泰勒展开

Tai Le Zhan Kai

〔日〕渡部隆一 著
胡 复 译

科学普及出版社

泰 勒 展 开

〔日〕渡部隆一 著
胡 复 译

科学普及出版社

原 著 前 言

进入大学之后，理工科的学生在头一年中通常要十分努力地去学习微积分课程和做习题.

微积分中有一项题目就是泰勒展开. 如果只在实数范围内考虑泰勒展开的重要性，人们可能不太好理解它. 只有进入复数领域，学习复变函数论之后，才能够了解它的重要性. 也许正是因为这个原因，在大学低年级学习实数范围的微积分时，对泰勒展开并不很详细地论述，只是不加仔细推敲地概略讨论一下 $\sin x$， $\cos x, e^x$ 的展开式，在 $|x|<1$ 的范围内 $\log(1+x)$ 和 $(1+x)^\alpha$ 的展开式，以及利用泰勒展开式进行数值计算.

在微积分中需要学习的内容的确很多. 因此，也自然会受到时间的限制，不能只讨论泰勒展开. 但在学习复变函数论时，不管愿意与否，不得不对泰勒展开详加研究.

但是，喜欢数学的学生肯定要对下面这样一些问题发生疑问：

"$\sec x$ 和 $\tan x$ 的展开式是怎样的呢？"

"当 $x=1$ 时，怎样证明 $\log(1+x)$ 及 $(1+x)^\alpha$ 的展式的成立呢？"

本书的编写是为了对实数微积分范围内的这类问题尽可能地给出仔细的回答，如果本书能稍稍补充传统微积分学教科书的不足，那将会使著者感到荣幸.

著 者

1977 年 2 月

目　　录

第一章　引　　言

——什么是泰勒展开

§1.1　多项式的展开

首先，我们来考虑怎样把多项式

$$f(x)=3+2x-4x^2+7x^3 \tag{1}$$

化为$(x-1)$的多项式，也就是化为

$$f(x)=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3 \tag{2}$$

的形式。

把(1)化为(2)的方法有好几种．例如，令

$$x-1=t,\qquad \therefore\quad x=1+t,$$

如果把这个x代入(1)式的右边，就得到

$$\begin{aligned}f(x)&=3+2(1+t)-4(1+t)^2+7(1+t)^3\\&=3+2(1+t)-4(1+2t+t^2)+\\&\quad+7(1+3t+3t^2+t^3)\\&=8+15t+17t^2+7t^3.\end{aligned}$$

所以

$$f(x)=8+15(x-1)+17(x-1)^2+7(x-1)^3. \tag{3}$$

这是初等数学的方法，因此容易理解，但是当$f(x)$的次数增大而且系数非常复杂时，不仅计算很麻烦，而且结果很难推断出来．

下面我们来考虑一下用微分法变形的方法．

对于(2)式的两边依次求微商，把$f(x)$依次求微商后所

得的函数称为一次导函数，二次导函数，…，n 次导函数，如大家熟知，用如下的记号表示：

一次导函数：$f^{(1)}(x)$ 或 $f'(x)$

二次导函数：$f^{(2)}(x)$ 或 $f''(x)$

三次导函数：$f^{(3)}(x)$ 或 $f'''(x)$

…………………………

n 次导函数：$f^{(n)}(x)$

…………………………

那么，在(2)式中令 $x=1$，右边第二项以后都变成 0，因此

$$a_0=f(1).$$

其次，为了求 a_1，把(2)式两边对于 x 求微商，就得到

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-1)+3a_3(x-1)^2, \qquad (4)$$

如果令 $x=1$，可得

$$a_1=f'(1).$$

为了再求 a_2，把(4)式的两边再一次对于 x 求微商，然后令 $x=1$，则得

$$f''(x)=2a_2+6a_3(x-1), \quad \therefore \quad a_2=\frac{1}{2}f''(1). \qquad (5)$$

同样，把(5)式的两边对 x 求微商，然后令 $x=1$，则得

$$f'''(x)=6a_3, \qquad \therefore \quad a_3=\frac{1}{6}f'''(1). \qquad (6)$$

然而，把(1)式依次求微商，然后令 $x=1$，就得到

$$\begin{aligned} &f(x)=3+2x-4x^2+7x^3, && f(1)=8,\\ &f'(x)=2-8x+21x^2, && f'(1)=15,\\ &f''(x)=-8+42x, && f''(1)=34,\\ &f'''(x)=42, && f'''(1)=42. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$a_0=f(1)=8,$$
$$a_1=f'(1)=15,$$
$$a_2=\frac{1}{2}f''(1)=17,$$
$$a_3=\frac{1}{6}f'''(1)=7,$$

也就是(1)式化成为(3)式。

并且，应用上面的结果可以把(2)式写成下面的形式。

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$$
$$+\frac{1}{6}f'''(1)(x-1)^3. \tag{7}$$

到现在为止，我们考虑的是把 $f(x)$ 展成 $(x-1)$ 的多项式，把 $f(x)$ 展开成 $(x-a)$ 的多项式也是完全一样的，可以得到下面的式子：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$
$$+\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3. \tag{8}$$

当 $f(x)$ 是三次多项式时(8)式是必定成立的。那么，当 $f(x)$ 是 n 次多项式时，有怎么样的关系式呢？实际上，有与(8)式相类似的关系式，但是为了推导这一关系式，让我们作更一般的考查。

由于多项式每求一次微商，次数就降低一次，所以，设 $P(x)$ 是 k 次多项式，则

$P(x)$： k 次多项式，

$P'(x)$： $k-1$ 次多项式，

$P''(x)$： $k-2$ 次多项式，

…………………

$$P^{(k-1)}(x):\ 1\text{ 次多项式},$$
$$P^{(k)}(x):\ 0\text{ 次多项式(常数函数)},$$

因为常数函数的微商为 0，所以

$$P^{(k+1)}(x)=0.$$

特别当

$$P(x)=(x-a)^k$$

时，我们有

$$P'(x)=k(x-a)^{k-1},$$
$$P''(x)=k(k-1)(x-a)^{k-2},$$
$$P'''(x)=k(k-1)(k-2)(x-a)^{k-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P^{(k-1)}(x)=k(k-1)(k-2)\cdot\ \cdots\ \cdot 3\cdot 2\cdot(x-a),$$
$$P^{(k)}(x)=k(k-1)(k-2)\cdot\ \cdots\ \cdot 3\cdot 2\cdot 1=k!,$$
$$P^{(k+1)}(x)=0.$$

把 x 的 n 次多项式表为 $x-a$ 的多项式，即记为：

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+ \\ +a_n(x-a)^n. \tag{9}$$

对(9)式的两边求 k 次微商，当 $0<k<n$ 时，

$$f^{(k)}(x)=k!a_k+[(x-a)\text{ 的一次以上的项}],$$
$$\therefore\quad f^{(k)}(a)=k!a_k.$$

当 $k=n$ 时，就有

$$f^{(n)}(x)=n!a_n,$$
$$\therefore\quad f^{(n)}(a)=n!a_n.$$

当 $k=0$ 时，规定 $f^{(0)}(a)=f(a)$，则

$$f^{(0)}(a)=f(a)=a_0,$$

而且，对于 $k=0,1,2,\cdots,n$，能够把 a_k 表示为

$$a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a),$$

把它代入(9)式就得到下面的关系：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{10}$$

把这个(10)式的右边称为多项式 $f(x)$ 的以 a 为中心的**泰勒展开式**．前面的(8)式就是(10)式在 $n=3$ 的特殊情形．

【例 1】 求 x^n 的以 1 为中心的泰勒展开式．

【解】 首先回忆一下下面的组合的记号．

$$C_n^k \quad \binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}. = C_n^k$$

$$= \frac{1}{C_n^k}$$

如代入 $k=0,1,2,\cdots,n$，则

$$\binom{n}{0}=1,\quad \binom{n}{1}=n,\quad \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2},$$

$$\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!},\quad \cdots,\quad \binom{n}{n}=\frac{n!}{n!}=1.$$

当 $f(x)$ 为 n 次多项式时，它的以 1 为中心的泰勒展开式可写成如下形式．

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n,$$

其中设 $f(x)=x^n$，那么 $f(1)=1$，

$$f'(x)=nx^{n-1}, \qquad \therefore \qquad f'(1)=n=\binom{n}{1},$$

$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}, \quad \therefore \quad \frac{f''(1)}{2!}=\frac{n(n-1)}{2!}=\binom{n}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(k)}(x)=n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k},$$

$$\therefore \quad \frac{f^{(k)}(1)}{k!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1,$$

$$\therefore \quad \frac{f^{(n)}(1)}{n!}=\frac{n!}{n!}=\binom{n}{n},$$

因此，

$$x^n=1+n(x-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+(x-1)^n$$

$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}(x-1)+\binom{n}{2}(x-1)^2+\cdots$$

$$\cdots+\binom{n}{n}(x-1)^n,$$

这就是 x^n 的以 1 为中心的泰勒展开式。

在例 1 中求出的 x^n 的展开式中，令

$$x-1=t \quad (\text{因而}\ x=1+t)$$

就得到

$$(1+t)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}t+\binom{n}{2}t^2+\cdots+\binom{n}{n}t^n,$$

再把这式中的 t 改写为 x，就得到

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n,\tag{11}$$

这公式不过就是二项式定理.

§ 1.2 $\frac{1}{1-x}$的展开

到现在为止，我们已经研究了多项式的泰勒展开,那么,一般的非多项式的函数的情形又怎么样呢?

例如，我们看看 $f(x)=\frac{1}{1-x}$的情形.

由于第 5 页的(10)式的右边是 x 的 n 次多项式，所以不能把这个 $f(x)$按照(10)式右边的形式展开. 为什么呢? 那是因为对(10)式的右边经 $(n+1)$ 次求微商后变成常数函数 0，而

$$f(x)=\frac{1}{1-x},$$

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2},$$

$$f''(x)=\left\{\frac{1}{(1-x)^2}\right\}'=\frac{2}{(1-x)^3}=\frac{2!}{(1-x)^3},$$

$$f'''(x)=\left\{\frac{2}{(1-x)^3}\right\}'=\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4}=\frac{3!}{(1-x)^4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}},$$

它决不能变成常数函数.

然而，由于

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)=1-x^{n+1},$$

如果 $x\neq1$，则

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x},$$

所以

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

假如 $|x|<1$，因此，若 $-1<x<1$，则

$$\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0.$$

所以

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}x^k. \qquad (|x|<1) \qquad (12)$$

也就是说，$\frac{1}{1-x}$虽然不能展开成 x 的多项式，但是，在 $|x|<1$ 的范围内，可以展开成象(12)式那样的具有无穷多项的所谓无穷级数的形式.

然而，把第 7 页中 $f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$，$\cdots$的 x 用 0 代入，就得到

$f(0)=1$，$f'(0)=1$，$f''(0)=2!$，$\cdots$，$f^{(n)}(0)=n!$，$\cdots$，

因此，(12)式变成如下形式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k. \tag{13}$$

这式的右边称为$f(x)$的以 $x=0$ 为中心的**泰勒展开式**．(12)式是 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$的以 $x=0$ 为中心的泰勒展开式．

但是，令 $g(x)=f(x+a)$，由于

$$g^{(k)}(x)=f^{(k)}(x+a),\quad \therefore\ g^{(k)}(0)=f^{(k)}(a),$$

所以 $g(x)$ 也即 $f(x+a)$ 的以 $x=0$ 为中心的泰勒展开式成为如下形式：

$$f(x+a)=f(a)+f'(a)x+\frac{f''(a)}{2!}x^2+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k.$$

在这式中，令

$$x+a=t,\quad \therefore\quad x=t-a.$$

然后再把 t 改写为 x，就得到

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{14}$$

这式的右边称为 $f(x)$的以 $x=a$ 为中心的**泰勒展开式**．如令 $a=0$，(14)式和(13)式完全相同．

对于任意的 $f(x)$，不一定都可能有象(13)式或(14)式的展开式．这只有当函数 $f(x)$ 满足适当的条件时，才有可能．本书的目的就是阐明这些条件并且介绍(13)及(14)的展开式的应用．

第二章　泰　勒　展　开

§ 2.1　泰勒定理

为了给证明泰勒定理作准备，我们首先阐述一下关于连续函数的基本的定理，即维尔斯特拉斯定理．这个定理是保证极大值和极小值存在的有名的定理．

函数 $f(x)$ 在变数 x 的某个范围 D 上取极大值（或极小值），是指存在 M(或 m)及 c，满足下面两个条件：

(i) 对于所有的 $x \in D$，$f(x) \leqq M$（或 $f(x) \geqq m$），

(ii) 存在 $c \in D$，使得 $f(c) = M$（或 m）成立．其中条件(ii)是重要的，如果实际上不能达到 M（或 m）的值，就不能说取极大值（或极小值）．

定理 2.1（维尔斯特拉斯定理）

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leqq x \leqq b\}$ 上的连续函数在这个区间上取极大值和极小值．

这个定理中的闭区间不能换成为开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ 或者无限区间．

【例 1】 $f(x) = x^2$ 在闭区间 $[-1, 2]$ 上连续，在这个区间上取极大值 4，取极小值 0（图 1）．

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 上连续，但在这个区间上不取极大值也不取极小值（图 2）．

$f(x) = e^x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，但在这个区间上

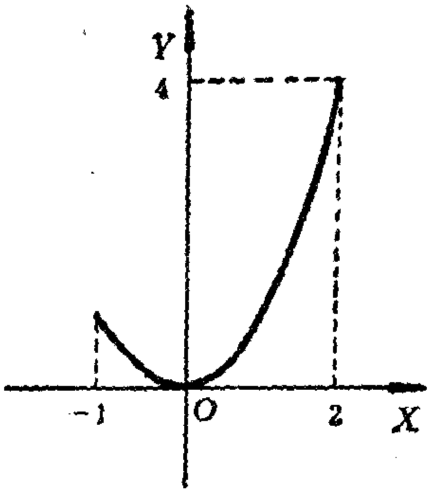

图 1

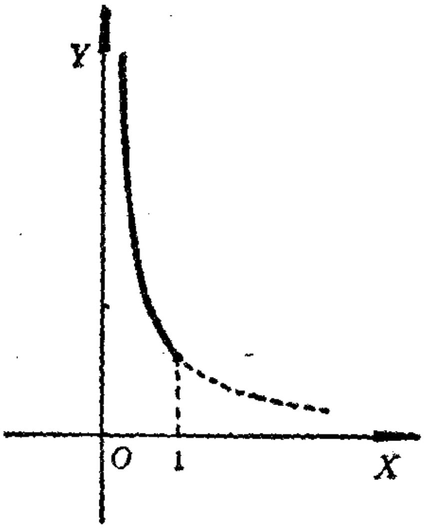

图 2

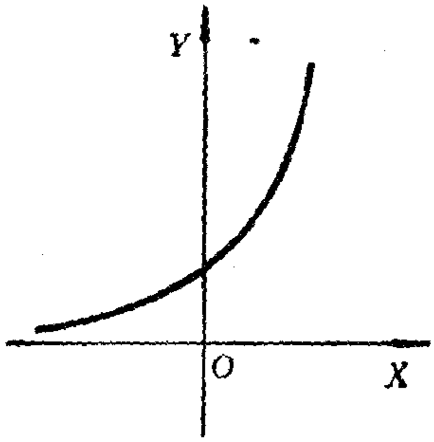

图 3

不取极大值也不取极小值(图 3).

为了证明定理 1 ，就要对于所谓数的本质有深入探讨的必要，因此，我们不妨先承认其结果.

定理 2.2 (罗尔定理)

如果 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)上可微，且 $f(a)=f(b)$，则存在 c ，使得

$$f'(c)=0, \qquad (a<c<b)$$

【证】 由定理 1，$f(x)$在闭区间$[a,b]$上取极大值和极小值. 现在设 $f(x)$ 在 c 点取极大值，且 $a<c<b$（图 4），那么，不论 h 为正为负都有

$$f(c+h)\leqq f(c),$$

因此，

如果 $h>0$，则 $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqq 0$，

如果 $h<0$，则 $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\geqq 0$.

由于 $f(x)$在 $x=c$ 处是可微的，当 $h\to 0$ 时，有

$$f'(c)\leqq 0, \quad f'(c)\geqq 0,$$

即 $f'(c)=0$ 成立.

如果 $f(x)$的极大值是 $f(a)=f(b)$（图 5），由于 $f(x)$ 在满足 $a<c<b$ 的某一点 c 取极小值，那么根据同样的理由 $f'(c)=0$ 成立.

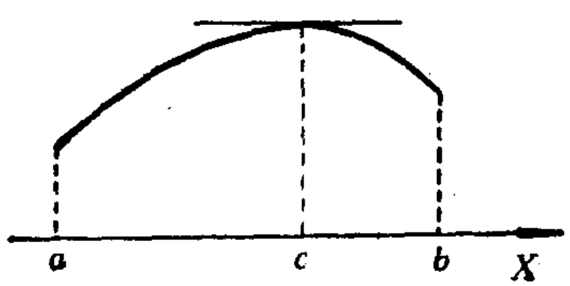

图 4

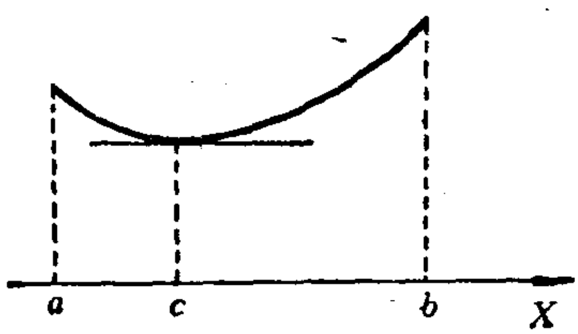

图 5