数 学 进 展

代 数 数 论

•裴定一

代数数论的研究对象是代数数域，即有理数域的有限扩张。它虽然是一个古老的数学分支，但由于有着十分深刻丰富的内容，故至今仍是一个活跃的分支，并在数学的其他分支乃至自然科学各学科中不断得到重要的应用。例如，近年来在密码学研究的刺激下，大整数因子分解的研究方兴未艾，其中就有多处以代数数论作为工具。本文拟介绍近年来我国学者在该领域的一些主要工作。

代数数域的三次循环扩张

设$f(x)$为一整系数不可约多项式，整数集合$f(1), f(2), \cdots$的所有素因子的集合记作$S(f)$，即素数p属于$S(f)$的充要条件是，存在整数n，使p为$f(n)$的因子。给定$f(x)$，要决定$S(f)$，这是数论中一个很重要的未解决问题。对一些特殊的$f(x)$，我们可以决定$S(f)$。例如当$f(x)$为二次多项式时，总可假定$f(x)=x^2+a$，则$S(f)$由2及所有使$-a$为模p的二次剩余的素数p组成。当$f(x)$为m次分圆多项式时，$S(f)$中除了可能有m的素因子之外，其余就是模m余1的全体素数。

对于一类特殊的三次多项式，蓝以中[1]给出了以上问题的一个解答。不失普遍性，总可假定$f(x)=x^3+ax+b$，a和b都为整数，设它的判别式$-(4a^3+27b^2)$为一个平方数c^2，这个条件相当于在有理数域上添加$f(x)$的根而得到一个三次循环扩张。定义$N_{b,c}(x, y)=b(x+y)(2x-y)(x-2y)+cxy(x-y)$和$\delta_{b,c}(x,y)=c(x+y)(2x-y)(x-2y)-27bxy(x-y)$，则除了有限个素数外，$S(f)$由满足下述条件的素数$p$组成：存在两个整数$a_1$、$a_2$，使$p$是$N_{b,c}(a_1, a_2)$的因子，而不是$\delta_{b,c}(a_1, a_2)$的因子；或者使$p$是$\delta_{b,c}(a_1, a_2)$的因子，而不是$N_{b,c}(a_1, a_2)$的因子。

上面提到的这个问题，实际上与代数数域的Abel扩张有关。设K为任一代数数域，根据类域论，K的任一有限Abel扩张决定K中在其上完全分裂的一组素理想集合，而且不相同的有限Abel扩张所决定的完全分裂素理想集合也不相同。蓝以中[1,2]对K上的任一三次循环扩张（除二次扩张外最简单的Abel扩张），定出了在其上完全分裂的素理想集合。他还给出了构造K的所有三次循环扩张的方法[3,4]。

李德琅[7]证明了由有理系数多项式x^3-ax-b定义一个有理数域的三次循环扩张的充要条件是，存在三次分圆域中适合某些条件的元素λ，使$a=3N(\lambda)$，$b=N(\lambda)S(\lambda)$。这里$N(\lambda)$和$S(\lambda)$分别为范数和迹。

•裴定一　中国科学院研究生院教授

我们知道，有理数域Q的分圆扩张$Q(e^{2\pi i/N})$是Abel扩张，而Q的任一Abel扩张一定被包含在某一分圆扩张中。因此在Q上添加解析函数e^z在z复平面上某些点($z=2\pi i/N$, N为任一正整数)的值，就可得到Q的最大Abel扩张。对于一般的代数数域，是否也有类似的结果，这正是Hilbert第十二问题的内容。至今，对于虚二次域，该问题已得到了圆满解决。这时，算术模函数起了上述函数e^z的作用。一个模函数$h(z)$的Fourier展开式的系数若都在分圆域$Q(e^{2\pi i/N})$中，则$h(z)$称为算术模函数。设$w=a+b\sqrt{-D}$，其中a、b、D都为有理数，b和D为正的，在虚二次域$K=Q(\sqrt{-D})$上添加$h(w)$就得到K的一个Abel扩张；对所有的h和w，把$h(w)$都添加到K上，就可得到K的最大Abel扩张，这是复乘理论的主要内容。

当$f(x)$为代数数域K上的三次不可约多项式时，$y^2=f(x)$就是定义在K上的椭圆曲线。$f(x)$的根对应椭圆曲线上的二阶点，这时不难把$f(x)$的根表示成二级算术模函数在某点的值。由此，蓝以中[6]指出，任一代数数域的三次循环扩张都可通过添加二级算术模函数在某点的值得到。进而，他发现了二级算术模函数$f_{1,0}(z)$、$f_{0,1}(z)$、$f_{1,1}(z)$所满足的一个关系式。利用这个关系式，他构造了任何类数大于2的虚二次域K的两个无穷类域序列$\{M_n\}$和$\{F_n\}$[6]，每个M_n为F_n的三次非分歧Abel扩张，而$F_n=K(j(\tau_n),f_{1,0}(\tau_n),f_{0,1}(\tau_n),f_{1,1}(\tau_n))$，$\{\tau_n\}$为复上半平面的一个点序列。

代数函数域的若干问题

以F_q表示含有q个元素的有限域，$k=F_q(x)$为F_q上添加不定元x所生成的有理函数域，k的有限扩张称为代数函数域，它有很多性质与代数数域类似。这里，k可以类比于有理数域，k中的多项式环可以类比于有理整数环。关于代数数域的很多研究课题可以搬到代数函数域上。k上的单扩张$k(y)=F_q(x,y)$，x、y适合F_q上的一个多项式$f(x,y)=0$。由此可见，代数函数域与代数曲线有着密切联系。

张贤科[8]研究了$(2,2,\cdots,2)$型代数函数域$L=k(\sqrt{D_1(x)},\cdots,\sqrt{D_n(x)})$，其中$D_i(x)$为$F_q$上无平方因子的多项式.他给出了$L/k$的分类，$k$的素除子在$L$中的分解规律，$L$的整基、判别式和亏格；定义并确定了$L/k$的导子和$\zeta$-函数；证明了$L$的理想类数公式和$L$的(零次)除子类数公式。在这些结果的基础上，张贤科[9]定出了理想类数为1的所有双循环双二次虚函数域和除子类数为1的所有$(2,2,\cdots,2)$(n重)型代数函数域。

分圆函数域是分圆数域的类似。以k^{ac}表示$k=F_q(x)$的代数闭包，在k^{ac}上定义两个自同态：$\varphi(u)=u^q$和$\mu_x(u)=xu$。这里u为k^{ac}的任一元素。对于$R_x=F_q[x]$中的任意一个多项式$M(x)$，定义k^{ac}的一个同态$u^{M(x)}=M(\varphi+\mu_x)(u)$，以$\Lambda_M$表示$k^{ac}$在$M(x)$作用下的固定子域，则$k$的扩域$k(\Lambda_M)$称为分圆函数域，它是$k$的Abel扩张，它的Galois群与$(R_x/M)^*$同构。$\Lambda_M$是循环$R_x$模，以$\lambda$表示$\Lambda_M$作为$R_x$模的生成元，则$k(\Lambda_M)=k(\lambda)$。分圆函数域类比于分圆数域$Q(\xi_m)$，这里$\xi_m$是$m$次本原单位根，而我们知道$\mathrm{Gal}(Q(\xi_m)/Q)$与$(Z/mZ)^*$同构。

k的任一Abel扩张L一定被包含在某一分圆函数域内，设$k(\Lambda_M)$是包含L的最小的分圆函数域。记$H=\mathrm{Gal}(k(\Lambda_M)/L)$，$G=\mathrm{Gal}(k(\Lambda_M)/K)\cong(R_x/M)^*$，则$\mathrm{Gal}(L/k)=(R_x/M)^*/H$。设$A_0=1,A_1,\cdots,A_r$为$(R_x/M)^*/HF_q^*$的一个完全代表系，$\lambda$为$R_x$模$\Lambda_M$的生成元，定义$\varepsilon_i=N_{k(\Lambda_M)/L}(\lambda^{A_i}/\lambda)$ $(1\leqslant i\leqslant r)$为$L$的分圆单位系。冯克勤和程露[10]计算了$L$的分圆单位系中独立单位的个数，给出了分圆单位系独立的等价条件，并定出了具有独立分圆单位系的全部分圆函数域。

设K为k上的n次代数函数域，若k的无限素除子在K上完全分裂为n个素除子，则K称为全实域。设ε为K的一个单位，若$\{\sigma(\varepsilon)\mid\sigma\in\mathrm{Gal}(K/k)\}$中任意$n-1$个元素构成$K$的一个基本单位系，则称$\varepsilon$为$K$的Minkowski单位。余解台[13]对于全实三次函数域K，给出了决定K中一组基本单位系的方法，并证明了全实循环三次函数域一定存在Minkowski单位。对任意代数函数域K，当$r\geqslant4$时，他给出了一个决定K中4个独立单位的方法，并证明了全实四次Galois函数域一定存在Minkowski单位。注意：全实四次Galois代数数域不一定存在Minkowski单位。

设$P(x)$为F_q上首1不可约多项式，$q=p^n$，$K=k(\Lambda_P)$为分圆函数域，K^+为K的最大实子域，$h(K^+)$为K^+的理想类数，$h(K)^-=h(K)/h(K^+)$为K的相对类数。若$p\mid h(K)^-$，则$P(x)$称为第一类不正规多项式；若$p\mid h(K^+)$，则$P(x)$称为第二类不正规多项式。冯克勤和高文云[1]证明了存在无穷个不可约多项式同时是第一类与第二类不正规的。他们同时定出了$p\leqslant269$时的所有二次正规不可约多项式。

分圆数域的独立单位系

设n为正整数，$n\not\equiv2\pmod 4$，以$Q(\zeta_n)^+=Q(\zeta_n+\zeta_n^{-1})$表示分圆域$Q(\zeta_n)$的最大实子域，以$E_n^+$表示$Q(\zeta_n)^+$的单位元组成的乘法群。由Dirichlet单位定理，可知E_n^+中独立单位的最大个数为$(\varphi(m)/2)-1$。C.Levesque提出了下述构造E_n^+的最大独立单位系的方法。设D为n的一些真因子集合，并设$1<a<n/2$，a与n互素，定义$\lambda_a=\zeta_n^{b_a}\prod_{d\in D}(1-\zeta_n^{ad})(1-\zeta_n^{d})^{-1}$，其中$b_a=2^{-1}(1-a)\Sigma_{d\in D}d$。令$C_n(D)=\{\lambda_a\mid2<a<n/2,(a,n)=$

1}，则$C_n(D)$为E_n^+的最大独立单位系，而且$[E_n^+ : \langle \pm C_n(D)\rangle] = h_n^+ i(D)$，这里$h_n^+$为$Q(\zeta_n)^+$的类数。$i(D)$越小表示子群$\langle \pm C_n(D)\rangle$越接近$E_n^+$。Levesque关于指数$i(D)$提出了两个问题:(A)若$D^* = D\cup\{d^*\}$，$d^* \mid n$，$d^* \notin D$，$d^* < n$，是否一定有$i(D) < i(D^*)$?(B)若$d_1 \in D_1$，$d_2 \in D_2$，且$D_1 - \{d_1\} = D_2 - \{d_2\}$，$d_1 < d_2$，是否有$i(D_2) < i(D_1)$?冯克勤[12]在$n = p^\alpha$或$p^\alpha q^\beta$($p$、$q$为素数)的情况下，给出了上述两个问题的解答:在上述情况下，问题(A)的解答是肯定的;在$n = p^\alpha$时问题(B)的解答是肯定的，而当$n = p^\alpha q^\beta$时则是否定的。

二次域的类数

陆洪文和张明尧[14]研究了实二次域带Dirichlet特征的Kronecker极限公式。设$d > 1$，$-k < -1$均为基本判别式，$(k, 2d) = 1$，或$(k, d) = 1$且$4 \| k$或$8 \| k$，他们给出了$h(-k)h(-kd)$的表达式，其中出现Dedekind和，这里$h(-D)$为$Q(\sqrt{-D})$的类数。

张贤科[15]将Ankeny-Artin-Chowla关于二次域类数的许多同余式推广到四次循环数域上。

乐茂华[16]证明了实二次域$Q(\sqrt{1+4k^{2n}})$的类数在n与k满足一定的条件时，是n的倍数。

半整权模形式的提升

权为半整数的模形式的一个重要性质是它到权为整数的模形式的提升映射。裴定一[17]给出了$\Gamma_0(4N)$上权为$k+1/2$的Eisenstein级数的一个特定的子空间与$\Gamma_0(N)$上权为$2k$的Eisenstein级数的一个同构映射。这里k为正整数，N为无平方因子的正整数。

[1] 蓝以中，《数学学报》，2 (1988) 248

[2] 蓝以中，同上，6 (1988) 759

[3] 蓝以中，《科学通报》，16 (1988) 1203

[4] Lan Yizhong (蓝以中)，*Science in China* (SeriesA)，8 (1989) 922

[5] 蓝以中，《数学学报》，2 (1990) 190

[6] 蓝以中，《 数学学报》，5 (1990) 610

[7] 李德琅，《中国科学》A辑，7 (1988) 698

[8] 张贤科，同上，1 (1988) 8

[9] 张贤科，同上，2 (1988) 129

[10] 冯克勤等，同上，6 (1988) 601

[11] 冯克勤等，同上，12 (1989) 1257

[12] Feng K.Q. (冯克勤)，*Chinese Ann. of Math.*, **11B** (1990) 93

[13] 余解台，《数学年刊》A辑，6 (1989) 705

[14] 陆洪文等，《中国科学》A辑，5 (1989) 449

[15] 张贤科，《中国科学》A辑，7 (1988) 688

[16] 乐茂华，《数学学报》，4 (1990) 565

[17] Pei Dingyi (裴定一)，*KEXUE TONGBAO*，6 (1988) 455

环　　论

• 刘绍学　　肖　杰

环论(非交换的结合环)作为抽象代数的一个重要分支，多年来其研究一直囿于其本身范围。但现在环论研究在与群表示论、代数数论、代数几何、代数拓扑等核心数学学科相联系的方面取得了十分丰硕的成果，而且近几年来代数学与几何学、物理学相结合的趋势使环论研究的内容和方法也发生了变化。

量子群理论是一个起源于理论物理，目前正受到各方面数学家重视的领域。从环论的观点看，量子群就是一个既非交换也非余交换的Hopf代数，因此近年来不少环论专家开始热衷于研究Hopf代数的结构。由于有限群分次环和有限群作用下的环可看作Hopf代数作用下代数的特殊情形，一些学者也在努力把环论中相关结果推广到 Hopf 代数中去。国外有S. Montgomery、M.Cohen等人的代表工作，国内则有复旦大学一些同志所做的工作。量子群理论的重点是表示理论，虽然从研究内容来看，它也以Hopf代数、模、范畴、函子等为基本工具，但其指导思想无疑来自于代数群和李代数表示理论。国内已有王建磐等人在这方面做了前沿性的工作。

D-模理论和微分算子环被认为是具有广阔前景的新数学领域，它是用代数手段处理线性偏微分方程组的新方法。所谓D-模就是流形(代数簇)上微分算子芽的环层上的模层，重要的是这里的环又是非交换的结合环。这方面的背景影响了近年来Noether环、分次

• 刘绍学　北京师范大学数学系教授

肖　杰　北京师范大学数学系副教授

环和滤环(filtered ring)的研究，D-模中的微局部分析被代数学家改造成对分次环和滤环非常有效的微局部化方法。还有如holonomic模和非holonomic模的研究等等，这些都给环论研究带来了新的生机，国际上J.T.Stafford、F.Van Oystaeyen等人有不少成果。国内李会师最近的工作也是这种影响的结果。

代数表示论可看成环论与表示论的交叉学科，最近十几年的成果十分丰富和深刻。它离开了按半单和根研究环结构的思路，另辟蹊径，发展了AR-序列、quiver表示、覆盖函子、倾斜函子等技巧，使有限维代数的表示以十分具体、深刻的形式呈现在我们面前。近来，M.Auslander等人以AR-序列为工具又将这一研究拓广到交换代数和奇点理论的研究中去，颇受人瞩目。北京师范大学研究小组近几年来坚持代数表示论的研究，取得了若干前沿性成果。环论作为代数学的一个分支是一门历史较长、内容丰富的学科，可以预计它本身还会有进一步发展，表示论和同调理论将占有重要地位。

环论发展到今天，应该问一问哪些非交换环是“自然”的。从最早的线性变换环到李代数的包络代数、Weyl代数、微分算子环、量子群等都在“自然”环之列。可以设想，今后的非交换几何、代数分析和量子化方面的深入研究将会为我们提供更多的“自然”环的例子，并影响环论的进一步发展方向。

环论研究中计算技术和组合技巧的比重也会加大，研究具体环的结构和表示行为将比以前显得更加重要。

环论研究在我国有良好的基础。1989年5月在西安陕西师范大学召开了全国第三届代数学学术会议。从参加会议的人数来看，环论研究队伍是我国代数学研究队伍中人数较多的一支，而且年轻人很多。从论文反映的研究方向来看，一些原有方向如本原环等有进展，在代数表示论、模范畴、Hopf代数、分次环等较新方向也获得了可喜的成果。下面按我们所能掌握到的材料，介绍这次会议前后我国环论研究的一些情况，或有疏漏，欢迎批评指正。

在过去很长一段时间里，环的结构在半单和根理论方面得到了大量研究，其中本原环是一个基本的研究对象。许永华在这方面有较系统的工作。许永华在规范本原环基础上引进了v-规范本原环的概念，得到了v-规范本原环的矩阵结构；通过构造一类较具体的v-规范本原环，可将一般v-规范本原环嵌入其中。运用v-规范本原环结构，许永华把一些有限性定理推广成无限性形式，比如把通常Faith-Utumi定理扩展到无限Goldie维数形式。他还利用这一概念讨论了无限矩阵的相似问题。在本原代数张量积方面，许永华推广了Azumaya-Nakayama定理，并讨论了与之相关的模范畴等价问题，利用这些结果推广了Lambek-Resco-Small定理等结果。

刘绍学等开展了路代数方面的研究。继刘绍学、罗运伦和肖杰解决了路代数同构基本定理之后，刘绍学又建立了张量代数的同构定理：设Σ和Σ'是两个赋值图，$(D,M)=(D_i, {}_iM_j, i、j\in\Sigma)$和$(D', M')=(D'_\alpha, {}_\alpha M'_\beta, \alpha、\beta\in\Sigma')$是它们的实现，$T$和$T'$是相应的张量代数；若$f:T\to T'$是环同构，则存在双射$\theta:\Sigma\to\Sigma'$使对所有$i、j\in\Sigma$，$D_i\simeq D'_{\theta(i)}$，${}_iM_j\simeq {}_{\theta(i)}M'_{\theta(j)}$。刘绍学进一步讨论了赋值图的几何性质与张量代数的代数性质之间的关系。

国内有不少同志曾致力于解决Szasz的《根论》一书中所提出的问题。这方面湖南师范大学的李传和、扬州师范学院的方洪锦和他们的学生做了不少工作。周毅强讨论了一个环类K的上根，刻划UK是一个超幂零根环类的条件；方洪锦讨论了UM是特殊根的充要条件；蔡传仁刻划了遗传对偶根；江西师范大学的陈培慈讨论了由幂零亚直既约环决定的上根的结构性质。

吉林大学牛凤文等人在环的映射理论、根和链条件方面也有若干研究。牛凤文在较为简洁的导子条件下讨论了素环的诣零性和交换性等问题。郭元春讨论了满足主左理想几乎降链条件的环。

吴品三和蒋滋梅对一类有限环给予了刻划。

薛为民对正合Artin环和Morita对偶性进行了系统的讨论，他还给出5个局部Artin环的例子，从而回答了Fuller、Dlab、Ringel、Hill等人分别提出的一些问题。他又与Fuller合作用代数图形描述Artin遗传环，并证明这种环上最小生成子的自同态环与原来的环有相同的图形。

分次环和Hopf代数是目前国际环论界比较热门的一个研究课题。刘绍学与F.Van Oystaeyen合作，开展了对分次环的Smash积的研究，他们推广了Montgomery、Passman等人的结果，证明了无限群分次环的对偶定理，并给出了它的Smash积是素环或单环的充要条件。刘绍学还得出群分次环的Jacobson结构定理，给出一种方法可以得到所有的群分次本原环。他与Beattie等人合作把环的根性质通过Smash积转化成分次环的根性质。

Montgomery、Passman等人在分次环和Hopf代数方面有较多工作。陈操宇沿着这一方向进行了深入细致的工作，得到了有限群分次环的Smash积有理想交的一个具体刻划。这结果是Montgomery-Passman关于有限群分次环的Smash积为素环或单环的判别的推广。他解决了Montgomery关于Pedersen-Dlesou的一个定理对非交换群也成立的猜想，并将Blattner-Montgomery在域上的Hopf模代数的对偶定理推

广到主理想整环上。后来他又与W.Nichols合作将这一结果继续推广到Dedekind整环上。

1987年以来，在与F.Van Oystaeyen的合作中，李会师提出并系统地研究了非交换的Zariski滤环。所谓一个Zariski滤环是指带滤子链$FR=\{F_n R,\ n\in Z\}$的结合环R，并满足①R的Rees环$\tilde{R}=\bigoplus_{n\in Z}F_n R$是Noether环，②$F_{-1}R$包含在$F_0 R$的Jacobson根中。这类环将代数几何研究中经典的Zariski环由交换的情形推广到非交换情形。它包括有限维李代数的包络代数和很广一类微分算子环。李会师得到了这类环的丰富结构与同调性质，而且他的方法对滤环和分次环研究也有很好的应用。比如，引入了强滤环概念，克服了某些完备性和闭包条件的要求，改进了O.Gabber关于特征族的著名整性定理。

现在，模范畴已成为环论专家研究的中心舞台。在局部化和模范畴理论方面，复旦大学的吴泉水和朱胜林作出了成果。吴泉水给出了完备环的一个挠理论(torsion theory)的刻划，证明了完备环上模范畴的商范畴等价于某完备环的模范畴，这包含了Albu、Nastasescu等人在这方面的结果，也否定地回答了他们提出的几个问题。朱胜林研究了模范畴的商(子)范畴与模范畴的等价问题，给出了模范畴关于一个挠理论的商范畴与模范畴等价的挠理论刻划，证明了交换环模范畴的商范畴与模范畴等价的充要条件是挠理论完备。在特殊模类研究中，朱胜林给出了平坦模均为有限投射模的环的刻划，并给出了有限投射模为局部投射模的若干结果，这解决了Azumaya提出的一个问题。吴泉水和S.Golan讨论了带链条件模的自同态环的诣零子环的幂零性问题，给出了一个幂零指数上界。吴泉水还讨论了域上代数在域扩张下Gelfand-Kirillov维数的变化，在域扩张$F\subset K$条件下证明了不等式$GK\dim_F A\geqslant GK\dim_K A+\mathrm{tr}_F K$。

自从H.Cartan和S.Eilenberg的《同调代数》一书于1956年问世以来，基于模范畴的同调理论便成为环论专家的最主要工具之一。周伯埙于1988年出版了专著《同调代数》，全面系统地介绍了同调代数的基本理论和近年来的发展，也收入了他本人及其学生的一些成果。佟文廷等对环的同调维数、张量积运算及环上K-理论有较多研究。佟文廷在环上多重线性代数的研究中给出了环模张量积的Euler示性数以及与其K_0群的关系。他还在群环的同调维数研究中，对几种维数得到了令人满意的结果。程福长等对半局部环上模的同调行为也进行了研究，得到了若干结果。

代数表示论是本世纪70年代兴起的新数学领域，在环论研究中占有重要地位。不可分解模是代数表示论关心的主要对象之一。肖杰、郭晋云和张英伯证明了A_n类自入射代数上不可分解模由Loewy因子唯一确定和关于Loewy因子多重自由。由于群代数的循环块是A_n类自入射代数，它对群表示论有重要应用。郭晋云给出了有限表示型自入射代数不可分解模由合成因子唯一确定的充要条件。肖杰对有限表示型自入射代数不可分解模结构和各种因子作了详细的研究。杨日欣和肖杰利用平凡扩张手法考虑了B_n和C_n类自入射代数的结构和表示。肖杰还确定了有限表示型平凡扩张代数在一般有限表示型自入射代数中的位置。唐爱萍部分解决了根三方为零自入射代数的稳定等价猜想。

AR-分支的形状是代数表示论研究的主题之一，这方面张英伯有深入的工作。设C是Artin代数稳定AR-箭图的一个分支，若C是周期的，则由Happel和Ringel等人结果知C具有管状，因而剩下来的关键问题是研究非周期稳定AR-分支形状。张英伯定义了AR-分支的生长数的概念，证明了对于生长数小于某一固定常数的分支，著名的Ringel猜想是正确的，即这种AR-分支只可能具有如下形式：ZA_{∞}^{∞}、ZA_{∞}、ZD_{∞}、ZB_{∞}和ZC_{∞}。张英伯还给出了一般非周期稳定AR-分支结构，她证明这时$C\simeq ZB$，B是不含循环道路的赋值图。以张英伯这一定理为基础，国际著名代数表示论专家Ringel、Crawley-Boevey等人为构造以某些ZB为AR-分支的代数而作了进一步研究，由此可看出张英伯定理是代数表示论研究中的一个重要工作，无疑具有国际水平。

调　和　分　析

•陆善镇

近几年来，国内调和分析的研究取得了显著的进展。特别值得指出的是，在程民德主持的1988年南开调和分析年会的推动下，从事调和分析研究的队伍日益壮大，涌现出一批卓有才能的青年学者，调和分析的

•陆善镇　北京师范大学数学系教授

研究领域也不断得到开拓。本文对1988年以来国内调和分析进展作一概述，同时涉及近期国际重要进展。

R^n 上调和分析

同国际调和分析的研究状况一样，国内从事R^n上调和分析的研究队伍是调和分析研究中最庞大的，而且所获得的成果也是最丰富的。现分几个专题介绍。

Calderón-Zygmund算子　Calderón-Zygmund奇异积分理论的发展已经历了3个阶段。第一阶段是处理卷积型算子，第二阶段是研究某些特殊的非卷积型算子，而第三阶段则研究一般的非卷积型算子。对于后者，其L^p有界性的研究可归结于L^2有界性是否成立。为判定算子的L^2有界性是否成立，便产生了著名的$T(1)$定理，这是由G.David和J.-L.Journé建立的。但$T(1)$定理并不适用于Lipschitz曲线上的Cauchy积分算子。为此，他们同S.Semmes合作在1984年得到了著名的$T(b)$定理。关于$T(b)$定理的原始证明是极其复杂的。后来，相继产生了Tchamitchian的小波证明和G.David的鞅论证明，但它们仍然比较复杂。最近，G.I.Gaudry、龙瑞麟和钱涛给出一个关于Clifford值$T(b)$定理的鞅论证明。这是目前所见到的最为简单的证明。另外，韩永生同S.Hofman合作建立了Besov空间和Triebel-Lizorkin空间上的$T(1)$定理，并对核的光滑性条件作了减弱。

仿交换子　仿交换子是J.Peetre于1984年引进的一类算子，它概括了70～80年代出现于算子代数、非线性P.D.E，以及拟微分算子中的许多算子。S.Janson和J.Peetre[1]系统地研究了仿交换子的L^2有界性和Schatten-von Neumann S_p性质，这里$1\leqslant p<\infty$。当$0<p<1$时，S_p的刻划是由彭立中给出的。彭立中[2]还给出S_p的紧性刻划。随后，彭立中和钱涛[3]将Coifman、Meyer等提出的若干多线性奇异积分算子纳入仿交换子的范畴来处理，从而得到它们的S_p估计。

Hankel算子　一维Hankel算子的S_p估计是由Peller、Coifman、Rochberg、Semmes等人于1980年初建立的。对于高维情形，存在着不同方式的推广。邓东皋和彭立中[4]利用Siegel域上的复分析得到了齐次自伴锥上高维Hankel算子的S_p估计($1\leqslant p<\infty$)。邓东皋和樊启洪[5]得到了C^n单位球Hardy空间上Hankel算子的S_p估计。此外，彭立中[6]将Rochberg的一维Paley-Wiener型Hankel算子的S_p估计推广到$0<p<1$的范围和高维方体中去。

粗糙核算子　A.P.Calderón和A.Zygmund于1956年建立的一个奠基性工作揭示了奇异积分算子核的光滑性在研究算子的有界性时并不起本质的作用。他们利用沿球面方向没有任何光滑性的粗糙核来代替以往的光滑核，结果仍能保持算子有界性的结论。近年来其他领域的发展，推动了对许多粗糙核算子的研究。我们知道，R.Fefferman在1978年研究了Calderón-Zygmund奇异积分的下述推广形式:

$$T_{\Omega,h}(f)(x)=\text{P.V.}\int_{R^n}h(|y|)\Omega(y/|y|)|y|^{-n}f(x-y)\,dy,$$

其中，$h\in L^\infty(R_+)$，Ω则为零阶齐次函数，而且$\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(x')d\sigma(x')=0$。施咸亮最先于1986年将R.Fefferman工作中核的条件作了减弱[7]。随后，孙颀彧在他的博士学位论文中进一步将施咸亮的条件减弱到$\Omega\in L\log^+L(\Sigma_{n-1})$。另一方面，江寅生和陆善镇运用块分解的技术将施的条件减弱为Ω属于某一类由块生成的空间[8]。同Heisenberg群上分析问题密切联系的下述振荡积分算子是由F.Ricci和E.M.Stein在1987年首先研究的:

$$Tf(x)=\text{P.V.}\int e^{iP(x,y)}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}f(y)dy,$$

其中$P(x,y)$为x和y的实值多项式。他们在研究T的L^p有界性时，要求核$K(x)=\Omega(x)/|x|^n$具有C^1-连续性。1990年仙台调和分析会议上，陆善镇和张严的论文将这一要求减弱为$\Omega\in L^q(\Sigma_{n-1})$，$1<q\leqslant\infty$，从而使核的光滑性要求大大降低。

加权模不等式　自1982年E.T.Sawyer解决了Hardy-Littlewood极大算子的双权模不等式的特征后，国内外学者相继考虑了其他算子的双权模不等式问题。首先值得提到的是，龙瑞麟和聂伏生在1988年南开调和分析会议论文中指出，由分数次积分算子I_α的双权弱(p,q)型不等式即可推出双权(p,q)型Sobolev不等式；而以往人们则需要I_1的双权强(p,q)型条件。对于两权相等的情形，仍遗留下不少的问题。例如，极大Bochner-Riesz平均算子的幂权不等式问题最早是由陆善镇在1986年研究的。最近，一个准确的负幂次幂权L^2模不等式已由Carbery、Rubio de Francia和Vega[9]建立。对于缺项形式的极大Bochner-Riesz平均算子，其准确的幂权L^2模不等式是由Carbery[9]，以及独立地由马柏林、刘和平和陆善镇[10]建立的。孙颀彧在博士学位论文中还对一般的权函数讨论了类似的问题。此外，王斯雷在1988年新加坡分析会议论文中讨论了如下一类极大算子$\mu_{\lambda,v}(f)$的加权模不等式:

$$\mu_{\lambda,v}(f)(x)=\sup_{y>0}\left(\int_{R^n}|u(x-t,y)|^v y^{-n}\left(\frac{y}{y+|t|}\right)^{\lambda n}dt\right)^{1/v},$$

其中$u(x,y)=(Py*f)(x)$，$1<\lambda\leqslant v<\infty$。最后，张严在博士学位论文中以及施咸亮、胡伟在南开会议论文中

均考虑了振荡积分算子的加权模不等式问题。值得指出的是张严使用了一个较新颖的方法——变测度的算子插值法。

函数空间　利用H^p空间的实变理论和方法，人们可以研究某些新的空间或者某些空间的新特征。韩永生曾引入一类新的Hardy型空间$H_0^{p,q,s}$，并研究了这类空间的某些实变特征。他建立了Riesz位势算子在$H_0^{p,q,s}$上的有界性[11]。乘积空间上H^p原子分解中消失矩的最佳值问题也首先被韩永生[12]就$H^p(R\times R)$的情形给出答案。邓东皋和韩永生[13]通过定义ε-算子族给出了Besov空间和Triebel-Lizorkin空间的新特征。最后需提及的是，刘和平在他的博士学位论文中对弱H^p空间$(0<p<1)$给出了原子分解的特征，并研究了这种分解特征在奇异积分算子有界性中的应用。

H^p空间实变理论在逼近论中的应用　由于H^p空间$(0<p<1)$不是线性赋范空间，故许多处理经典逼近问题的方法对此失效。直到70年代末，复H^p空间中的逼近理论才有所发展，但用到的方法严重依赖于函数的解析性质，不容易推广到高维。人们自然想到70年代建立起来的H^p空间的实变理论很可能为H^p上逼近问题提供新方法。首先进行这种尝试的是P.Oswald，他运用实分析同复分析相结合的方法得到了一维大于临界阶的Riesz平均在H^p中逼近的量化估计。随后陆善镇运用实变方法得到了一维临界阶的Riesz平均在H^p中逼近的量化估计，这里他提出了一种适合于临界阶Bochner-Riesz平均在H^p中逼近的尺度。接着，江寅生、刘和平和陆善镇[14]提出了第二种适合于临界阶Bochner-Riesz平均在$H^p(T^n)$中逼近的尺度。涉及这种尺度所建立的BR平均在H^p中逼近的量化估计在[15]和[16]中完成。对于一般的乘子算子，刘智新和陆善镇在南开会议论文中系统地研究了它们在H^p中的逼近问题。

流形和李群上的调和分析

首先值得指出的是王斯雷、陈杰诚和骆程在流形上调和分析领域做了大量的工作。他们建立了热核的导数估计，研究了正曲率流形上的Hardy空间，建立了极大函数与平方函数的比较关系，给出了H^1与BMO的多种特征刻划[17,18]。

关于李群上的调和分析，国内学者在紧李群上的研究是比较充分的。例如，范大山[19]研究了紧李群上Fourier级数球形平均的收敛性；郑学安[20~22]分别就紧李群上Fourier级数方形平均的收敛性、紧李群上Dirichlet核的Lebesgue常数的精确估计，以及紧李群上H^p空间的极大Poisson积分刻划的新证明做了许多工作。此外，郑学安、许增福和赵和生[23]还系统地研究了紧李群上的多项式逼近问题。

除紧李群上的工作外，近年来Heisenberg群上的分析问题也得到了研究。刘和平在博士学位论文中较系统地研究了Heisenberg群上H^p空间的乘子理论和Riesz平均在H^p上的有界性。他还在南开会议论文中给出了Heisenberg群上弱H^p空间的原子分解特征。孙利民在他的博士学位论文中定义了一类齐次群，它以Heisenberg群为其特例。他通过群Fourier变换计算了这类齐次群上sub-Laplace算子的特征函数及基本解，进而建立了其上L^2函数的特征展开。对于正规李群，陈杰诚[24]建立了其上热核的导数估计及其应用。

不连通的局部紧群上的调和分析

首先值得指出的是郑维行、苏维宜、江惠坤等[25]将郑维行于1985年定义的P型导数推广到一般局部域上，并证明了导数的Fourier变换公式和微积分学基本定理。同时，国内学者对局部域上的逼近恒同核也研究得相当充分。例如，苏维宜[26]和江惠坤[27]分别涉及了Poisson型核和Valle Poussin型核。苏维宜[28]还对一般局部域研究了拟微分算子在L^p空间和Besov空间中的有界性。郑维行得到了局部域上函数自相似性的充要条件，由此导出了经典三进Cantor函数的展开式，后者为进一步研究分形(fractal)提供了思想。

关于局部紧Vilenkin群上的调和分析，苏维宜和江惠坤做了较多的工作。例如，苏维宜利用拟微分算子、象征类定义了Vilenlin群上函数的导数，进而建立了导数的Fourier变换公式和微积分学基本定理。江惠坤将郑维行于1983年定义的导数推广到a进群上。此外，C.W.Onneweer和苏维宜[29]研究了Vilenkin群上齐次Besov空间的特征。

其他

最近，R^n上调和分析中某些结果已被潘文杰[30]推广到Coifman-Weiss意义下的齐型空间上。例如，她建立了齐型空间上的分数次积分与极大函数的加权模不等式，研究了由一类恒等逼近确定的极大算子的弱(1,1)型和强(p,p)型$(p<1)$。

D.Müller和王昆扬定义了Bessel位势空间的拓广形式L_φ^2，并研究了由局部Riemann-Liouville空间RL$(2,\alpha)$上乘子所确定的极大算子在L_φ^2上的有界性质，由此可导出一些已知的经典结果。

本文写作过程中，得到了北京大学邓东皋教授、中国科学院数学研究所龙瑞麟研究员、南京大学苏维宜教授、安徽大学郑学安博士和杭州大学陈杰诚博士的大力支持和帮助，作者对他们表示衷心的感谢。

[1] Janson S. *et al.*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1 (1988) 467
[2] 彭立中，*Ark. Math.*, **26** (1988) 315
[3] 彭立中等，*ibid.*, **27** (1989) 145
[4] 邓东皋等，《数学学报》，5 (1988) 623
[5] 邓东皋等，《北京大学学报(自然科学版)》，3 (1988) 257
[6] 彭立中，*Integral Eq. and Operator Th.*, **12** (1989) 567
[7] 施咸亮，《数学研究与评论》，4 (1988) 1
[8] 陆善镇等，*Spaces Generated by Blocks*, BNU Press (1989)
[9] Carbery A. *et al.*, *J. London Math. Soc.*, **38** (1988) 513
[10] 马柏林等，《北京师范大学学报(自然科学版)》，2(1989)1
[11] 韩永生，*Approx. Th. & Its Appl.*, 1 (1988) 19
[12] 韩永生，《科学通报》，**34** (1989) 617
[13] 邓东皋等，《北京大学学报(自然科学版)》，3 (1990) 267
[14] 江寅生等，*Approx. Th. & Its Appl.*, 2 (1990) 28
[15] 陈国良等，*ibid.*, 2 (1989) 39
[16] 刘和平等，*ibid.*, 3 (1990) 1
[17] 王斯雷等，《中国科学》A辑，8 (1989) 796
[18] 陈杰诚，《数学学报》，4 (1990) 505
[19] 范大山，《数学研究与评论》，1 (1988) 51
[20] 郑学安，《数学学报》，4 (1988) 443
[21] 郑学安，《数学年刊》A辑，4 (1990) 447
[22] 郑学安，《东北数学》，3 (1989) 301
[23] 郑学安等，《数学进展》，2 (1990) 199
[24] 陈杰诚，《科学通报》，24 (1988) 1847
[25] 郑维行等，*Approx. Th. & Its Appl.*, 3 (1990) 48
[26] 苏维宜，《中国科学》A辑，6 (1988) 641
[27] 江惠坤，*Approx. Th. & Its Appl.*, 1 (1990) 65
[28] 苏维宜，*ibid.*, 2 (1988) 119
[29] Onneweer C.W. *et al.*, *Studia Math.*, **93** (1989) 17
[30] 潘文杰，《北京大学学报(自然科学版)》，5 (1990) 543

数 理 统 计

• 成 平

1988年以来，我国数理统计界的学术空气进一步活跃，引进了许多国际上新出现的分支，例如非线性回归[1]、广义回归[2]、生存分析[3]、回归诊断[4]、统计样条[5]、L_1模统计[6]、半参数模型[7]等，还结合中国数论研究的长处，开展了数论在统计中应用的研究[8]。加上以往已开展研究的时间序列、多元分析、投影寻踪、自助法、刀切法、可靠性统计、实验设计、抽样检验与抽样调查、判决函数等，我国的数理统计研究已趋向全面和成熟。另一方面，应用统计的研究也得到了加强，出现了一批可喜的成果。同时，我国数理统计研究队伍中，年轻人的力量正在不断成长；在一些全国性学术会议上，40岁以下的占2/3之多。

我国数理统计界学术空气的进一步活跃，还表现在大型学术活动频多、学术出版物丰富上。如概率统计学会第四次年会(1990年10月，新安江)、第三次中日统计学术讨论会(1989年11月，东京)、记念许宝　教授八十寿辰学术讨论会(1990年9月，北京)、泛华统计学会第一届学术讨论会(1990年12月，香港)等。南开数学研究所还于1988～1989年举办了“概率统计年”活动。目前，概率统计方面的全国性杂志有3种，均保持正常出版。此外，尚有多种概率统计方面的专著和论文集出版。

现将1988～1990年我国数理统计研究成果介绍于下。或有疏漏，还请谅解。本文提到的成果，除列出文献者外，大多可在上述学术活动的论文集中查到。

投影寻踪、刀切法和自助法

投影寻踪　成平和李国英获得了一批重要结果，他们使用了经验过程的工具来研究投影寻踪(PP)。张健提出了以众数为投影指标的聚类方法，给出了最优方向指标值在一定条件下的渐近正态性。在检验方面，唐湘濂和李国英导出了PP-U统计量的渐近分布；李国英和施沛德构造了多元位置、散布度和独立性的PP型检验，还讨论了PP-L统计量的自助法逼近；蔡越虹、李国英和查文星相继讨论了PP型Kolmogorov、Cramér-von Mises和Neyman优度检验及渐近分布；还有人讨论了自助法逼近；张健和成平对PP检验的渐近功效给出了一般性定理。在散布度估计方面，崔恒健给出了由李国英和陈忠琏所给出的PP估计为定性稳健、强相合的充要条件；张健和朱力行在特征根

• 成　平　中国科学院系统科学研究所所长，研究员

全不相等或者全相等的条件下证明了此估计的渐近正态性，同时证明了它的样本特征根、特征向量也渐近正态；张健、朱力行和成平研究了PP型Kolmogorov统计量和Cramér-von Mises统计量尾部概率的上下界，指出在柯氏统计量中，在分布被球对称分布所控，以及有界随机向量的条件下，这些上下界的阶一致，换句话说，除系数外，已不能改进了；他们还探讨了含参数时PP型柯氏统计量的上界；留美学生孙嘉阳在其博士学位论文中对PP型Friedman和Hall统计量给出了尾部概率较精细的公式；留法学生李汉萍在其博士学位论文中用微分几何研究了投影寻踪的某些近似分布。关于PP统计的应用也开始取得成果。例如成平、朱力行和魏岗给出了轧钢时金属球寿命的渐近分布以及尾部概率的上界，并用数论方法模拟计算出了寿命分布的期望、方差及分布的经验公式；戎海武用PP回归建立了歼击机发射导弹的数学模型；邓传玲用PP回归处理了水文数据，获得了好结果；史久恩利用PP方法作天气预报取得成功。

刀切法　施锡铨等通过刀切U统计量的泛函，得到了渐近正态分布的Berry-Essen界。赵林城刀切样本中位数d次，解决了在样本量n和d同时趋于无穷大时刀切一次而方差估计不相合的难点。邵军[9]对可微统计量提出了一种改进的刀切估计，得到了渐近方差相合估计。

自助法和随机加权　除已在前面介绍过的一些用自助法逼近PP型统计量的成果外，涂冬生和成平[10]对非截尾型L统计量的自助法逼近证明了其强相合性及自助方差的强收敛性。在随机加权方面，郑忠国等[11]继续深入研究，解决了$1/\sqrt{n}$相合M估计序列的随机加权统计量，证明了以$o(n^{-1/2})$逼近真实分布；他们还讨论了样本中位数误差分布的渐近展开，引进了随机加权逼近，也达到了$o(n^{-1/2})$；他们还研究了误差分布为独立而不同分布线性模型参数估计的随机逼近；他们也研究了T统计量的随机加权法，逼近精度达到了$o(n^{-1/2})$。

L_1模原则

利用L_1模和L_2模来探讨参数估计的准则，过去曾有过很大争论。由于当时数学水平及计算工具的限制，L_2模得到了发展，而L_1模没多大发展，但近年又重新活跃起来。陈希孺、白志东、赵林城和吴月华[6]特别研究了线性回归系数最小L_1模估计渐近正态性问题，改正了文献中的错误，而且条件也减弱了，接近充要条件。他们从L_r模出发研究了M估计问题，在很弱的条件下建立了估计的相合性[12]；对于2^d型离散密度的正交级数估计，他们建立了达到$O(n^{-2})$速度的充要条件，而且其收敛速度是不能再改进的[13]；对连续密度的直方图估计，他们建立了L_r收敛的充要条件[14]。柴根象等证明了线性模型误差密度非参数估计的L_1模具有指数阶概率收敛速度及渐近正态性。杨自强给出了一个简单有效的L_1模非线性曲线拟合。郑忠国解决了非参数估计L_1模最优收敛问题；他还在L_1模意义下解决了非参数回归核估计的一般与广义的Cross-Validation方法的最优性问题。

数论在数理统计中的应用

数论专家王元与方开泰合作，开始了数论方法在统计中的应用研究。Monte Carlo法就是建立在数论基础上的，但要在多元分析中应用，就必须解决球内、球面上和单纯形上的均匀布点问题，也就是要解决上述区域的伪随机数，特别是小样本的伪随机数问题。王元和方开泰[8]解决了此问题。方开泰和他的学生还把这个方法用来求极大似然估计解，求连续椭球分布的分量和表示点，并用于试验设计(建立了一种均匀设计，已为应用单位采用)，用于求轧钢金属球寿命分布，用于大威力武器瞄准点的选择，用于检验正态性的用投影寻踪的Skewness和Kurtosis方法，皆取得了较好的效果。

回归分析

回归始终是统计研究的主题，因为它最能反映从实际数据找规律的思想。虽然它是一个古老的题目，但今天仍然放光彩，不断有新内容增添和新分支出现。

非线性回归　研究非线性统计一个重要工具是由Efron发现的微分几何方法，他首先对单参数指数族引进了统计曲率的概念。Amari建立了统计流形的Riemann几何框架。Baka及Watts对非线性回归定义了两种统计曲率。Cook利用统计曲率研究了统计诊断的一般理论。我国是由韦博成[1]首先用几何来研究非线性统计问题的，其中主要是非参数回归。Efron提出把指数族μ估计$\hat{\mu}$的方差分解为CR下界＋曲率项＋更高阶项，把μ估计$\hat{\mu}$的信息损失分解为单个样本的信息×统计曲率＋高阶项；Amari引进了辅助量a，建立了估计$\hat{\mu}$的条件期望和条件方差的分解式，以及$\hat{\mu}$的泛函渐近以曲率为方差的正态分布。这些都被韦博成和他的学生推广到非线性回归模型。他们还提出了计算LS估计各种矩的统一方法，同时求出了预测值的偏差和方差的二阶近似公式；他们还研究了带线性约束以及误差为球对称分布的非线性回归问题。朱力行给出了非线性回归最佳投影方向估计的相合性。吴诚鸥[15]探讨了通过参数变换使解轨迹上参数效率为零的可能性。申维[16]研究了非线性回归误差估计的自助法逼近，

证明了有渐近正态性。

线性回归 郑忠国[17]讨论了一般回归系数方向的估计，他用的是非参数方法，从而避免了李克昭用MLE法而要求苛刻的条件。安柏庆提出了回归变量的快速选择法。吴耀华[18]也研究了线性中位回归的变量选择。王松桂[19]研究了两级抽样回归模型：当协方差阵含有未知的类内相关系数ρ时，设计阵满足何种条件可使回归系数估计与F检验不受ρ的影响？他对最小二乘估计与似然比F检验的稳健性给出了充要条件。陈希孺与Krishnaian[20]合作提出了回归线性性的假设检验办法，证明了此检验的相合性，得到了渐近势的表达式。王松桂提出了线性模型中最小二乘估计的一种效率。

非参数统计与半参数模型

国内非参数统计研究的兴趣仍然在非参数回归及密度函数估计方面。一方面继续研究完整数据情况下的估计，例如柴根象和苏岩研究线性模型误差项分布密度的非参数估计，证明了所给估计的渐近正态性及L_2模收敛；洪圣岩[21]证明了密度泛函非参数估计的重对数律、中心极限定理及不变原理。另一方面则发展到截断样本情况。例如李金平[22]给出了非参数回归的强相合估计；游凛峰[23]给出了非参数回归最佳收敛速度的近临估计。此外，陈希孺、方兆本、李国英和陶波所著的《非参数统计》一书出版。在半参数模型方面，Bickel和王永雄向国内学者作了介绍，有关研究也随之开展。成平和朱力行[24]在半参数模型下建立了一个强相合的密度函数估计，它比非参数估计要好。成平和许文源[25]研究了密度函数含有奇异点的核估计，并指出其在半参数模型的应用。陈桂景等则讨论了半参数截断族中的渐近有效估计，纠正了文献中某些错误。

参数估计的容许性

参数估计的容许性一直是国内统计学工作者感兴趣的课题。吴启光继续了这方面的研究。他和他的学生在研究了随机和非随机线性模型参数及其线性组合的线性估计在平方损失和矩阵损失下是可容许的一系列充要条件之后，转而研究可容许损失估计和minimax损失估计；对两类截断型分布族在参数空间受限制和不受限制条件下，基于参数估计可容许性，他们给出了一类可容许的损失估计，其中有的有minimax性；在同时估计几个损失时，他们分别给出了多个损失估计的容许性，其中包含许多实用分布族的例子。他们还考虑了正态线性模型，求得了回归系数的线性组合平方损失的一致最小风险。在一些平常估计不容许而提出改进估计的研究方面，邹国华[27]和刘金泉[28]获得一些结果。叶慈南[29]和吴志东[30]对线性模型中方差分量估计的容许性进行了研究。

生存分析

北京大学可靠性组研究了双向删失数据情形的置信限。在分布对所含参数θ有单调性的条件下，他们给出了θ的最优置信区间。汪嘉冈在随机删失数据的情况下，证明了分布的Kaplan-Meier估计的强一致性收敛性(区域有条件)。郑祖康[3]则证明了此估计强一致性收敛速度达到了重对数律；他还在独立不同分布的条件下证明了Kaplan-Meier估计在半直线上约收敛。T.L.Lai和郑祖康[3]用Kaplan-Meier估计思想讨论了回归系数估计的收敛速度及渐近正态性。郑祖康[3]在随机删失数据的情况下讨论了非参数回归估计的强收敛性。陈家鼎[31]证明了随机截尾下Weibull分布参数的MLE的相合性。涂冬生[32]给出了定数定时的混合型寿命试验参数的MLE和Bayes估计及其渐近性质。

多元分析

张尧庭和朱晓冬[33]研究了两个随机向量相关性的度量，证明了k组随机向量的相关系数在他们所给的定义下是唯一的，这个定义也是Gupta定义的推广。张尧庭和胡飞芳[34]论证了定性材料多变量之间的独立性与不相关性的关系，用典型相关的处理方法获得了一些新的统计量。徐承彝[35]研究了$Y=X_1BX_2+U\varepsilon$的最小二乘估计。周方俊[36]研究了带遗失数据的一类多元线性模型的MLE。方宏彬和滕成业[37]研究了椭球等高分布中非中心矩阵变元F分布和Beta分布，给出了它们的分布密度和特征根分布级数表达式。张帼奋[38]则建立了椭球等高分布非中心Cochran定理。单兆森[39]研究了多元污染正态分布的线性判别，在两个位置参数已知的条件下，给出了条件误分率及无条件误分率渐近分布。吴可法和范金城[40]讨论了多重线性函数关系模型在一组变量真值满足线性关系，测量值有误差的情况下的参数估计的容许性。

时间序列

这方面取得好成绩的是北京大学和中国科学院应用数学研究所。在北京大学，江泽培领导了一个讨论班，培养了几位有水平的博士生和硕士生，例如黄大威、李贵斌、何韦元等。他们研究了平稳的和非平稳的ARMA模型(包括平稳的ARMA、ARUMA及一般的ARMR模型)的阶和参数的估计[41]，获得了新的结果。他们在误差项只满足鞅差的条件下，证明了这些估计有强相合性，并且有重对数收敛速度。他们有的做了模拟试验，比较了几种不同估计效果；有的则研究了个别

估计的渐近正态性。同时他们还在统计场序列模型研究方面取得了进展，对二维统计场序列的ARMA模型的特征作了研究，特别是对二维AR模型统计场序列，证明了它是一维AR模型的副本(counterpart)，并在此模型下给出了自相关协方差及自相关系数的估计，而且此估计的一致收敛速度达到了$O((\log\log n/n)^{1/2})$，即达到了重对数律的速度，同时参数和阶的估计也有强收敛性，收敛速度也达到重对数速度。安鸿志[42]也研究了非平稳的ARMA模型参数的估计，他是通过估计数据平方和收敛速度来估计非平稳部分系数LS估计的收敛速度的；在另一篇文章[43]里他考虑了$\sum_{t=1}^{n}\chi^2(t)/t^{2d}\log n$的极限性质。他最近研究了非负AR模型，利用非负性，得到了参数更快速的估计；他还与程兵合作，利用Kolmogorov-Smirnov统计量来检验时间序列的非线性。程兵[44]给出了线性平稳过程的协方差和均值估计的大偏差结果。张金明[45]得到了平稳正态序列协方差函数和谱函数估计的一致收敛速度。常学将[46]通过计算样本协方差阵等有关矩阵的特征根而得到了AR模型的阶的估计，讨论了高阶Yule-Walker估计的渐近性质。

Bayes统计与经验Bayes统计

最近几年国内开始注意Bayes统计的研究，中国科学院系统科学研究所专门为此召开了一次Bayes统计的学术讨论会，事后在《数理统计与应用概率》1990年第4期出了专辑。成平和陈希孺对Bayes统计作了一般性介绍，谈了他们的看法；何国伟从工程角度谈了对验前分布的理解；耿直谈了不完全离散数据的Bayes分析；茆诗松和唐德钧谈了Bayes区间估计的近似算法；发表看法的还有王玲玲、李国英、吴启光、费鹤良、周源泉等人。邵军[47]证明了损失函数一致有界时，Bayes估计是后验分布的连续泛函，因此是稳健的。史建清和姚奇伟[48]对多元线性模型转变点进行了Bayes统计推断。对于经验Bayes估计(EB)，国内有一些工作者在研究。陶波[48]和陈希孺部分地解决了Singh提出的离散指数族均值EB估计收敛速度达到$O(1/n)$的猜想。陶波[49]还证明了Robbins提出的线性EB有最好一致收敛速度。钱伟民[50]则证明了正态分布参数的EB估计收敛速度可任意接近$O(n^{-1/2})$。童恒庆[51]研究了线性回归系数与方差联合EB估计的收敛速度。邵军[52]给出了异方差线性模型误差方差的EB估计，并给出了EB估计的偏差和方差的渐近展式，证明了有比常用方差估计更小的均方误差。高集体[53]研究了均匀分布$U(0,\theta)$所含θ的EB估计，讨论了此估计及泛函的收敛性及其极限分布。王命宇和朱燕堂[54]构造了自回归模型系数的EB估计，证明它的收敛速度可任意接近1。为了介绍Bayes统计，张尧庭和陈汉峰出版了《贝叶斯统计推断》一书。

其他理论成果

吴传义和陈鸿健[55]继续研究指数族的结构，给出了由方差是均值函数而能确定自然指数族的充要条件。吴传义[56]导出了正态分布Bh阵诸元的表达式。在试验设计方面，茆诗松、马逢时和吴建福[57]提出利用正交表的序贯淘汰水平法，既考虑了正交表整齐可比性，又克服了主效用分析法的不足。周赛花和刘婉如[58]给出了带有源滤波器的正交设计。关颖南[59]考虑了单纯形-中心设计的L_x最优观察分配。项可风和杨振海[60]用回归模型的展开进行试验设计，提出了广义正交设计的概念。项可风和吴启光还出版了《试验设计与数据分析》一书。

应用统计

可靠性统计　这是与工业生产有密切联系的应用统计，特别是高技术、尖端工业更注意这个方面的发展，航天航空部曾予支持。一些方法研究反映在《数理统计与应用概率》1989年第4期上。这本杂志专门辟了“可靠性工程”一栏。胡昌寿主编出版了《可靠性工程——设计、试验、分析、管理》。周源泉和翁朝羲用Bayes、信任概率以及经典统计观点，对可靠性增长，系统可靠性的估计、评定，以及可维修性系统的可靠估计做了一系列工作，对各种方法作了对比，写了《可靠性评定》一书。成平、李国英和吴传义[61]做了发动机结构及性能可靠性评定。北京大学可靠性组做了一个复杂系统的效能分析，他们的做法基于模拟，受到应用单位好评。近两年应用单位提出无失效数据的处理问题，茆诗松、杨振海、郑忠国和李国英都参加了研究，并专门进行过一次讨论。戴树森研究了飞机的疲劳载荷谱的某些方法，受到应用单位的很高评价。他还研究了由Weibull子系统数据综合系统可靠度置信下界。

时间序列的应用　时间序列的研究有一个专业委员会，活动频繁。在各种预报、医学上应用都取得很大进展。谢衷杰编写了《应用时间序列分析实例选讲》，他用时间序列的方法处理动态海洋数字重力仪数据，处理人造卫星TWTA的非线性交扰调剂，检测天王星光环，对铁路货运量进行预报，研究工业噪声下听力的损伤问题，都取得了成功。特别是应用于生理学，获得了好效果，找到了分辨先天愚儿童与正常儿童的办法，澄清了生理学界对此问题的分歧。他还和叶杭生[62]用频域主成分分析法发现了视觉诱发电位与航空飞行智能有显著的相关性。中国科学院应用数学研究所运用时间序列ARIMA季节性模型作天气预报也取得成功。

数理统计在经济方面的应用 这方面应用已有良好的开端。如陈锡康每年4月用回归加经济原则对全国粮食产量进行预测，数年预测结果基本符合国家统计局公布的数据，得到中央有关部门的赞扬，且已通过部级鉴定。张永光分析了科技进步对国民经济的作用。沈世镒研究了投资决策的计算问题。在概率统计学会第四次年会上，有人用统计办法讨论了国内经济中出现的市场疲软问题。宋俊杰用多元时间序列模型及1972～1988年统计资料，对中国居民住宅消费水平作了长期预报。

水文、气象预报 丛树铮和胡四一[63]介绍了水利界用数理统计方法研究洪水频率的一些结果和问题。曹鸿兴等[64]在气象水文预报中提出了统计模型选择的双评分准则。陈少玲[65]用惠州水文站24年资料建立了预报的平稳时序模型。李景玉和徐宗学[66]运用点过程作了洪水风险率的分析。

抽样调查 近年来，统计工作者冲破思想障碍，开始用抽样调查作为统计数据的手段，并且进一步科学化。冯士雍等[67]设计的中国儿童状况抽样调查方案及数据处理方法，获得联合国儿童基金会的好评。冯士雍等[68]还做了全国科技人员现状及人员流动情况的抽样调查；他还设计了中国成年人体测量抽样[68]，根据抽样结果制订了服装型号的国家标准。报刊上常看到抽样调查结果公布，可见抽样调查已开始普及应用。

其他 不少工作者把数理统计用来研究教学，有的研究体育。可以说数理统计方法在各行各业都发挥着作用。为了广泛应用，这几年制订了统计方法的8个标准，并已公布实行。

[1] 韦博成，《应用概率统计》，4 (1988) 394
[2] 王学仁等，同上，2 (1990) 205
[3] 郑祖康，同上，2 (1988) 189
[4] 王松桂，同上，3 (1988) 310
[5] 邱培华等，同上，1 (1990) 96
[6] 陈希孺等，《中国科学》A辑，5 (1990) 450
[7] 成 平等，《应用概率统计》，4 (1990) 378
[8] 王 元等，*Chin. Ann. Math.*, **11B** (1990) 51, 384
[9] 邵 军，《应用概率统计》，2 (1989) 150
[10] 涂冬生等，《系统科学与数学》，1 (1989) 14
[11] 郑忠国等，《数学进展》，1 (1989) 44
[12] 陈希孺等，*J.Multivariate Analysis*, 1 (1988) 116
[13] 陈希孺等，*ibid.*, 2 (1989) 178
[14] 陈希孺等，*Acta Math. Sinica*, New Series, 2 (1990) 178
[15] 吴诚鸥，《应用概率统计》，2 (1990) 137
[16] 申 维，《数理统计与应用概率》，2 (1989) 151
[17] 郑忠国，《应用概率统计》，4 (1990) 439
[18] 吴耀华，《数学学报》，1 (1990) 79
[19] 王松桂，《应用概率统计》，4 (1988) 368
[20] 陈希孺等，同上，4 (1990) 363
[21] 洪圣岩，同上，2 (1989) 138
[22] 李金平，同上，1 (1990) 57
[23] 游凛峰，同上，3 (1989) 243
[24] 成 平等，同上，4 (1990) 378
[25] 成 平等，同上，1 (1991) 42
[26] 陈桂景，《科学通报》，(1990)
[27] 邹国华，《吉林大学自然科学学报》，2 (1989) 53
[28] 刘金泉，同上，3 (1989) 19
[29] 叶慈南，《应用概率统计》，1 (1988) 35
[30] 吴志东，同上，4 (1988) 363
[31] 陈家鼎，同上，1 (1989) 226
[32] 涂冬生，同上，2 (1988) 113
[33] 张尧庭，同上，1 (1988) 27
[34] 张尧庭，同上，4 (1990) 433
[35] 徐承彝，同上，4 (1988) 352
[36] 周方俊，《数理统计与应用概率》，3 (1989) 281
[37] 滕成业，同上，1 (1989) 70
[38] 张帼奋，同上，3 (1989) 234
[39] 单兆森，《应用概率统计》，1 (1990) 1
[40] 吴可法等，《应用数学学报》，1 (1990) 90
[41] 江泽培，《应用概率统计》，4 (1990) 395
[42] 安鸿志，*Acta Math. Appl. Sinica*, 2 (1989) 148
[43] 安鸿志等，*ibid.*, 2 (1988) 154
[44] 程 兵，《应用概率统计》，1 (1990) 13
[45] 张金明，同上，2 (1988) 171
[46] 常学将，《应用数学学报》，2 (1989) 218
[47] 邵 军，《应用概率统计》，3 (1990) 309
[48] 史建清等，《数理统计与应用概率》，3 (1989) 297
[49] 陶 波，同上，4 (1990) 452
[50] 钱伟民，《应用概率统计》，2 (1990) 113
[51] 童恒庆，同上，3 (1990) 242
[52] 邵 军，同上，3 (1988) 301
[53] 高集体，同上，2 (1990) 145
[54] 王命宇，朱燕堂，《数理统计与应用概率》，1 (1990) 68
[55] 吴传义等，《数学学报》，2 (1989) 174
[56] 吴传义，《应用数学学报》，2 (1989) 205
[57] 茆诗松等，《应用概率统计》，2 (1990) 185
[58] 周赛花等，同上，3 (1989) 283
[59] 关颖南，同上，2 (1988) 157
[60] 项可风等，同上，3 (1988) 270
[61] 成 平等，《数理统计与应用概率》，4 (1989) 389

[62] 谢衷杰等,《应用概率统计》,4 (1989)
[63] 丛树铮等,同上,4 (1989) 358
[64] 曹鸿兴等,《数理统计与应用概率》,1 (1989) 5
[65] 陈少玲,同上,3 (1990) 225
[66] 李景玉等,同上,4 (1988) 392
[67] 冯士雍等, *Acta Math. Appl. Sinica,* 4 (1990) 351
[68] 冯士雍等,《应用概率统计》,4 (1989) 350

生 物 数 学

•陈兰荪

生物体或一个生物系统的任何一个动作,必定伴随着物质的转换和输送以及能量的转换,也就是说,生物功能就是物质和能量转换功能。弄清生物的这种功能的数与形的性态,进一步用恰当的方式最优地人工利用这些功能,就是当今生物数学这个学科要解决的问题。

人类21世纪将面临各种难题,例如全球性环境问题日益加剧,现有天然资源耗竭等。为了解决这些难题,同时为了征服人类疾病、控制人口增长等,相应的细胞增长动力学理论研究以及细胞增长的计算机模拟技术、神经系统的数学模拟、传染病流行的数学模型、生态资源数量化管理理论、种群动力学系统、群体遗传与生物群体演化理论、生态毒理学、人口增长动力学与控制理论、数理医药学以及农业生态学理论与管理的数学方法等分支学科,便成为当今生物数学家主要的研究领域。

自1984年第一届全国生物数学学术会议召开以来,我国生物数学的研究逐渐开展,一批生物数学的专著和教材也相继问世[1~9],对前期国内外生物数学的发展作了综述总结,这对我国生物数学的研究和教学起了很大的作用。1988年5月召开的国际生物数学学术会议、1990年5月召开的全国第二届生物数学学术会议,以及有关的专业会议反映了近年来我国生物数学发展的概况。兹将1988~1990年的有关进展概述如下.

种群动力学模型的研究

两种群捕食系统 在国内外关于Holling功能性反应模型的研究的基础上,朴仲铉等[11]和王育全[12]进一步研究了Ⅰ类功能性反应模型正平衡点全局稳定的条件,陈均平等[13]考虑了捕食种群有密度制约情况下Ⅰ类功能性反应模型两个极限环存在的可能性。在陈兰荪等证明了Ⅱ类功能性反应系统极限环的存在唯一性之后,江佑霖[14]证明了当食饵种群为非密度制约而捕食者种群为密度制约时极限环的存在唯一性;吴长泰等[15]则得到了非Holling形式的Ⅱ类功能性反应系统极限环的存在唯一性;骆桦[16,17]研究了食饵种群有常数放养率情况下的Holling Ⅰ型、Ⅱ型功能性反应模型,得到与无放养时类似的定性性质;丁苏红[18,19]继续考虑Ⅱ型、Ⅲ型以及阶数更高的功能性系统的全局稳定性和极限环的存在唯一性;张发泰[20]研究了某种厌食系统极限环的存在唯一性;代国仁[21,22]研究了具有一般形式的Kolmogorov系统,并考虑了食饵种群具有常数收获率的情况,研究了鞍点分界线的相对位置、分界线环的存在性和稳定性以及极限环的存在唯一性;张江山[23,24]考虑了某些特殊的Kolmogorov系统,获得了关于这种系统极限环存在唯一性的完整结果。对于一个Kolmogorov系统,当其右端为一个3次多项式时,这种代数结构的模型何时具有代数结构的周期解?这是一个十分有趣的理论问题,黄启宇[26~28]的研究完整地回答了这个问题。当环境因素随时间而改变时,两种群的Volterra模型将成为一组变系数方程。何时此方程存在与环境周期相同的全局稳定周期解?对于竞争系统,近几年Gopolsomy等得到了许多结果;姜东平[43]得到了单种群Logistic模型和两种群Volterra模型在有周期存放率的情况下存在全局稳定正周期解的条件;王稳地等[58]研究了具有时变增长率的两种群捕食系统解的位置的估计,并将此法用于研究变系数两种群竞争系统持续生存的条件[57];孙纪方[29]研究了具有Dirac梳控制项的Lotka-Volterra模型,给出了具有混沌行为的判定法则。以上运用常微分方程定性理论方法来对生态系统的周期性质进行研究的一系列工作,具有我国特色,从国际上来看也是相当好的工作。

关于单种群增长模型的建立,自从崔-Lowson模型提出以来,至今仍有着不同的看法。马钦彦[30]持异议,李文灿[31]和黄晋彪等[32]赞同,王寿松[33]则提出了一

• 陈兰荪 中国科学院数学研究所研究员

个数学化的模型。

单种群离散模型 自黄永年发现P.Cull定理的缺陷之后，我国有许多人对单种群离散模型的全局稳定性问题开展了研究。李治明[34]和黄永年[35,36,39]把P.Cull定理推广到右端函数有多个极值点的情况，得到了全局稳定性判别法；黄永年[37,38]得到了在临界情况下平衡点局部稳定的判别方法；还研究了生态毒理学中单种群离散模型的极限环性质；汪尔年[40]提出了离散单种群模型全局稳定性的另一判别定理；樊引水等[41]研究了单种群离散时滞模型的全局稳定性、周期性与混沌解的充分条件；他和刘志汉[42]研究了具有年龄结构的离散单种群模型的持久性条件；刘世泽等[67]讨论了离散模型的Feigenbaum现象。

多种群相互作用模型 关于多种群Lotka-Volterra模型正平衡点的全局稳定性的研究，1979年B.S.Goh得到：设一个多种群Lotka-Volterra模型的系数矩阵为A，如果存在一个正对角线矩阵C，使得$CA+A^{T}C$为负定(或半负定，但要求集合$(X-X^{*})^{T}\cdot(CA+A^{T}C)(X-X^{*})=0$内除平衡点$X^{*}$外不含系统的整条轨线)，则正平衡点$X^{*}$是全局渐近稳定的。这是一个很好的结果，但在具体应用上发生了很大的困难：对于一个具体的模型，怎样判定正对角线矩阵C的存在？因此人们不满足于这个结论，试图就各种类型的模型求得一些具体的判别准则。代国仁等[45~53]以及周元铭[59]作了一系列的探讨，得到了一些解有界性和全局稳定性条件。这样的工作较之B.S.Goh的工作，具体而易于应用，但又显得十分零碎。陈兰荪等[44]提出了一个猜想：链型捕食-被捕食n维Lotka-Volterra模型其正平衡点为全局渐近稳定的充要条件是其正平衡点为局部渐近稳定的。已知这个猜想当$n=2$和3时成立。陆征一等[54~56]证明了当$n\leqslant7$时这个猜想成立。对于环型系统，虽然平衡点是局部稳定的，但也不一定是全局稳定的，因此研究环型系统全局稳定性是必要的。彭芬国等[60]得到了3维环型系统全局稳定的充分条件；倪明康[61]得到了高维功能性反应系统周期解存在性的证明。

一个多维的生态模型其正解的极限集合是十分复杂的，可以是正平衡点，可以是周期解、概周期解，也可以是奇怪吸引子，一一弄清楚是十分困难的。然而生态学常常不要求了解得那么仔细，只要知道是否会有解趋向于零(即某种群走向绝灭)的情况，因此人们提出了持续生存的概念。陈兰荪等[62]综述了有关持续生存的概念、研究方法和国内外已有的结果；唐漠勋[63]、刘平舟等[64]和滕志东等[65,66]研究了某些特殊多维模型持续生存的条件。

时滞系统 生物生长都有一个发育成熟的时间，因此生物种群对资源的猎取、本身的密度制约效应以及不同种群间的相互作用因素都可能有个滞后作用，于是种群增长模型常常是一个微分差分方程系统，其特征方程是个超越方程，判定其根实部的符号是比较困难的。黄清等[68]推广了K.L.Cooke等对于时滞方程稳定性开关现象的研究，并把此法用到二维Volterra捕食系统，得到了无害时滞的条件。

关于时滞微分方程种群模型，近几年来人们更有兴趣的是变系数时滞系统，特别是周期系数时滞系统。张炳根等[70~74]和魏俊杰[78]得到了关于变系数单种群时滞模型具有振动解、非振动解和正平衡解的全局稳定性条件，研究了周期系数单种群时滞模型周期解存在性和稳定性条件。

将生物种群增长中的时滞效应看成是常数时滞，这可以说是一种近似。一般来说，时滞的影响会持续很长的时间，甚至通过遗传因素产生世世代代的影响，因此利用积分微分方程和泛函微分方程来描述种群增长的时滞效应越来越受到人们的重视，我们称此为连续时滞模型。马知恩等[69]研究了连续时滞单种群模型的局部稳定性；梁泳国等[75]利用Lyapunov函数的方法得到了连续时滞多维捕食系统的全局稳定充分条件；徐远通[76]研究了具有脉冲时滞的Logistic方程平衡点稳定性的判定方法；曹贤通[77]证明了常系数连续时滞两种群捕食系统存在非定常周期解。

病毒生态学 这里包含3个内容：生态毒理学、流行病动力学以及放射生态学。主要研究对象为环境的污染因素、传染性病毒以及核污染对生态种群生长的影响。

工业的发达给人类带来了生态环境受到严重污染的问题，而污染必然对自然界生态种群的增长带来危害。这种危害究竟有多大？会不会导致某些种群的绝灭？种群对污染的承受能力有多大？都是人们关心的问题。近年来，T.G.Hallam首先提出用动力学方法建立生态毒理学模型来研究这些问题。马知恩和Hallam得到了有外界周期性污染侵入时单种群模型可持续生存的污染阈值。之后，马知恩等[79]又得到了非周期污染侵入时种群可生存的污染阈值，研究了在污染影响下两种群Volterra捕食系统的全局稳定性以及周期污染情况下的周期解存在唯一且全局渐近稳定的条件[80]，进一步减少了以前研究中对环境容量所作的限制，得到了相应的生存和绝灭的阈值定理[81]。张江山等[82]建立了预测评价闽江水污染的数学模型。

流行病动力学数学模型的建立和研究国际上已有很久的历史，工作很多，而我国尚未全面开展，仅有少量的工作。王辅俊研究局部免疫流行病模型平衡点的全局稳定性[83]，研究具有非线性接触率和传染力的流

行病模型，得到了这个模型的阈值定理[84]。马如云[85]得到了非线性积分方程形式的传染病模型非零周期解的存在条件。刘南根等[86]建立了血吸虫病传播的数学模型，并研究了此模型解的性质。

年龄结构种群模型与扩散模型 要使种群模型更精确化，则应考虑分年龄的模型，它类似于人口增长的Malthus模型。最早结合年龄作用的线性模型是由Sharpe-Lotka于1911年给出的，这模型与Malthus模型类似，是一个其中出生和死亡过程为人口密度的线性函数的偏微分方程模型。张连平[87]通过无穷小母元的谱性质证明了这种线性人口年龄结构模型所定义的半群是可微的。潘健[88]通过引入特殊的变换并从稍许不同的角度定义人口算子，给出了人口发展方程的唯一解。张连平[89]证明了在$L^2[0, r_2]$上的人口算子的根子空间在$L^2[0, r_2]$内是完备的。郭宝珠等[93]研究了具有常数时滞的线性人口发展系统。汤鹏志[94]把以前的一些结果推广到多地区多向流动的线性人口发展系统。

类似于Logistic模型考虑密度制约效应，1974年Gurtin-MacCamy首先建立了非线性年龄结构人口动态模型。黄思训[90]研究了这个模型的局部稳定性。林有浩等[91]研究了这种模型中密度制约系数为时间的周期函数时的情况。郭宝珠等[92]在研究一类非线性人口发展方程稳定性的基础上，指出这类系统中周期现象不可能出现，并研究了系统的振荡现象。冯德兴等[100]研究了年龄结构非线性共存两种群模型的稳定性。

相应的离散时间单种群年龄结构的线性模型是Leslie矩阵模型，这种模型通常用于研究昆虫种群的动态。刘来福等[95]研究了广义Leslie矩阵模型，继以前已得到的渐近性质等，从随机的侧面对模型进行讨论，给出了在最简单情形下Logistic年龄结构矩阵模型的渐近性质[96,97]，为该模型在渔业龄别收获上的应用提供了方法[98]，这种具年龄结构的密度制约种群矩阵模型称为Logistic矩阵。

以上所述的模型均假定种群密度分布是均匀的，然而实际上并非如此。一般高密度位置的种群要向低密度位置扩散，描述这种现象的种群模型称为反应扩散模型，即在原有的模型基础上加上扩散项。陆征一[101,102]得到了具扩散项两种群Volterra捕食模型的全局渐近稳定性。张健[103]研究了两种群竞争扩散方程的Neumann边界混合问题。丁崇文[104]讨论了具有连续时滞的Volterra捕食-被捕食扩散模型，得到了解的存在唯一性并研究了解的渐近性态。

生态种群分布格局与拟合问题 Iwao于1968年提出用昆虫种群平均拥挤度$\dot{m}$线性地依赖于平均密度m的$\dot{m}-m$模型，来描述昆虫种群的空间分布格局，并且确定恰当的抽样方案。徐汝梅等[107,108]提出了改进的$\dot{m}-m$模型，并对改进的$\dot{m}-m$模型的抽样方法作了研究。罗敬辉[109]研究了扰动对$\dot{m}-m$模型的影响。韩铭哲[110]和黄方能等[111]论证了在负二项分布的总体格局中K值仅在种群个体数量处于稳定状态时才是格局的集聚强度指标，否则K值的大小并不反映集聚程度的高低。研究动物种群空间格局时用扩散型指数并不受格局类型的限制，它能反映空间格局的连续统。马占山[112]建议用刀切法来估计动物种群扩散型指数。

曲线拟合或系统参数辨识是生态建模中一个重要的问题。至今已提出了许多方法，常认为Marguardt方法是拟合非线性方程的较好方法。但王振中[113]用此法拟合Weibull方程时却不甚理想，因而他提出了改进方案。陈华豪等[114]给出了$M(n, m)$模型组参数辨识的方法。$M(n, m)$模型组能包括多种多样的多种群模型，因而这方法适用性很广。吴新元[127]提出了一种拟合Logistic曲线的数值方法。秦自生等[191,192]利用实测数据拟合建立了冷箭竹与大熊猫的模型。

分子动力学模型的研究

自从Prigogine三分子反应模型的极限环存在唯一性被证明以后，人们知道两分子正比反应速度的反应模型是不会出现极限环的。但是两分子饱和反应则不然。沃松林[115]首先证明了一个简单的两分子饱和反应模型极限环的存在唯一性。高慧贞等[116]证明了饱和Prigogine三分子反应模型极限环的存在唯一性。彭晓林等[117~120]、刘德明等[121]、朴仲铉等[122]和赵振海等[123]研究了其他形式的三分子反应模型，分别得到极限环存在唯一的条件。刘德明等[124]和李嘉旭等[125]研究了多分子反应模型的极限环问题。王辅俊等[126]利用房室理论建立了细胞增长的数学模型，并讨论了平衡点的全局稳定性。

数理医药学

从医学理论、药学原理到临床诊断，近几年来数学方法已得到了普遍的应用。

药物动力学 药物动力学研究的是药物动力过程中存在的个体差异及其分布特征。Sheiner等首先提出了非线性混合效应(NONMEM)，并研制成功相应的程序，开辟了药物动力学研究的新方向。周怀梧等[128,129]在Sheiner等研究的基础上研制了Michaelis-Menten消除型总体药物动力学程序。杨义群[130]明确了周期性快速静脉注射下血药浓度变化的数学模型并导出了求解公式。徐绍英[131]研究了药物动力学中矩分析的方法，这种方法在一定程度上能克服经典室分析方法的一些困难。丁勇[132]运用替换法来估计静注和静滴动力学的参数。张留等[133]研究了体内药-时曲线出

双峰时的药物动力学模型。

医学原理的数量化研究 医学原理的研究中首先得到人们关注的是癌症机理的探讨。周宗灿等[136]在已有数据基础上分析证实了以遗传毒理学试验预测致癌物具有不肯定性。方积乾等[137,138]提出了遗传毒理学试验与动物致癌试验相结合的预测致癌物的序贯试验方案，并进行了成本效益分析；他们还建立了追踪研究中致癌因素残余效应及其累积的数学模型，讨论了个体发病概率随多因素变化的加法模型和乘法模型[139]。刘天一等[143]得到了Willis环状脑动脉瘤生物数学模型的渐近解。

对于不可增殖抗原的侵入，Perelson等人提出动物体内的免疫系统将采用最优化的方式来响应。刘青等[144]提出了一个考虑了免疫系统可靠性的新方案。叶其孝等[145]导出了抗原、抗体和产生抗体的浆细胞之间关系的免疫学模型，并研究了其数学性质。丁勇[149]讨论了血型遗传规律的马氏链特性。

我们都知道神经传导问题可以用非线性方程组即所谓H-H方程来描述，而作为H-H方程的简化模型，可考虑Fitzhagh-Nagumo方程组，沈玮熙[146]研究了此方程组的门槛现象，张健[147,148]研究了广义神经传导的非线性拟双曲方程的混合边值问题。

临床检测与治疗 VEP是在大脑视皮层记录到的一组诱发电位，其形态变化对于视路、视神经病变等视系统疾患的临床诊断及发病机理探讨都有重要价值。邹赛德等[150]运用K-L变换方法对VEP的形态构成进行了特征分析。陈晓光等[151]用拓扑学模型来描述色觉的过程，并以此来研制色盲检测矫正仪获得成功。何为等[152]用高阶插值边界元法计算处理人体生物电场。刘秉正等[153]提出了一个下丘脑—垂体—性腺(男性)轴内分泌的调节反馈模型，比Smith模型以及Cartwright-Husain模型更符合实验结果。张荣等[154]用建立数学模型的方法研究了呼吸运动过程中呼吸驱动压、呼吸气体流率以及肺容积三者之间的数量关系。董云河[155]在237例肿瘤病人统计数据的基础上给出了恶性卵巢肿瘤的Bayes诊断预测模型。顾清芳等[157]提出了酮性糖尿病昏迷治疗的数学模型。杨凤翔等[160]建立了中医理法和方药原理，给出了征候空间和方剂空间的数学结构。

农业生态与管理的数学方法

在农业中，遗传育种、农田生态管理、作物产量预测等数学方法的应用已十分普遍.

数量遗传学 数量遗传学方法是遗传育种工作的分析手段之一，这一方面的研究工作我国起步较早，已有许多优秀的工作。如最近林德光等[161]关于格里芬双列杂交的多变元推广的论文得到了国际上的称赞和国家的奖励，王贵学等[162,163]和毛盛贤[164]对传统分析技术的可靠性、正态性检验的必要性、双列杂交遗传分析等提出了新的看法，罗泽伟[165]提出用模糊数学方法来进行作物数量性状遗传的相关分析，曹胜炎等[167]考虑了动物遗传问题。

抽样、分类、决策与预测 抽样技术是进行实际调查的基本方法，例如阎俊杰[170]用来确定昆虫种群的空间分布，杨义群等[171,172]用来进行蚕种的抽样检验，张荷观[173]则研究了分层随机抽样的性质。多元分析方法在农业科学中也十分有用，例如周玉丽等[175]利用主分量分析等方法对阔叶林进行了排序分析。胡秉民等[174]及其他一些工作者[183~189]运用聚类分析方法对地区、品种进行分析和分类。杨凤翔等[188]运用局势决策理论对甘肃河西地区农作物种植方式进行了决策分析，得出最优决策方案。胡毓达等[190~193]利用统计方法建立农业生态学数学模型。

数学方法在农业方面的应用是十分广泛的，近几年来在我国得到了可喜的发展，也产生了很好的经济效益，例如侯中田和徐中儒[195]建立了几种主要作物的区域生产产量模型，并编制了“旋转设计试验专用程序包”，可用于预测产量，演示各因素的生产后果，输出各因素与产量的等值线图。此成果已得到广泛应用，并已取得成效。

[1] 汪云九，《生物控制论研究方法》，科学出版社(1987)

[2] 陈兰荪，《生物数学引论》，科学出版社(1988)

[3] 陈兰荪，《数学生态学模型与研究方法》，科学出版社(1988)

[4] 刘来福等，《生物统计》，北京师范大学出版社(1988)

[5] 胡秉民，《微电脑在农业科学中的应用》，科学出版社(1989)

[6] 徐中儒，《农业试验最优回归设计》，黑龙江科学技术出版社(1988)

[7] 杨义群，《回归设计与多元分析在农业上的应用》，天则出版社(1990)

[8] 曾照芳等，《医用生物数学》，重庆大学出版社(1989)

[9] 粟载福等，《模糊数学与医学》，中国科技文献出版社(1989)

[10] 陈兰荪等编，*Math. Biology Proc. of ICBM*, Xian 1988，西安交通大学出版社(1988)

[11] 朴仲铉等，《辽宁大学学报(自然科学版)》，35 (1989) 6

[12] 王育全，《怀化师专学报》，7 (1988) 40

[13] 陈均平等，《重庆大学学报》，7 (1988) 56

[14] 江佑霖，《生物数学学报》，1 (1991) 1

[15] 吴长泰等,同上,1 (1989) 69
[16] 骆　桦,《北京工业学院学报》,4 (1988) 8
[17] 骆　桦,同上,4 (1989) 58
[18] 丁苏红,《应用数学和力学》,**9** (1988) 16
[19] 丁苏红.*SIAM J.Math. Anal.*, **20** (1989) 1426
[20] 张发秦,《生物数学学报》,1 (1988) 62
[21] 代国仁,《应用数学学报》,4 (1988) 444
[22] 代国仁,《四川大学学报(自然科学版)》,3 (1989) 252
[23] 张江山,《生物数学学报》,1 (1989) 91
[24] 张江山,《福建师范大学学报(自然科学版)》,4 (1989) 39
[25] 陈朝怡,同上,2 (1989) 22
[26] 黄启宇,*Science Bulletin*, 12 (1987) 793
[27] 黄启宇,*Acta Math. Appl. Sinica*, 2 (1989) 110
[28] 黄启宇,《福建师范大学学报(自然科学版)》,3 (1989) 1
[29] 孙纪方,《生物数学学报》,2 (1990) 177
[30] 马钦彦,《北京林业大学学报》,2 (1990) 108
[31] 李文灿,同上,2 (1990) 121
[32] 黄晋彪等,《应用生态学报》,4 (1990) 301
[33] 王寿松,《生物数学学报》,1 (1990) 21
[34] 李治明,《新疆大学学报(自然科学版)》,2 (1989) 25
[35] 黄永年,同上,2 (1989) 45
[36] 黄永年,*Math. Biosci.*, **95** (1989) 301
[37] 黄永年,*Biol. Cyborn.*, **62** (1990) 1561
[38] 黄永年等,*J. Ther. Biol.*, **141** (1989) 214
[39] 黄永年,*Math. Biosci.*, **95** (1989) 189
[40] 汪尔年,*Ann. Diff. Eqs.*, 4 (1990) 437
[41] 樊引水等,*Sys. Sci. and Math. Sci.*, 1 (1991) 51
[42] 樊引水等,《生物数学学报》,1 (1989) 60
[43] 姜东平,同上,1 (1990) 80
[44] 陈兰荪等,《常微分方程与控制论论文集》,华中师范大学出版社 (1989) 87
[45] 代国仁等,《应用数学学报》,2 (1988) 253
[46] 代国仁,《四川大学学报(自然科学版)》,2 (1990) 83
[47] 康纪权等,《南充师院学报》,2 (1988) 7
[48] 康纪权等,《四川师范学院学报(自然科学版)》,1 (1989) 69
[49] 郑文海,《云南工学院学报》,1 (1990)
[50] 郑文海,《重庆师范学院学报》,1 (1990)
[51] 郑文海,同上,3 (1990)
[52] 孙承惠,《西南师范大学学报(自然科学版)》,1 (1989) 19
[53] 孙承惠,《四川教育学院学报》,2 (1989) 103
[54] 陆征一,《四川大学学报(自然科学版)》,2 (1988) 145
[55] 陆征一,*Acta Math. Sinica*, New Series, 5 (1989) 214
[56] 刘　立等,《中国科学》A辑,10 (1990) 1023
[57] 王稳地等,《工程数学学报》,2 (1989) 11
[58] 王稳地等,《应用数学学报》,1 (1990) 122
[59] 周元铭,《中山大学学报》,2 (1988) 34
[60] 彭芬国等,《生物数学学报》,2 (1988) 159
[61] 倪明康,同上,2 (1989) 165
[62] 陈兰荪等,同上,1 (1988) 18
[63] 唐漠勋,《应用数学学报》,4 (1990) 431
[64] 刘平舟等,《生物数学学报》,2 (1988) 122
[65] 滕志东等,同上,1 (1990) 33
[66] 段魁臣等,同上,3 (1990) 21
[67] 刘世泽等,《大自然探索》,3 (1989)
[68] 黄　清等,*Ann. Diff. Eqs.*, 1 (1990) 21
[69] 马知恩等,《生物数学学报》,1 (1991) 1
[70] 张炳根等,*Appl. Math.*, 2 (1988) 267
[71] 张炳根等, *Dynamics and Stability of Systems*, 4 (1988) 183
[72] 张炳根等,*J. Math. Anal. Appl.*, 1 (1990) 274
[73] 张炳根等,*ibid.*, 1 (1989) 110
[74] 张炳根等,*Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **107** (1990) 579
[75] 梁泳国等,*Nonliner Analysis Theory Methods & Applications*, 5 (1988) 495
[76] 徐远通,《中山大学学报》,3 (1989) 109
[77] 曹贤通,《生物数学学报》,1 (1990) 73
[78] 魏俊杰,同上,1 (1989) 114
[79] 马知恩等,*Bull. Math. Biol.*, 3 (1989) 311
[80] 马知恩等,*Applicable Analysis*, **34** (1989) 79
[81] 马知恩等,*Math. Biosci.*, **97** (1990) 156
[82] 张江山等,《福建师范大学学报(自然科学版)》,2 (1988) 108
[83] 王辅俊,《应用数学与计算数学学报》,2 (1989) 26
[84] 王辅俊,《华东师范大学学报(自然科学版)》,2(1990)31
[85] 马如云,《生物数学学报》,2 (1990) 97
[86] 刘南根等,同上,2 (1989) 107
[87] 张连平,《系统科学与数学》,2 (1988) 181
[88] 潘　健,同上,1 (1989) 77
[89] 张连平,《生物数学学报》,1 (1990) 90
[90] 黄思训,同上,2 (1990) 132
[91] 林有浩等,*Northeastern Math. J.*, 2 (1989) 203
[92] 郭宝珠等,《系统科学与数学》,4 (1988) 324
[93] 郭宝珠等,同上,4 (1988) 346
[94] 汤鹏志,同上,2 (1990) 142
[95] 刘来福等,《高校应用数学学报》,3 (1988) 327
[96] 周　云等,《科学通报》,8 (1989) 618
[97] 刘来福等,*Chinese Science Bulletin*, 21 (1989) 1811
[98] 刘来福等,《科学通报》,14 (1990) 106
[99] 刘来福等,*Math. Biosci.*, **96** (1989) 185