

建筑力学

薄壁空间体系

[苏]A.Φ.斯米尔诺夫 主编

顾景田 译

哈尔滨工业大学出版社

目 录

序言	(1)
第一章 超静定桁架、拱及拱顶的计算特点	(1)
§ 1.1 引言	(1)
§ 1.2 超静定桁架的计算	(4)
§ 1.3 超静定拱的计算	(15)
§ 1.4 处于弹性环境中拱顶结构的计算	(28)
第二章 悬挂式及混合式体系的计算特点	(35)
§ 2.1 受拉柔索作承重构件	(35)
§ 2.2 扁平空间索的平衡方程及变形方程	(40)
§ 2.3 平面索	(44)
§ 2.4 索的平面体系及空间体系	(52)
§ 2.5 关于非线性方程的求解	(63)
§ 2.6 具有刚性梁的柔索	(69)
第三章 建筑力学的一般方程及其应用电子计算机的 求解方法	(84)
§ 3.1 引言	(84)
§ 3.2 作为有限自由度体系的杆件体系	(85)
§ 3.3 杆的建筑力学基本方程	(91)
§ 3.4 建立杆件体系的基本方程	(103)
§ 3.5 静力几何相似性·建筑力学问题的提出 及其求解的一般体系	(117)
§ 3.6 建筑力学一般方程组的解·混合法	(120)
§ 3.7 位移法	(121)
§ 3.8 力法	(126)

§ 3.9	考虑局部荷载	(136)
§ 3.10	求解几何及物理非线性问题的方程	(140)
第四章	有限单元法的基本规则	(165)
§ 4.1	弹性理论方程及其与建筑力学方程的联系	(165)
§ 4.2	拉格朗日定理	(176)
§ 4.3	列依斯涅尔定理 · 作为列依斯涅尔定理 特例的拉格朗日及卡斯提良诺定理	(179)
§ 4.4	有限单元法及其与里兹(Ритц)法的联系	(192)
§ 4.5	有限单元法与建筑力学方法的联系	(197)
§ 4.6	有限单元法与位移法的联系	(203)
§ 4.7	按有限单元法解弹性理论的平面问题	(216)
§ 4.8	轴对称问题	(236)
§ 4.9	按有限单元法求解弹性理论的空间问题	(248)
§ 4.10	复杂单元	(257)
第五章	薄板受弯计算	(289)
§ 5.1	矩形单元	(289)
§ 5.2	弹性地基上平板的计算	(311)
§ 5.3	三角形单元反力矩阵的获得	(314)
§ 5.4	轻质填料三层板的计算	(319)
§ 5.5	在轴对称荷载作用下薄壁圆锥壳单元反 力矩阵的获得	(335)
§ 5.6	用直线正交网格有限单元法计算具有复 杂周边的扁壳及平板	(346)
第六章	有限单元法半解析法及其在薄壁空间体系计 算中的应用	(366)

§ 6.1	引言	(366)
§ 6.2	由双曲正交异性壳切出窄条的反力矩阵 的获得	(368)
§ 6.3	从轻质填料三层平板中切出的窄条反力 矩阵的获得	(390)
§ 6.4	用以求由窄条组成的薄壳反力矩阵的超 单元	(402)
§ 6.5	非轴对称荷载作用下薄壁圆锥壳单元反 力矩阵的获得	(404)
第七章 利用位移法及单三角级数形式的平板弹性理 论解来计算棱柱形槽板体系		
§ 7.1	引言	(421)
§ 7.2	铰支槽板壳位移法的典型方程	(422)
§ 7.3	矩形平板受弯时因板边位移而引起板边 反力的确定·平板受弯的初参数法	(429)
§ 7.4	由于矩形平板平面中板边发生位移而在 其板边上引起的反力的确定	(440)
§ 7.5	确定位移法方程组系数的技巧	(447)
§ 7.6	关于位移及反力的互等定理及其在确定 由结点外荷载引起的反力中的应用	(457)
§ 7.7	例题	(460)
§ 7.8	关于混合法的应用	(471)
第八章 矩形平面壳体结构的计算		
§ 8.1	概述	(475)
§ 8.2	直角坐标系中弹性扁壳的线性方程	(482)
§ 8.3	用重三角级数计算铰支壳	(489)
§ 8.4	铰支壳边缘构件的计算	(496)

§ 8.5	位移法及单级数法在双曲扁壳计算中的应用	(502)
§ 8.6	用方程的精确积分法建立壳体板块的刚度矩阵	(506)
§ 8.7	建立板块刚度矩阵的数值法	(517)
第九章	多维问题向一维问题的转化·关于用B. 3. 符拉索夫法计算圆柱体系的概念	(527)
§ 9.1	多维问题向一维问题的转化	(527)
§ 9.2	关于变分法微分方程的求解	(539)
§ 9.3	按B. 3. 符拉索夫法计算棱柱薄壁体系的原理	(544)
第十章	极限平衡法原理	(546)
§ 10.1	关于极限平衡荷载及破坏机构的概念	(546)
§ 10.2	关于极限平衡的定理	(548)
§ 10.3	关于使用线性规划法的概念	(554)
附录 1	面积坐标	(559)
附录 2	沿三角形域的积分	(562)
附录 3	变分学的某些资料	(565)
附录 4	沿矩形域的积分	(569)
附录 5	按位移法计算平板用的函数 $f_i(\alpha)$ 及 $\psi_i(\alpha)$ 表	(572)
参考文献		(581)

第一章 超静定桁架、拱及拱顶的计算特点

§ 1.1 引言

在工程实践中常常使用超静定桁架、拱及拱顶来作承重结构。超静定桁架、拱及拱顶与静定的相比，其工作特点是它们中的内力与构件刚度有关，这些体系里会由于温度、支座沉降以及个别构件制造不精确而产生内力。

计算金属桁架时，一般认为结点是铰接的，因而这种理想桁架的全部杆件均在受拉或受压状态下工作。广泛采用的钢筋混凝土桁架（图1.1），具有短而抗弯刚度很大的杆件。计算这些桁架必须既考虑轴向力，又考虑弯矩。因此在钢筋混凝土桁架的计算简图中认为结点是刚接的，这些体系具有高次超静定的性质。

超静定拱体系与静定三铰拱相比，具有一系列结构优点，因而也广泛应用于建筑工程实践。按外部支承性质，拱区分为无铰拱及两铰拱（图1.2）。无铰拱广泛

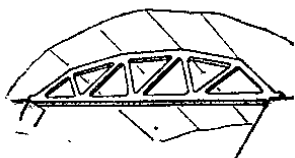


图 1.1

应用于桥梁结构(图1.3)。车道在下面的拱形桥面结构组成外静定体系。这种体系中横推力由拉杆来承受(图1.4)。它的优点在于不产生支座沉降内力。有拉杆的拱可能有三种型式: 1) 具有柔拉杆的刚性拱(如果 $EJ_a \gg EJ_s$ 、这里 EJ_a ——拱的抗弯刚度; EJ_s ——拉杆的抗弯刚度); 2) 具有刚性梁的柔性拱(如果 $EJ_a \ll EJ_s$); 3) 具有刚性拉杆的刚性拱(如果 $EJ_a \approx EJ_s$)。

常常采用拱顶结构(图1.5)作为承重结构, 拱顶结构是推力体系, 其工作与拱类似, 与拱不同的是, 拱顶在垂直其平面方向的延续长度可达很大尺寸。为了近似地计算拱顶承受垂直于其横截面方向的固定荷载, 可以从拱顶中取宽度等于1的拱带(图1.5)。拱顶和拱都近似地当作平面体系来计算, 它们的区别在于对拱是研究平面应力状态($\sigma_z = 0$), 而对拱顶则研究平面应变状态($\epsilon_z = 0$)。考虑上述情况, 计算拱时取弹性模量为 E , 而对拱顶则取 $E' = E/(1 - \mu^2)$ 。用作建筑结构的拱及拱顶, 一般用偏心受压直杆公式而不是曲杆公式进行计算, 因为其中 $h/R < 1/5$ 。在拱及拱

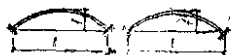


图 1.2

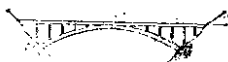


图 1.3



图 1.4

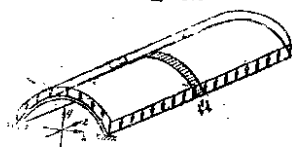


图 1.5

顶中产生很大的轴向力，由于这些力作用而产生的位移与弯曲产生的位移是同一数量级。因此在使用莫尔公式时应考虑两部分（由于 M 和 N 产生的变形）。

设计地下构筑物时广泛采用拱顶式结构体系，其上的主要荷载是上面土层的压力（图1.6）。属于这类结构的还有铁路隧道、各种专门用途的坑道、地下水电站的机器房、地下仓库、国防构筑物等等。有时地下结构作成圆环形（地下铁隧道，水工涵洞等）或圆环形体系。例如深埋的地下铁道车站就属此种结构（图1.7）。这些结构工作类似于拱顶。



图 1.6

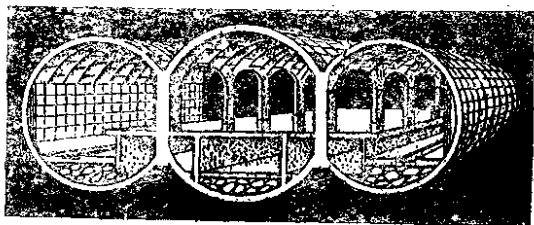


图 1.7

地下铁车站是复杂的空间结构，但为进行近似计算可以截取典型单元当作平面体系来计算（图1.8）。此时柱子象似“分布”在单元的长度上。计算地下结构时，仅仅在结构向岩层一方位移的情

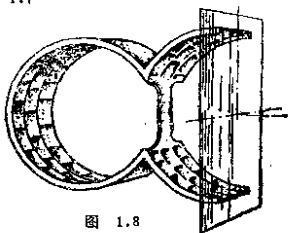


图 1.8

况下才应考虑周围土壤的作用；如果位移发生在相反方向，则可考虑周围土壤的作用。这样一来，土壤是单方面的联系。常常取用文克列尔模型作为土壤模型。

计算桁架、拱及拱顶可以应用力法及位移法。由于使用电子计算机，后者得到了广泛应用。因此桁架、拱及拱顶广泛应用于工程构筑物中，关于它们的计算问题，我们将详细讨论。

§ 1.2 超静定桁架的计算

我们来讨论用力法计算超静定桁架。计算从确定超静定次数开始。以后各处都假设初始体系是不可变的。我们按公式 $n = s - 2k$ 来确定图1.9所示桁架的超静定次数，式中 k ——桁架结点数； s ——包括支杆在内的杆数：a) $n = 14 - 12 = 2$ ；б) $n = 39 - 38 = 1$ ；в) $n = 32 - 30 = 2$ ；г) $n = 40 - 36 = 4$ 。

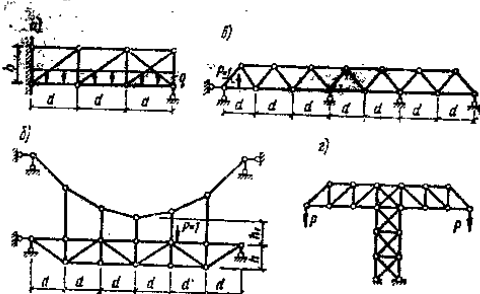


图 1.9

确定超静定次数之后，选择基本体系。然后组成典型方

程组（其数目等于超静定次数）由典型方程组确定多余未知数（所去掉联系中的内力）。因为在铰接桁架里只产生轴向力，所以确定单位位移和荷载位移时，莫尔公式中仅保留与轴向力 N 有关的一项。找出多余未知数之后，其余杆件中的内力按下列公式来求

$$N = N^0 + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n \quad (1.1)$$

我们通过图1.9, a所示的二次超静定桁架的例题来研究计算步骤。图1.10, a 给出基本体系。分布荷载用集中力 $P = qd = 4q$ 来代替。加于点 1 和点 4 的集中力未标出，因为这些力在桁架中不引起内力。基本体系的典型方程组有下列形式

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

为求单位位移及荷载位移，我们确定桁架杆件中由 X_1 , X_2 及荷载 P 产生的内力。求出 $\sin \alpha = 3/5 = 0.6$, $\cos \alpha = 4/5 = 0.8$ 。

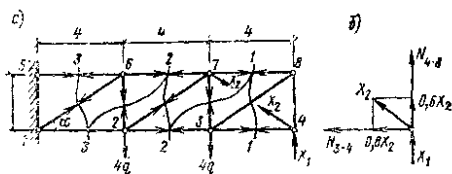


图 1.10

切截出结点 4（图1.10, 6），确定 N_{3-4} 及 N_{4-8} ：

$$\Sigma X = -0.8X_2 - N_{3-4} = 0; \quad N_{3-4} = -0.8X_2$$

$$\Sigma Y = X_1 + 0.6X_2 + N_{4-8} = 0; \quad N_{4-8} = -X_1 -$$

$$0.6X_2$$

作截面1—1得

$$\Sigma M_s = X_1 \cdot 4 + 0.6X_2 \cdot 4 + N_{7-8} \cdot 3 = 0$$

$$N_{7-8} = -1.333X_1 - 0.8X_2$$

$$\Sigma Y = X_1 + 0.6X_2 - N_{3-8} \cdot 0.6 = 0$$

$$N_{3-8} = 1.667X_1 + X_2$$

作截面1—2, 求出 N_{3-7}

$$\Sigma Y = X_1 + 0.6X_2 - 4q + N_{3-7} = 0$$

$$N_{3-7} = -X_1 - 0.6X_2 + 4q$$

作截面, 2—2得

$$\Sigma M_7 = X_1 \cdot 4 - N_{2-3} \cdot 3 = 0; \quad N_{2-3} = 1.333X_1$$

$$\Sigma M_2 = X_1 \cdot 8 - 4q \cdot 4 + N_{6-7} \cdot 3 = 0$$

$$N_{6-7} = -2.667X_1 + 5.333q$$

$$\Sigma Y = X_1 - 4q - N_{2-7} \cdot 0.6 = 0$$

$$N_{2-7} = 1.667X_1 - 6.667q$$

作截面2—3, 求出 N_{2-6}

$$\Sigma Y = X_1 - 8q + N_{2-6} = 0; \quad N_{2-6} = -X_1 + 8q$$

作截面3—3, 得

$$\Sigma M_1 = X_1 \cdot 12 - 4q \cdot 4 - 4q \cdot 8 + N_{5-6} \cdot 3 = 0$$

$$N_{5-6} = -4X_1 + 16q$$

$$\Sigma M_6 = X_1 \cdot 8 - 4q \cdot 4 - N_{1-2} \cdot 3 = 0$$

$$N_{1-2} = 2.667X_1 - 5.333q$$

$$\Sigma Y = X_1 - 4q - 4q - N_{1-6} \cdot 0.6 = 0$$

$$N_{1-6} = 1.667X_1 - 13.333q$$

假定上列公式中 $X_1 = 1$, $X_2 = 0$, $q = 0$, 则得到全部杆中由 $X_1 = 1$ 产生的内力。类似地可以求得由于 $X_2 = 1$ 及荷载产生的内力。得到典型方程系数的过程, 可以很方便地

用列表形式进行 (表1.1)。

找出典型方程的系数之后, 写出方程组

$$\begin{cases} 376.535X_1 + 56.741X_2 - 1383.284q = 0 \\ 56.741X_1 + 61.6X_2 - 36q = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

对 X_1 及 X_2 解方程组(1.2)得到

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.003084 & -0.002841 \\ -0.002841 & 0.018850 \end{bmatrix}$$

$$q \begin{bmatrix} 1383.284 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.164 \\ -3.251 \end{bmatrix} q$$

有了多余未知数的值, 我们按公式(1.1) 求出桁架所有杆件中的内力 (见表1.1的第7.13、14、15栏)。

下面我们来研究在桁架中建立影响线的问题。与计算桁架承受已知荷载相类似, 首先必须建立多余未知数的影响线。图1.9, 6所示的用悬链加强的桁架是一次超静定体系。基本体系示于图1.11, a。悬链的结点位于二次抛物线方程所描绘的曲线上。我们求出纵座标 y_2 及 y_3 。以 x, y 为轴线的二次抛物线方程为下式

$$y = ax^2 \quad (1.3)$$

设 $x = 12, y = 6$ 。将这些数值代入得 (1.3), 得 $6 = a \cdot$

12^2 , 由此 $a = 1/24$, 二次抛物线方程将有 $y = \frac{1}{24}x^2$ 形式。

代入 $x_2 = 4$ 及 $x_3 = 8$, 得出 铰接悬链结点的纵坐标:

$$y_2 = \frac{1}{24} \cdot 4^2 = 0.667; \quad y_3 = \frac{1}{24} \cdot 8^2 = 2.6667.$$

表 1.1

No.	1				$\bar{N}_1$	$\bar{N}_2$	N_0	$\bar{N}_1^2$		$\bar{N}_1 \bar{N}_2$		$\bar{N}_1 N_0$		$\bar{N}_2 N_0$		$\bar{N}_1 X_1$	$\bar{N}_2 X_2$	N
	1	2	3	4				EF	EF	EF	EF	EF	EF	EF	EF			
1-2	4	1	4	4	2,607	0	-5,333q	28,452	0	0	-56,892q	0	11,105q	0	5,772q			
2-3	4	1	4	4	1,333	0	0	7,107	0	0	0	0	5,551q	0	5,551q			
3-4	4	1	4	4	0	-0,8	0	0	0	2,50	0	0	0	2,601q	2,601q			
5-6	4	1	4	4	-4	0	16q	84	0	0	-256q	0	-16,656q	0	-0,656q			
5-7	4	1	4	4	-2,607	0	5,333q	28,452	0	0	-56,892q	0	-11,105q	0	-5,772q			
7-8	4	1	4	4	-1,333	-0,8	0	7,108	4,266	2,56	0	0	-5,551q	2,601q	-2,95q			
8-3	4	1	3	3	-1	-0,6	0	3	1,8	1,08	0	0	-4,184q	1,95q	-2,213q			
2-6	3	0,2	15	15	-1	0	8q	15	0	0	-120q	0	-4,164q	0	3,836q			
3-7	3	0,2	15	15	-1	-0,6	4q	15	9	5,4	-60q	-38q	-4,184q	1,951q	1,787q			
6-5	5	0,2	25	25	1,607	0	-13,333q	69,472	0	0	-555,853q	0	6,941q	0	-6,392q			
7-5	5	0,2	25	25	1,607	0	-6,667q	69,472	0	0	-277,847q	0	6,941q	0	0,274q			
3-8	5	0,2	25	25	1,607	1	0	69,472	41,675	25	0	0	6,941q	-3,251q	3,89q			
4-7	5	0,2	25	25	0	1	0	0	0	25	0	0	0	-3,251q	-3,251q			
Σ								376,535	59,741	61,6	-1383,284q	-36q						


$$I_{1-2} = \sqrt{4^2 + 0.6667^2} = 4.0552$$

$$l_{2-3} = \sqrt{4^2 + (2.6667 - 0.6667)^2} = 4.4721$$

$$I_{3-4} = \sqrt{4^2 + (0 + 2.6667)^2} = 5.2068$$

求角 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的三角函数值:

$$\sin \alpha_1 = 0.6667/4.0552 = 0.1644$$

$$\cos \alpha_1 = 4/4.0552 = 0.9864$$

$$\sin \alpha_2 = 2/4.4721 = 0.4472$$

$$\cos \alpha_2 = 4/4.4721 = 0.8944$$

$$\sin \alpha_3 = 3.3333/5.2068 = 0.6402$$

$$\cos \alpha_3 = 4/5.2068 = 0.7682$$

图1.11, a所示基本体系的典型方程为 $\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0$ 。

使用机动法建立影响线

$$X_1 = -\delta_{1P}/\delta_{11} \quad (1.4)$$

式中 δ_{1P} ——桁架上弦由于 $X_1 = 1$ 产生的挠曲线。为求系数 δ_{11} , 算出悬链中由 $X_1 = 1$ 产生的内力。切截出结点(图1.11, 6), 得到 $\Sigma Y = 2N_{1-2} \sin \alpha_1 - 1 = 0$; $N_{1-2} = 3.9414$ 。

切截出结点2 (图1.11, b), 将有

$$\Sigma X = -N_{1-2} \cos \alpha_1 + N_{2-3} \cos \alpha_2 = 0; N_{2-3} = 3.3542$$

$$\Sigma Y = -N_{2-6} + N_{2-3} \sin \alpha_2 - N_{1-2} \sin \alpha_1 = 0$$

$$N_{2-6} = 1.0$$

切截出结点3 (图1.11, r), 得到

$$\Sigma X = -N_{3-4} \cos \alpha_3 + N_{2-3} \cos \alpha_2 = 0; N_{3-4} = 3.9052$$

$$\Sigma Y = -N_{3-7} + N_{3-4} \sin \alpha_3 - N_{2-3} \sin \alpha_2 = 0$$

$$N_{3-7} = 1.0$$

从桁架上切去悬链, 我们得到在力 $X_1 = 1$ 作用时, 桁架将由单位力加荷 (图1.11, a)。利用弹性重物法作出挠度 δ_{1P} 图 (见图1.11, e)。当 $qd = 1$ 时的类似挠度图已于 [49, § 45] 中作出。

系数 δ_{11} 等于 $\delta_{11} = \delta'_{11} + \delta''_{11}$, 式中 δ'_{11} ——由于桁架构件变形沿 X_1 方向产生的位移; δ''_{11} ——由于悬链构件及吊杆

变形沿 x_1 方向产生的位移，为求 δ_{11} ，必须将图1.11, n所示的荷载所引起的轴向力图自乘。自乘的结果等于实际位移上内力的功。但是内力功等于外力功。计算外力功将有

$$\delta_{11}' = \left(1 \cdot \frac{165.167}{E F} + 1 \cdot \frac{289.722}{E F} \right) \cdot 2 \\ + 1 \cdot \frac{341.611}{E F} = \frac{1251.389}{E F}$$

为求 δ_{11}'' 必须完成悬链构件及吊杆图的自乘，

$$\delta_{11}'' = \frac{1}{E F} [1^2 \cdot 3 + 2(3.0414^2 \cdot 4.0552 + 1^2 \cdot 3.6667 \\ + 3.3542^2 \cdot 4.4721 + 1^2 \cdot 5.6667 + 3.9052^2 \\ \cdot 5.2068)] = \frac{1}{E F} 356.131$$

于是

$$\delta_{11} = \frac{1}{E F} 1607.52$$

根据(1.4)将挠度图的所有纵坐标 δ_{P1} 除以 δ_{11} ，我们得出 X_1 的影响线(图1.11, ж)。有了多余未知数的影响线，便可按公式(1.1)在桁架的任意杆中作出内力的影响线。

我们来作内力 N_{9-10} (图1.11, н)及 N_{6-9} (图1.11, п)的影响线。基本体系中内力 N_{9-10}^0 及 N_{6-9}^0 的影响线分别示于图1.11, з及1.11, к上。这些影响线按建立静定桁架影响线的规则来建立(当基本体系中移动力 $P = 1$ 作用时悬链不工作)。为了得到影响线的纵坐标，我们编制了表1.2。

表1.2

点号	N_{9-10}^0	$\bar{N}_{9-10} X_1$	N_{9-10}	N_{6-9}^0	$\bar{N}_{6-9} X_1$	N_{6-9}
7'	0.4444	-0.5477	-0.1033	0.2778	-0.0856	0.1922
6'	0.8889	-0.9611	-0.0722	0.5556	-0.1502	0.4054
5	1.3333	-1.1333	0.2	0.8333	-0.1771	0.6562
6	1.7778	-0.9611	0.8167	-0.5556	-0.1502	-0.7058
7	0.8889	-0.5477	0.3412	-0.2778	-0.0856	-0.3634

图1.9, b所示的超静定桁架是二次超静定的。其基本体系示于图1.12, a, 我们写出典型方程组

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

解方程组得

$$\vec{X} = -A^{-1} \vec{\delta}_P \quad (1.5)$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}; \vec{\delta}_P = \begin{bmatrix} \delta_{1P} \\ \delta_{2P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{P1} \\ \delta_{P2} \end{bmatrix}$$

式中 δ_{P1} ——桁架下弦由 $X_1 = 1$ 产生的挠曲线; δ_{P2} ——桁架下弦由于 $X_2 = 1$ 产生的挠曲线。

使用弹性荷载法作挠度图 δ_{P1} 及 δ_{P2} (见图1.12, 6及B)。在[49, §51]中已经建立了图1.12, a所示桁架的柔度矩阵 A 。挠度图 δ_{P1} 及 δ_{P2} 相当于矩阵 A 的第3及第5列。

挠度图上标出了单位力系数 $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}$ 的值。将 $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{22}, \delta_{P1}, \delta_{P2}$ 代入方程式(1.5), 我们得到 X_1 及 X_2 的纵坐标 (图1.12, r, n)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 213.8328 & 153.1959 \\ 153.1959 & 152.4831 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta_{P1} \\ \delta_{P2} \end{bmatrix} \rightarrow$$