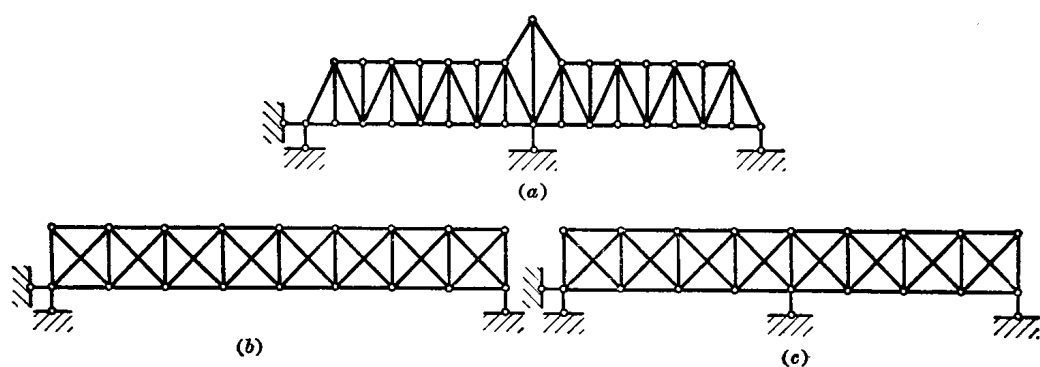


图 11-9

桁架为大。因近代桁架结构多为铆接或焊接，桁架各杆件之间在相当程度上形成一个整体，这就保证桁架可以承受更大的荷载。此外，超静定桁架具有一般超静定结构的特性，我们可通过桁架杆件长度的改变或其支座水平的升降调整其杆件内力，使所用的杆件材料更加经济。由于以上的原因，超静定桁架也被广泛应用。在不少大型工业与民用建筑中或桥梁建筑中都采用多跨的连续桁架。例如，武汉长江大桥的正桥部分就是由三个三跨连续桁架所组成，其中一个三跨连续桁架的计算简图如图 11-10 所示。为了更好地发挥材料的承载能力和减轻结构自重，在不少大跨度建筑中还常采用超静定拱式桁架，以代替实体拱。

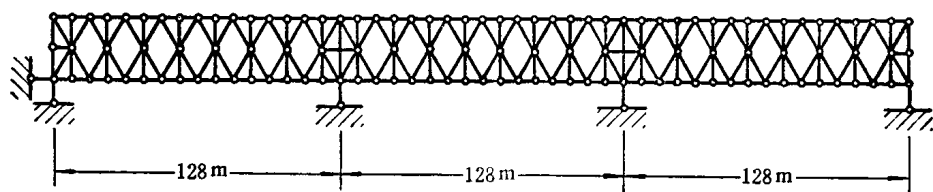


图 11-10

以上是超静定结构的几种主要形式及其应用。在钢桥建筑中，为使桥面系中的横梁得到比较合理的布置，有时采用一种所谓桁梁混合结构(图 11-11)。在这种结构中，直接承受荷载的部分是一具有较大横截面的梁件，它不仅能承受轴力而且能承受弯矩。

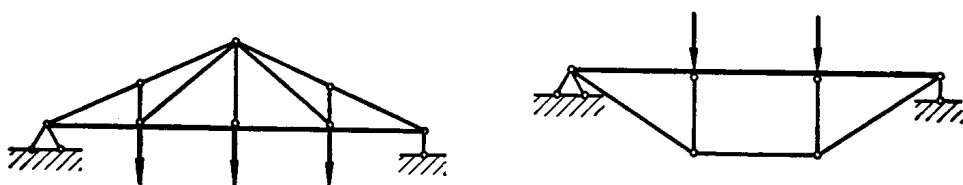


图 11-11

§ 11-2. 超静定次数及其确定

超静定结构与静定结构的基本区别在于，除了形成静定结构所必需的约束以外，超静定结构还存在着多余约束。这种多余约束可以完全是结构本身以外的支杆，也可以完全是结构内部的

杆件,又可以是二者兼有的。在这里,我们应当明确多余约束和必要约束的概念。前者是在保持结构几何不变性的前提下可以除去的约束,后者是为了保持结构几何不变性所必须保留的约束。例如在图 11-12 所示桁架中,左边节间内的任一杆件(如 AB 、 BC 、 CF 、 FA 、 CA 或 BF)都可以作为多余约束;同时,任一支杆和右边节间内的任一杆件都是必要约束。

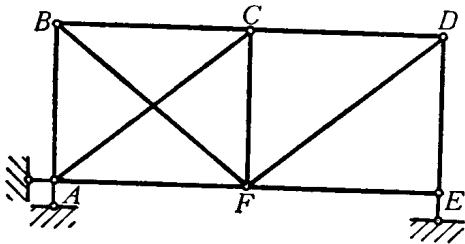


图 11-12

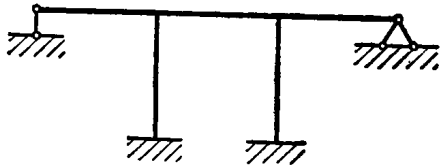


图 11-13

一个超静定结构的多余约束数称为这个结构的多余量或超静定次数。假如一结构的多余量为 n , 则称此结构为 n 次超静定。

对一内部可变量为零而外部为超静定的平面结构, 我们可用观察法直接求出它的超静定次数 n 。在此情况下, 计算超静定次数的公式为

$$n = r - 3 \tag{11-1}$$

其中 r 为此结构的支杆总数。例如, 对图 11-9, a 所示桁架, 其超静定次数为 $n = 4 - 3 = 1$; 对图 11-13 所示刚架, 其超静定次数为 $n = 9 - 3 = 6$ 。

对多跨超静定梁来说, 假如其中有 h 个铰, 则其内部可变量为 h ; 因每一个铰可以提供一静力平衡方程, 故此梁的超静定次数为

$$n = r - 3 - h \tag{11-2}$$

对于一般超静定平面刚架, 其超静定次数可用第三章的公式(3-1)求之如下:

$$n = -W = r + 2h - 3m \tag{11-3}$$

其中 h 为连接各杆件的简单铰数, m 为杆件数。例如, 对图 11-14 所示刚架, 因 $r = 8$, $h = 2$, $m = 3$,

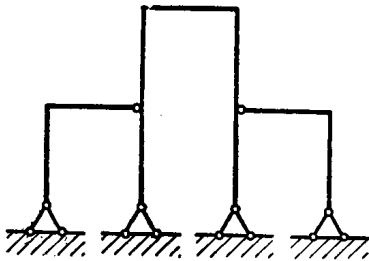
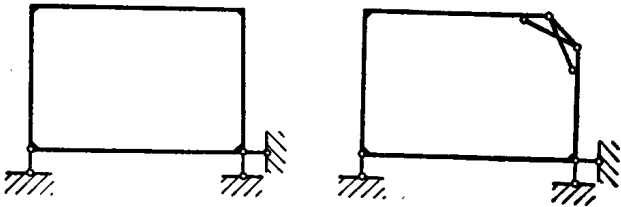


图 11-14



(a)

(b)

图 11-15

故

$$n = 8 + 2 \times 2 - 3 \times 3 = 3$$

必须注意, 公式(11-3)只适用于这种情况, 即在刚架的所有杆件中没有一个杆件具有多余约束。因一环形刚架(图 11-15, a)实际上相当于中间具有三根链杆的刚架(图 11-15, b), 故在此情

况下得

$$m=1+3=4, \quad r=3, \quad h=6$$

$$n=3+2 \times 6-3 \times 4=3$$

由此可见,一个闭合或环路图形的杆件具有三个多余约束,其本身的超静定次数等于3。

实际上,具有一个或多个环形的刚架是常见的。例如在图 11-16 中,图 *a* 示一斜柱排架;图 *b* 示一空腹桁架;图 *c* 示一二层框架。计算这些刚架的超静定次数时,除考虑支杆的多余量外,只要再加上 3 乘以刚架中互不重叠的环数即得。因此,斜柱排架的 $n=3+3 \times 1=6$;空腹桁架的 $n=0+3 \times 3=9$;二层框架的 $n=2 \times 3+3 \times 2=12$ 。

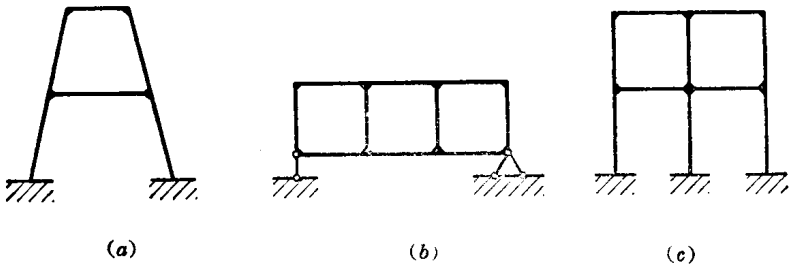


图 11-16

对超静定平面桁架,其超静定次数用下列公式计算较为简便:

$$n=b+r-2j \tag{11-4}$$

其中 b 为桁架的杆件数, r 为其支杆数, j 为其结点数。例如在图 11-14 中, $b=10$, $r=3$, $j=6$, 故得

$$n=10+3-2 \times 6=1$$

§ 11-3. 超静定结构的特性

超静定结构的特性及其与静定结构的比较可叙述如下:

(1) 结构成为超静定的必要和充分条件是结构具有几何不变性和多余约束。我们知道,静定结构是几何不变的,但无多余约束。设有一几何不变且有多余约束的结构,在已知荷载作用下处于平衡。如果除去它的多余约束而使它变成静定,并将被除去的约束中的内力 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 当作外荷载看待,则这些力和已知外荷载将组成对静定结构作用的整个外荷载。这样,不管 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的数值如何,此结构在所有外荷载作用下必须维持平衡。我们只用平衡条件不能求出 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 等力的数值,故原有结构是超静定结构。

应当指出,在超静定结构中并非所有内力都是超静定的,因为所有必要约束的内力都是静定的。例如在图 11-12 中,各支座反力以及 CD, DE, EF, CE 等杆的内力都是静定的。

(2) 单就满足平衡条件来说,超静定结构可容许有无限多个可能解答。我们知道,一个处于已知外力作用下的静定结构却不是这样,它只有一个适合整个结构及其个别部分平衡条件的可能解答。

(3) 当无外荷载作用时,超静定结构有产生内力的可能性。我们知道,温度改变、支座沉陷、杆长误差和材料收缩等因素都不会在静定结构中产生内力;但对于超静定结构则会产生内力。例如在图 11-17 中,图 a 示一连续梁;图 b 及图 c 各示此梁由于中间支座的沉陷所产生的挠度图及弯矩图。

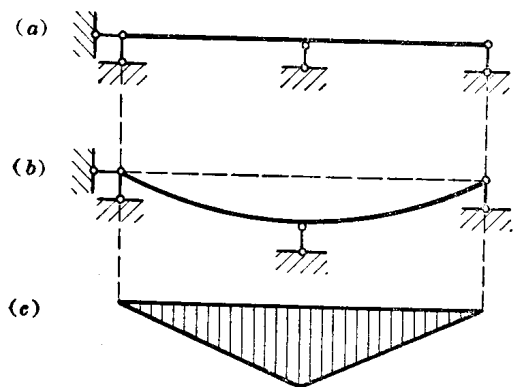


图 11-17

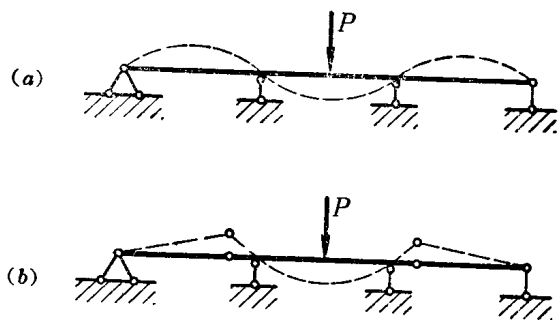


图 11-18

无外荷载时结构的内力称为原始内力或初内力。由上可知,超静定结构是会有原始内力的,但静定结构则不会有原始内力。

(4) 局部荷载对结构的影响范围,在超静定结构中比在静定结构中为大。例如在图 11-18, a 中,当荷载 P 作用于三跨连续梁的中跨时,其两边跨内也产生内力。但在图 11-18, b 所示静定梁中,当 P 作用于中跨时,其两边跨只随之转动而不产生内力。因此,就所有各杆件的内力分配情况来说,超静定结构总比静定结构来得均匀些。

(5) 对于可能发生的破坏,超静定结构要比静定结构具有较强的防御能力。对一具有多余约束的结构,即使它丧失了这些多余约束,它仍可保持其几何不变性。但对一静定结构,一旦它丧失了任何一个约束,它就全部遭致破坏。这两种结构之间的这种差别是有实际意义的。

(6) 超静定结构中各杆件的内力与杆件截面的尺寸有关,而且一般来说还与杆件材料的弹性模量有关。我们知道,静定结构的内力与杆件截面的尺寸和杆件材料的弹性模量完全无关。超静定结构的内力只有在这样的特殊情况下才与材料的弹性模量无关,即整个结构的材料有相同的弹性模量,同时此结构只是处于荷载作用之下。

超静定结构在计算方面的特点是:由于计算时须用到杆件截面尺寸,所以应当先用较简单的方法估算各杆件的截面。如根据算出的内力所选定的截面和以前估算截面相差较大时,即应当重新估算截面进行复算,直到得出相当满意的结果为止。因此,当计算超静定结构时,常需要进行不止一次的计算。

§ 11-4. 超静定结构计算方法的分类

在结构力学中,超静定结构的计算问题就是根据结构的已知几何图形、所受荷载及其各杆件的给定截面,通过一定的计算方法求出此结构的内力和形变。

由于近若干年来结构静力学的不断发展,超静定结构的计算方法不胜枚举。总的说来,可分为以下两大类:

- (1) 属于解联立方程的方法;
- (2) 属于迭次修正的渐近解法。

上述第一类的计算方法是很多的,但其各种解法的主要区别一般在于基本未知量的选择。所谓基本未知量,就是首先要求出的未知量;一旦求出这些基本未知量,则所有其他的未知量即可迎刃而解。取基本未知量的方式一般有以下三种:第一,我们可取多余约束的内力或反力当作基本未知量,在此情况下所采取的解法称为“力法”。第二,我们亦可取结构中的位移(即结点的线位移与角位移)当作基本未知量,在此情况下所采取的解法称为形变法或位移法。第三,如果在所选择的基本未知量中有一部分是多余约束的内力,而另一部分是结点的线位移和角位移,则在此情况下所采取的解法称为混合法。应当指出,力法和位移法是分析超静定结构的两个一般性的方法,读者必须深入理解和巩固地掌握,才便于学习其他的计算方法。

上述第二类的计算方法有着各种不同的运用方式,本书准备论述其中比较重要的三种方法:一般力矩分配法(简称为力矩分配法)、剪力分配法和迭代法(即连续代入法)。力矩分配法主要适用于连续梁和简单刚架(如无线位移或有线位移的单层单跨或单层多跨刚架及两层单跨刚架);剪力分配法主要适用于排架和不产生结点转角的刚架;迭代法主要适用于复杂刚架,特别是具有线位移的多层多跨刚架。

习 题

习题 11-1. 求图 11-19 中所示各刚架的超静定次数。

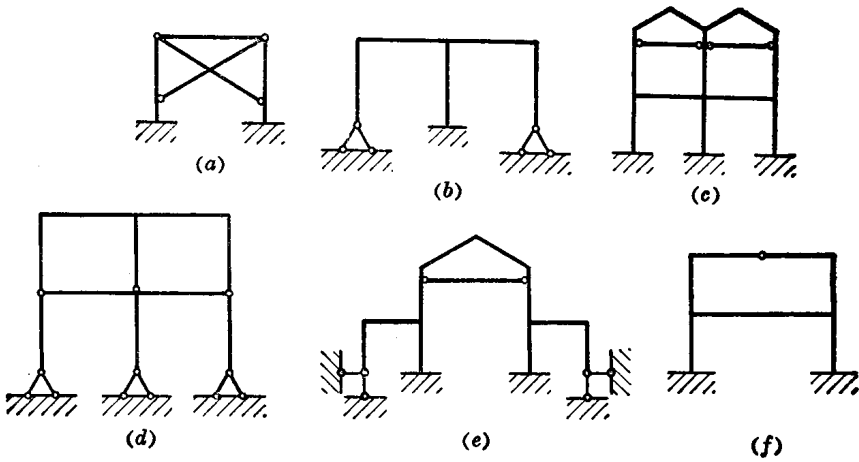


图 11-19

习题 11-2. 求图 11-20 中所示各桁架的超静定次数。

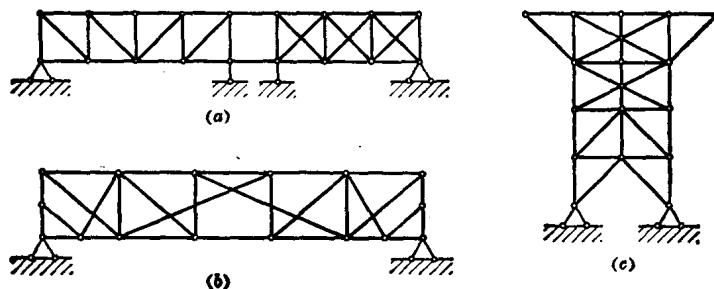


图 11-20

习题 11-3. 求图 11-10 中所示武汉长江大桥中三跨连续桁架的超静定次数。

习题部分答案

习题 11-1. (a) 3 次, (b) 4 次, (c) 14 次, (d) 4 次, (e) 8 次, (f) 5 次。

习题 11-2. (a) 5 次, (b) 2 次, (c) 5 次。

习题 11-3. 内部 5 次, 外部 2 次, 共 7 次。

第十二章 用力法计算超静定结构

§ 12-1. 力法的基本概念

本章讨论用力法计算超静定结构的问题。力法在超静定结构的各种计算方法中使用最早，其应用的范围也最广。我们首先说明力法的原理，然后详细讨论应用这些原理计算平面刚架、桁架、混合体系及拱等各种超静定结构的方法和步骤。在本章中，各种超静定结构都假设是线性变形体系，因此叠加原理可以直接应用。

在力法中，首先求出的未知量(即基本未知量)常是所有多余约束的内力，简称为多余未知力。因此，基本未知量的数目等于多余约束的数目，亦即等于结构的超静定次数。

在前一章中，已经给出各种超静定结构的多余约束数的计算公式。这里，我们只指出确定多余约束数的一般规则：如果从结构中撤去 n 个约束以后得到一个静定结构，则原结构就有 n 个多余约束。例如图 12-1, a 所示刚架有 4 个多余约束，因为撤去 4 个约束后(图 12-1, b)，结构即成为静定的。



图 12-1

在力法的计算过程中，我们为简便起见总是使用基本体系代替原来的超静定结构。我们在实用中常选用静定的基本体系。如果从原来的超静定结构中撤去其多余约束而代以未知力(即多余未知力)，则所得到的静定体系称为力法的基本体系。

例如在图 12-2 中，图 a 示一具有 3 个多余约束的超静定刚架；图 b 示此刚架的一个基本体系，其中撤去 B 点原有的固定支座而用 3 个未知反力 X_1 、 X_2 、 X_3 来代替；图 c 示此刚架的另一个基本体系。这里必须注意，虽然可以选取不同的基本体系，但基本体系应该是静定的(无多余约束而且是几何不变的)。图 12-2, d 所示的体系是瞬时可变的(因三支杆交于 A 点)，因此它不能用作原来刚架的基本体系。

使用静定的基本体系是为了计算的方便，但并非是绝对必要的。我们也可以选用超静定的基本体系，即在原来结构中撤去一部分多余约束而代以未知力这样所得到的体系。在本章下面的讨论中，我们只使用静定的基本体系。

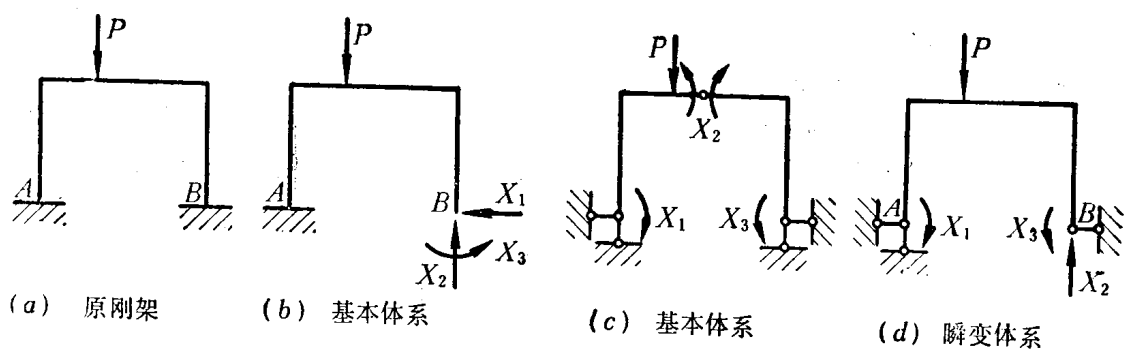


图 12-2

选定基本体系以后，我们就面临力法中的核心问题：如何确定基本体系中多余未知力的数值，使它们与原来结构中相应的约束内力相等。以图 12-2, b 为例，当确定 X_1 、 X_2 、 X_3 多余未知力的数值时，必须满足的形变条件是使基本体系中 B 点的水平位移、竖向位移和转角都等于零，以符合原来刚架中 B 点的实际情况。换句话说，我们应使基本体系在 X_1 、 X_2 和 X_3 各方向的总位移各与原来刚架中这些方向的位移相同。

我们用 δ 表示单位力产生的位移，一般的位移则以 Δ 表示。位移的符号下面常加两个脚标：第一脚标表示位移的位置和方向，第二脚标表示产生位移的原因。例如

δ_{11} ——由于 $X_1=1$ 在 X_1 方向产生的位移；

δ_{12} ——由于 $X_2=1$ 在 X_1 方向产生的位移；

δ_{13} ——由于 $X_3=1$ 在 X_1 方向产生的位移；

Δ_{1P} ——由于荷载在 X_1 方向产生的位移。

这样，基本体系在多余未知力 X_1 、 X_2 、 X_3 和荷载的共同作用下在 X_1 方向产生的总位移为

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P}$$

同理，符号 δ_{21} 、 δ_{22} 、 δ_{23} 各表示单位力 $X_1=1$ 、 $X_2=1$ 、 $X_3=1$ 在 X_2 方向产生的位移，而 Δ_{2P} 表示荷载在 X_2 方向产生的位移。基本体系在 X_2 方向的总位移为

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P}$$

又符号 δ_{31} 、 δ_{32} 、 δ_{33} 各表示单位力 $X_1=1$ 、 $X_2=1$ 、 $X_3=1$ 在 X_3 方向产生的位移，而 Δ_{3P} 表示荷载在 X_3 方向产生的位移。基本体系在 X_3 方向的总位移为

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P}$$

这样，基本体系在 X_1 、 X_2 、 X_3 各方向的总位移各必须为零的条件可用下式表示：

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12-1)$$

式(12-1)称为力法方程。力法方程所表示的物理意义就是，基本体系中沿每一多余未知力方向的位移应与原来结构中相应的位移相等。力法方程所表示的是几何条件，其数目恰与多余未知力的数目相同。力法方程中各未知力的系数是单位力使基本体系产生的位移，自由项则表示

位移。

§ 12-2. 超静定平面刚架在荷载作用下的计算

本节用具体例子说明超静定平面刚架在荷载作用下的计算方法和步骤。

图 12-3, a 示一已知刚架, 柱及梁均为等截面杆件(即截面的尺寸沿杆长不变)。柱截面的惯性矩为 J_1 , 梁截面的惯性矩为 $2J_1$ 。刚架为一次超静定。取右支座的水平反力 X_1 为多余未知力, 则得到的基本体系示如图 12-3, b。力法方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0 \tag{12-7}$$

此方程示基本体系与原刚架的完全相等的条件是: 基本体系右支座的水平位移应为零。

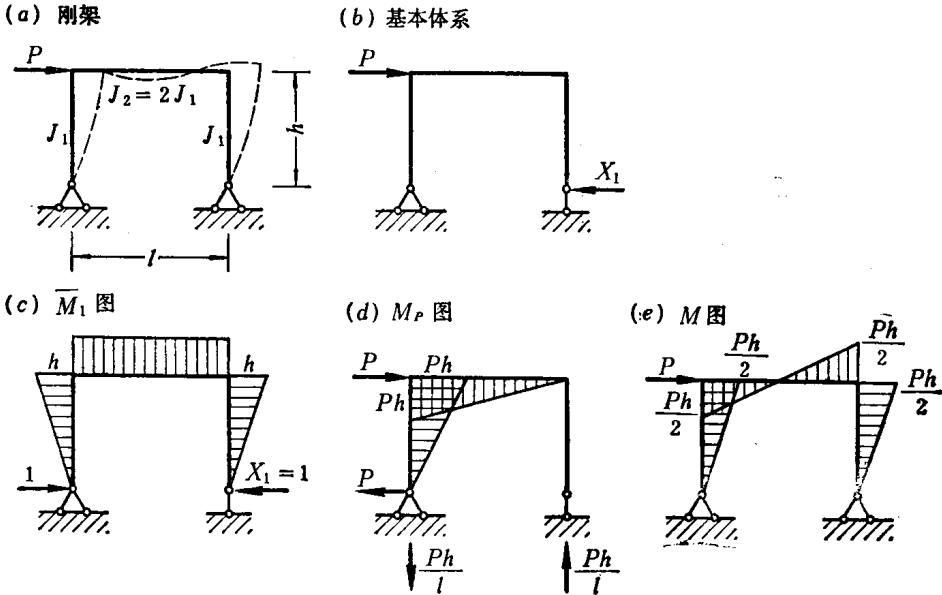


图 12-3

计算刚架的位移时, 我们只考虑弯矩的作用而忽略剪力和轴力的影响。因此为了计算 Δ_{1P} 和 δ_{11} , 只须作出基本体系由于 $X_1=1$ 所产生的弯矩图($\overline{M}_1$ 图)和基本体系由于荷载所产生的弯矩图(M_P 图)。此二图示于图 12-3, c 及 d。弯矩图中的纵标都画在杆件发生拉应力的一边。位移可用图乘法来计算。

因 δ_{11} 为基本体系由于 $X_1=1$ 在 X_1 方向所产生的位移, 故

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M}_1^2}{EJ} ds = 2 \frac{1}{EJ_1} \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{2}{3} h + \frac{1}{2EJ_1} h l h = \frac{h^2}{6EJ_1} (4h + 3l)$$

又 Δ_{1P} 为基本体系由于荷载在 X_1 方向所产生的位移, 故

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_P}{EJ} ds = - \frac{1}{EJ_1} \frac{Ph^2}{2} \cdot \frac{2}{3} h - \frac{1}{2EJ_1} \frac{Ph}{2} l \cdot h \\ &= - \frac{Ph^2}{12EJ_1} (4h + 3l) \end{aligned}$$

将 δ_{11} 及 Δ_{1P} 代入式(12-7), 得

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{P}{2}$$

刚架内任一截面的弯矩为

$$M = \overline{M}_1 X_1 + M_P \tag{12-8}$$

将 $\overline{M}_1$ 图的纵标乘以 $\frac{P}{2}$ ，与 M_P 图相加，便得到最后的弯矩图(图 12-3, e)。由 M 图可知刚架的挠度曲线大致如图 12-3, a 中的虚线所示。

有时为节约材料,使用变截面杆件。图 12-4, a 示一单层单跨钢筋混凝土厂房刚架, 梁及柱均为变截面杆件。设柱脚钢筋的布置使 A、B 二点可以当作铰支座, 则刚架的计算简图如图 12-4, b 所示。仍取右支座的水平反力为多余未知力, 基本体系如图 12-4, c 所示。力法方程仍为式 (12-7)。

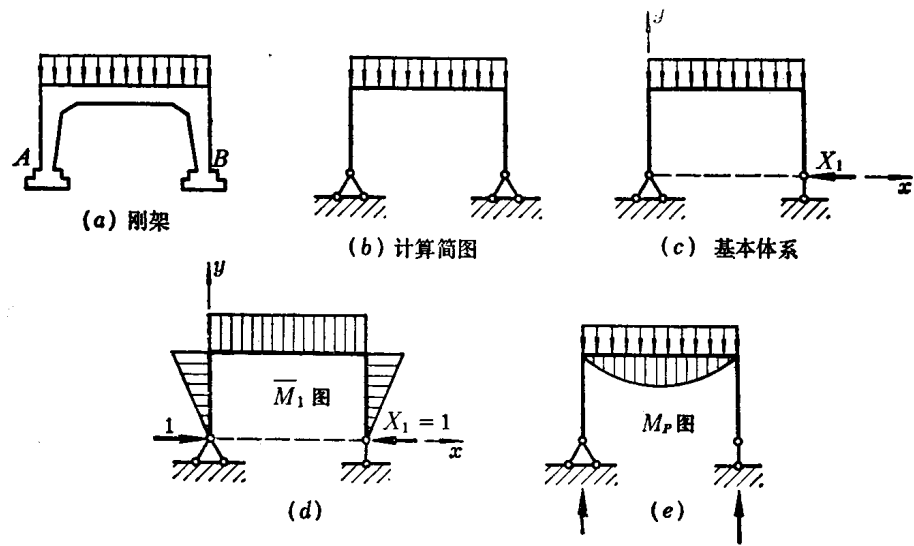


图 12-4

因杆的弯曲刚度 EJ 沿杆长变化, 故不能用图乘法计算位移。现规定使刚架内面发生拉应力的弯矩为正号。由于 $X_1=1$ 在基本体系内各截面所产生的弯矩(图 12-4, d)为

$$\overline{M}_1 = -y$$

由于荷载在基本体系内各截面所产生的弯矩以 M_P 表示(图 12-4, e), 则

$$\Delta_{1P} = \int \frac{\overline{M}_1 M_P}{EJ} ds = - \int \frac{y M_P}{EJ} ds$$

$$\delta_{11} = \int \frac{\overline{M}_1^2}{EJ} ds = \int \frac{y^2}{EJ} ds$$

其中积分极限包括刚架全部。求出 X_1 以后, 便可作出刚架的内力图。

现在再以图 12-5, a 所示的刚架为例, 说明刚架计算的详细步骤。本例中各杆的 EJ 相等, 且长度 l 亦相等。

(1) 选择基本体系