数学探秘

徐达著

天津科学技术出版社

数 学 探 秘

徐 达 著

天津科学技术出版社

责任编辑：黄立民

数学探秘

徐达著

*

天津科学技术出版社出版、发行

（天津市赤峰道130号）

冶金部天津地质研究院印刷厂印刷

*

开本787×1092毫米 1/32 印张5.375 字数115 000

1989年11月第1版

1989年11月第1次印刷

印数：1—4 000

出 版 说 明

徐达同志是一个业余数学爱好者，他利用工作之余研究世界数学难题，日日坚持不断，长达40余年，获得很多心得体会。他曾四处奔走想把这些成果发表于众，找不到合适的阵地。现他已年逾花甲，极力想在有生之年见到自己的研究心得整理成册出版。我们为其孜孜不倦的研究精神所感动，本着“百花齐放”，“百家争鸣”的精神，出版了这本小册子。由于书内所涉及的内容很广，限于我们的水平，不妄加评述。有待广大读者根据百家争鸣的方针自鉴之。

前　　言

本书是我40多年，在数学学习与研究上的心得部分总结。从1973年起，我开始系统地整理或论证一些世界数学难题，其内容涉及到数论、排队论、图论、线性代数、运筹学、微积分、特殊函数等十余个门类。从门类看，似乎属于高等数学范畴，但实际上，几乎所有命题的推导和证明过程，都只是使用了初等数学方法，而且丝毫无损其证明的严谨性。难怪一些数学家说我是钻了高等数学与初等数学交接部的空子。本书中所有数学命题的证明都是采用非传统方法，比较奇特，但又浅显，绝大部分的内容，凡优秀的高中生再掌握几个数论符号者都可读懂。

具体内容如下：

1.巧妙地将待定系数法与数学归纳法结合使用，证明并推导了等幂和公式。

轻而易举地将两种形式表达的等幂和$S_K(x)$的幂指数k值计算到$1\leqslant k\leqslant 101$（原美国人只计算到$1\leqslant k\leqslant 13$，而陈景润、黎鉴愚也只计算到$1\leqslant k\leqslant 30$），而且求出了当k为任意正整数时，$S_K(x)$的1到101项以前的各项通项公式。

同时，在这个问题上，改变了传统方法，过去认为，只能用伯努利数及伯努利多项式，並以高深的数学方法和繁琐的计算求等幂和，而我则相反，用已求得的等幂和轻而易举地求出伯努利数b_n，从b_1到b_{100}（世界上已公布的只有b_1到b_{60}）。伯努利多项式$B_n(x)$，已将n计算到$1\leqslant n\leqslant 101$〔世界上已公布的不超过$B_{13}(x)$〕。而且还求出了等幂和、伯努利

数及伯努利多项式三者相互之间的多个关系式。远超出数学手册的记载范围。

2.在数论方面：

（1）证明猜想成立的有：居加猜测、费尔玛大定理、孪生素数无穷、哥德巴赫猜想、不存在奇完全数、平方数陷井、立方数陷井、两种形式的角谷猜想等。

（2）将猜想引申，並证明的有：费尔玛大定理可引申为有理数、立方数陷井引申为n次方数陷井。

（3）找出新定理的有：$(P_n-P_{n-1})<2x^{\frac{1}{2}}(x\geq P_n^2)$，$P_n<n^2$较已证的$P_n<2^{2^n}$进了一大步。新的素数定理，类似欧拉函数的孪生函数等方面。

3.在其他方面：

（1）用新的初等函数表示的椭圆积分，恰与数学家的结论相悖。

（2）四色猜想的证明。

（3）证明了$A_n(x,y)=A_n(y,x)$。

4.在应用数学方面有：

（1）列队问题，並找到最佳对比方法。

（2）推算出新的计算椭圆近似周长的简便公式。

（3）找出了一个解大型优化排产型线性规划的新方法等。

有关以上内容的论文尤其是(1,1)、Fermat最后定理及列队问题，每篇都经过有关专家不下十次的审阅与探讨。都给我极大的鼓舞与帮助。

更有Fermat最后定理，已故作家鲍昌同志，曾找到数所高等学府审阅，但都无结果，作家又将英译稿托人带到国外，也沓无音讯，不得已作家亲自动笔，专为费尔玛一稿构思了

一中篇小说，将我当时的证明公式全文一字不漏地写了进去，意在引起社会重视。后来由南大倪音海老师将《小说》改编为歌剧本，曾由天津市歌剧团在市内演出数场。

后来一位朋友到英国留学，将英译稿交到伦敦大学数学系及帝国理工学院数研所，虽然他们招贤审稿，近一年时间，仍无定论。

前后十余年为使个人研究心得公诸于世，曾多方奔走联系出版事宜。幸喜获天津科学技术出版社的支持，使之得以付梓。

在本书的各个命题的研究和逐步完善的各个过程中，曾获得大批专家、研究员、教授、讲师及各级教师、数学爱好者等数学界及其他各界人士，给予的各种形式的帮助与鼓励，在此特向他们致以挚诚、崇高的敬意！

鲍昌老师！我们共同关心的一天终于来到了，想你一定会含笑九泉！鲍老师安息吧！

本书虽然整理的时间较长，但由于涉及的门类较多，凡不当之处皆由本人自负，并望同道指正，不胜感激！

徐　达

1989年5月

数 学 符 号

符 号	含 义
$p\mid A$	A中有因数p，或$A=pq$
$p\dagger A$	A中没有因数p，或p不能整除A
$p^{\alpha}\parallel A$	A中仅有p^{α}因数，而A不能被$p^{\alpha+1}$整除
$(p,q)=1$	表示p与q没有公因数，或叫做p与q互素（三元素相仿）
$(p,q)=d$	p与q有公因数d，（三元素相仿）
$a^{p}\equiv q(\mathrm{mod}\,a)$	表示a可整除（$a^{p}-q$）
$\sum\limits_{k=1}^{n} k^{m}$	$\sum\limits_{k=1}^{n} k^{m}=1^{m}+2^{m}+\cdots+n^{m}$
$\prod\limits_{p=p_1}^{p_r}$	$(1-\frac{1}{p})=(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_r})$
$n!$	！为阶乘，即$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$
C_n^i或$\binom{n}{i}$	$C_n^i=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-i+1)}{i!}$

目　　录

等幂和与伯努利多项式

一、引　　言

当n与k都是正整数时，令：

$$S_K(n)=\sum_{m=1}^{n} m^K=1^K+2^K+3^K+\cdots+n^K \qquad (1)$$

$S_K(n)$为自然数k次幂的前n项之和，可简称等幂和。

等幂和问题早在2000多年前，即从古希腊的阿基米德(Archimedes纪元前287～212年)开始，就吸引着很多数学家的兴趣。但是，直到17世纪以前的数学家仅仅求出了$k=2$和3的等幂和公式。至17世纪末，瑞士数学家伯努利·雅各(Bernoulli,Jacob 1654～1705年)在一本名叫《猜度术》书中，一举得到了k为任意数的等幂和公式如下：

$$S_K(n)=\frac{1}{k+1}\left(B_{K+1}(n+1)-b_{K+1}\right) \qquad (2)$$

其中：b_K由

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_K}{k!}\cdot t^K \quad (|t|<2\pi) \qquad (3)$$

所定义。b_K就是有名的伯努利数。

而$B_K(x)$为表示伯努利多项式，关系式为

$$B_K(x)=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}b_m x^{K-m} \qquad (4)$$

但是，伯努利並没有给出多个等幂和的具体公式。

后人如果仅仅依靠（2）式，寻求等幂和公式，也是很困难的。所以我国数学家陈景润曾结论："当$4\leqslant k\leqslant10$时，利

用伯努利数来求等幂和公式，就需要用到较深的数学知识和复杂的数值计算，而当$k>10$时，几乎无法利用伯努利数来寻求等幂和公式了”。故在70年代以前，人们仅求出$k\leqslant 7$的等幂和公式，这7个公式，在很多资料上可以找到。到现代，等幂和问题仍吸引很多数学家的兴趣。例如：J·Rordan，H·W·Gould，S·H·Scott，……，等人，他们利用组合数学方法，只求出了幂指数k从1到13的等幂和公式，其$S_1(n)\sim S_{13}(n)$与本人的公式完全一致。我国数学家陈景润、黎鉴愚俩合作，也是用组合数学方法，共同求出了$1\leqslant k\leqslant 30$的另一种表达形式的等幂和公式，从1984年起，连续发表在有关刊物上。如将$\overline{n}=n(n+1)$代入他们的等幂和公式，则与本书的$S_1(n)\sim S_{30}(n)$公式完全一致。

二、寻求等幂和公式

已定义

$$S_K(n)=\sum_{m=1}^{n} m^K=1^K+2^K+3^K+\cdots\cdots+n^K$$

$$=a_1n^S+a_2n^{S-1}+a_3n^{S-2}+\cdots+a_Sn+a_{S+1} \quad (1)$$

如果(1)式成立，则n以0或任何正整数代入时，也均能成立。利用这个性质，可以将n分别以0、1及‘$n-1$’代入(1)式，当然等式两边各个n的等幂项的系数都应对应相等。

现寻求$S_K(n)$中n的最高次幂s与幂指数k的关系。

因为，若$k\geqslant 1$，$i\geqslant 1$，则定有

$$(i-1)^K<i^K \quad (5)$$

所以

$$S_K(n)=1^K+2^K+3^K+\cdots n^K$$

$$\leqslant n^K+n^K+n^K+\cdots+n^K \quad (n\text{个}n^K)$$

$$= n^{K+1} \qquad (k \geqslant 1) \tag{6}$$

即

$$S_K(n) \leqslant n^{K+1} \qquad (k \geqslant 1) \tag{7}$$

从图1看：显然，前n个矩形面积之和正好是$S_K(n)$值。

在ox轴以上，$y = x^K$曲线以下，x从0到n的区域面积正好是

$$\int_0^n x^K dx$$

的值。

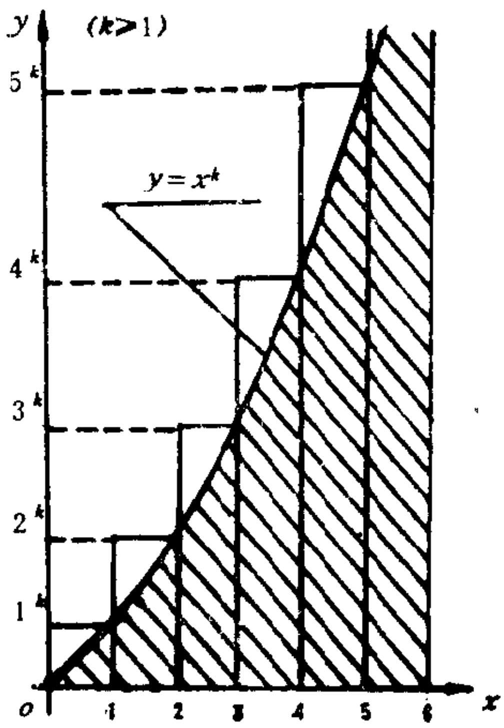

图 1

故显然有

$$\sum_{m=0}^{n} m^K \geqslant \int_0^n x^K dx \quad (k \geqslant 1) \tag{8}$$

已知

$$\int_0^n x^K dx = \frac{n^{K+1}}{k+1} \qquad (k \geqslant 1) \tag{9}$$

故得

$$n^{K+1} \geqslant S_K(n) \geqslant \frac{n^{K+1}}{k+1} \qquad (k \geqslant 1) \tag{10}$$

这当然可得$s = k+1$，所以（1）式可写为

$$S_K(n) = a_1 n^{K+1} + a_2 n^K + a_3 n^{K-1} + \cdots + a_{K+1} n + a_{K+2} \tag{11}$$

此处a_i（$1 \leqslant i \leqslant k+2$）可以为分数。

现令$n = 0$代入（11）式，有$a_{K+2} = 0 \qquad (k \geqslant 1)$

$n=1$ 代入（11）式，有

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{K+1}=1 \tag{12}$$

现将n以（$n-1$）代入（11）式，有

$$S_K(n-1)=a_1(n-1)^{K+1}+a_2(n-1)^K+a_3(n-1)^{K-1}$$
$$+\cdots+a_{K+1}(n-1) \tag{13}$$

所以

$$S_K(n)=S_K(n-1)+n^K$$
$$=a_1n^{K+1}+a_2n^K+a_3n^{K-1}+\cdots\cdots+a_{K+1}n \tag{14}$$

即

$$a_1n^{K+1}+a_2n^K+a_3n^{K-1}+\cdots\cdots+a_{K+1}n$$
$$=a_1(n-1)^{K+1}+a_2(n-1)^K+a_3(n-1)^{K-1}$$
$$+\cdots\cdots+a_{K+1}(n-1)+n^K \tag{15}$$

将（15）式右边各项展开：因n的同次幂的各项系数和两边必相等。因此即得：

$$-a_1\binom{k+1}{1}+a_2+1=a_2 \tag{16}$$

$$a_1\binom{k+1}{2}-a_2\binom{k}{1}+a_3=a_3 \tag{17}$$

$$-a_1\binom{k+1}{3}+a_2\binom{k}{2}-a_3\binom{k-1}{1}+a_4=a_4 \tag{18}$$

. . . .

如果k为偶数，则

$$-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{K+2}=a_{K+2} \tag{16$'$}$$

k为奇数，则

$$a_1-a_2+a_3-\cdots\cdots+a_{K+2}=a_{K+2} \tag{17$'$}$$

从(16)′及(17)′式知：

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2p\pm1}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2p}$$
$$(2p=k\text{或}k+1) \tag{19}$$

从（16）式知

$$a_1=\frac{1}{k+1} \tag{20}$$

以$a_1=\frac{1}{k+1}$代入（17）式，得

$$a_2=\frac{1}{2} \tag{21}$$

再根据(16)′或(17)′式以及（19）式可知

$$a_{2i}=0 \quad (i>1) \tag{22}$$

根据以上各式，经组合计算，可以巧妙又准确地计算出k至很大的$S_K(n)$多项式。

本人已计算了$S_1(n)\sim S_{101}(n)$的所有多项式。

三、等幂和的组合计算

巧妙地组合计算，是求更高次幂等幂和的重要一环。

现将本人利用12位计算器加算盘计算的方法介绍如下：

设

$$S_K(n)=a_{K1}n^{K+1}+a_{K2}n^K+a_{K3}n^{K-1}+a_{K5}n^{K-3}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{A_K}(a'_{K1}n^{K+1}+a'_{K2}n^K+a'_{K3}n^{K-1}+a'_{K5}n^{K-3}+\cdots) \tag{23}$$

其中A_K、a'_{Ki}（$1\leqslant i\leqslant k+1$）均为整数，但$a_{Ki}$（$1\leqslant i\leqslant k+1$）几乎都是分数。我们再设

$$a_{Ki}=\frac{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p}{q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_t^{\beta_t}}$$ （$1\leqslant i\leqslant k+1$，$p_i$，$q_j$均为素数且$\leqslant k+1$） （24）

另外，$(p,p_i)=1$，$(p,q_j)=1$，$(p_i,q_j)=1$

显然A_K是所有q_j（$1\leqslant j\leqslant k+1$）的最小公倍数。

设a_{Ki}为已知，求$a_{(K+1)i}(2<i\leqslant k+2)$。求法为：

① $a_{(K+1)i}=a_{Ki}\cdot\dfrac{k+1}{k+3-i}$（并约为最简式） (25)

② 求出$a_{(K+1)i}$的分母的最小公倍数A_{K+1}。

③ 求公比λ_{K+1}。

$$\lambda_{K+1}=\frac{(k+1)\cdot A_{K+1}}{A_K} \tag{26}$$

④ 求出每个$a'_{(K+1)i}$ $(1\leqslant i\leqslant k+2)$

$$a'_{(K+1)1}=\frac{A_{K+1}}{k+2} \tag{27}$$

$$a'_{(K+1)2}=\frac{A_{K+1}}{2} \tag{28}$$

$$a'_{(K+1)i}=a_{Ki}\times\lambda_{K+1}\div(k+3-i)\ (2<i\leqslant k+1) \tag{29}$$

⑤ 求出

$$S_{K+1}(n)=\frac{1}{A_{K+1}}\left(a'_{(K+1)1}n^{K+2}+a'_{(K+1)2}n^{K+1}+\cdots\right) \tag{30}$$

⑥ 求末项$a'_{(K+1)(K+2)}$值

1）若 k 为奇数，则令 $n=1$，代入（30）式。并令$S_{(K+1)}(1)=1$，求出$a'_{(K+1)(K+2)}$值。

2）若k为偶数，则令$n=1$，代入（30）式。验算$S_{K+1}(1)$是否为1？以检查$S_K(n)$及$S_{K+1}(n)$的各项系数计算中是否正确？如正确，可继续向下算，求 $S_{K+2}(n)$。如 $S_{K+1}(1)\neq1$，则必须找出计算中错误。並纠正过来。

四、等幂和的性质

前面已定义；但将k改为n，n则改为x。有

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{x}k^n$$

a_{2i+1}为$S_n(x)$第$2i+1$项系数 $(1\leqslant i\leqslant[\frac{n}{2}])$

a'_{2n+1}为$S_{2n}(x)$ 第$2n+1$项系数（$1\leqslant n$）

则有

$$S_n(1)=1 \tag{31}$$

$$S_n(-1)=S_n(0)=0 \tag{32}$$

$$S_n(x+1)-S_n(x)=(x+1)^n \tag{33}$$

$$a_{2i}=a'_{2i}=0 \qquad (2\leqslant i) \tag{34}$$

$$S_{2n}(x)+S_{2n}(-x)=x^{2n} \tag{35}$$

$$S_{2n+1}(x)-S_{2n+1}(-x)=x^{2n+1} \tag{36}$$

$$S_n(1-x)-S_n(-x)=(1-x)^n \tag{37}$$

$$\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}a'_{K+1}-\frac{n}{2}+1=0 \ (n=3,4,\cdots,) \tag{38}$$

$$a'_{2n+1}=2(-1)^{n+1}(2n)!\sum_{k=1}^{\infty}(2\pi k)^{-2n}(n=1,2,\cdots) \tag{39}$$

$$S_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^n}{2}+\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{a'_{K+1}}{n-k+1}\cdot x^{n-K+1} \tag{40}$$

$$1+n(x-\frac{1}{2})+\sum_{k=2}^{n-1}\left\{\binom{n}{k}k\left(S_{K-1}(x)-x^{K-1}\right)+a'_{K+1}\right\}=$$

$$nx^{n-1} \tag{41}$$

$$\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}a'_{2K+1}\cdot\frac{t^{2K}}{(2k)!} \quad (|t|<2\pi) \tag{42}$$

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=xt-\frac{t}{2}+1+\sum_{k=2}^{\infty}\left(S_{K-1}(x)-x^{K-1}+\frac{a'_{K+1}}{k}\right)$$

$$\cdot\frac{t^K}{(k-1)!} \tag{43}$$

$$\frac{d^K}{dx^K}S_n(x)=\frac{n!}{(n-k)!}S_{n-K}(x)+a'_{n-K+2} \tag{44}$$

$$\int_a^x \left(S_K(t) + a'_{K+2} \right) dt = \frac{1}{k+1} \left\{ S_{K+1}(x) - S_{K+1}(a) \right\} \quad (45)$$

五、等幂和与伯努利多项式关系

前面已定义

$B_n(x)$——表示伯努利多项式

b_n——表示伯努利数，即 $\boldsymbol{B}_n(x)$ 的第 $n+1$ 项的系数值（即常数项）。

则有

$$b_{2n} = a'_{2n+1} \qquad (1 \leqslant n) \quad (46)$$

$$\frac{b_{2m}\binom{n}{2m-1}}{2m} = a_{2m+1} \left(n\text{为}B_n(x)\text{的最高次幂} \right) \quad (47)$$

$$b_{2m} = \frac{2m \cdot a_{2m+1}}{\binom{n}{2m-1}} \quad (48)$$

$$S_n(x) = \frac{1}{n+1} \left\{ \boldsymbol{B}_{n+1}(x+1) - b_{n+1} \right\} \quad (49)$$

$$S_n(x) = \frac{1}{n+1} \left\{ \boldsymbol{B}_{n+1}(x) - b_{n+1} \right\} + x^n \quad (50)$$

$$\boldsymbol{B}_n(x) = n \left\{ S_{n-1}(x) - x^{n-1} \right\} + b_n \quad (51)$$

$$\int_a^x \boldsymbol{B}_n(t) dt = \frac{1}{n+1} \left\{ \boldsymbol{B}_{n+1}(x) - \boldsymbol{B}_{n+1}(a) \right\} = S_n(x) - S_n(a) \quad (52)$$

$$S_n(x) = \frac{(2x+n+1)x^n}{2(n+1)} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left\{ (-1)^{K-1} \cdot \frac{\binom{n}{2k}}{2k} \cdot \boldsymbol{B}_K \cdot x^{n-2K+1} \right\} \quad (53)$$