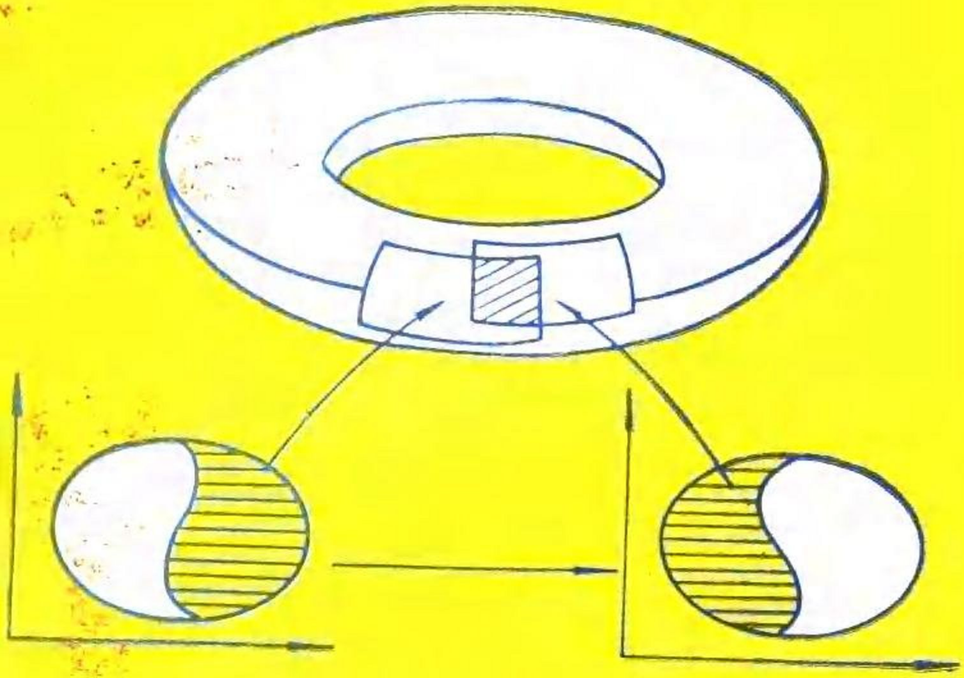
# 数学分析

下册

邹应



高等教育出版社

# 数学分析

## 下　册

邹　应

高等教育出版社

（京）112号

本书是作者为武汉大学中法数学试验班及数学基地班的数学分析课编写的教材．初稿及修改稿先后经5届学生试用．全书共21章．前10章为上册，内容有一元函数微积分及度量空间；其余11章为下册，内容为级数和多元函数微积分．本书采用了比较现代的方法讲述微积分学的经典内容．与传统的数学分析教材相比，在体系、结构、内容选材及写法上都做了较大的改革尝试．本书的最后两章还介绍了$\mathbf{R}^n$空间的子流形及其定向、函数及微分形式沿子流形的积分．每节后都选配了一定数量的练习题，除基础性题目外，还有一些题目是通过介绍新概念、新结论，培养学生独立分析问题和解决问题的能力的．本书的主要特点有：起点高；注重分析、代数、几何知识的相互渗透、联系；与高年级后继课程紧密结合；注重深入浅出引入新概念、新理论；配备有开发学生智力的问题．本书可作数学类专业数学分析课教材或教学参考书．

图书在版编目（CIP）数据

数学分析／邹应编．—北京：高等教育出版社，1995
ISBN 7-04-005166-4

Ⅰ．数… Ⅱ．邹… Ⅲ．数学分析 Ⅳ．017

中国版本图书馆CIP数据核字（95）第00993号

*

高等教育出版社出版
新华书店总店北京发行所发行
农业出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 23.875 字数 620 000
1995年5月第1版 1995年5月第1次印刷
印数0001—1 272
定价 14.75 元

# 目　　录

# 第11章 数 项 级 数

这一章我们介绍可数无限项实或复数的和即数项级数的概念，研究了数项级数的若干性质，建立了一系列数项级数收敛与发散的判别准则。

## §1 一般数项级数

我们知道有限多个实或复数是可以求和的，但可数无限个实数或复数如何定义它们的“和”呢？例如对于1，－1，1，－1，…

$$\underbrace{1-1+1-1+\cdots+1-1}_{2n\text{个}1}=0,$$

$$\underbrace{1-1+1-1+\cdots+1-1+1}_{2n+1\text{个}1}=1.$$

我们究竟定义这无穷多个1，－1，1，－1，…的“和”为0还是为1？因此下面我们首先介绍数项级数的定义。

### 1. 数项级数的定义

以下我们设K＝R或C，并分别在R或C上取绝对值或模为各自的范数。

**定义** 设$\langle u_n\rangle$是任一K一序列，令

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ \cdots,\ S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\ \cdots$$

1）$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$称为以$u_n$为一般项(通项)的K—级数或数项级数。并简记为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$。

2）$\forall n\in\mathbf{N}$，$S_n$称为数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$的前 $n$ 项之和或部分

和。

3）若$\langle S_n\rangle$有极限$S\in\mathbf{K}$或$\pm\infty$，则我们称数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$有和$S$，记为$S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$。

4）若数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$的和$S\in\mathbf{K}$，则我们又称$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$**收敛**。非收敛的数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$称为**发散级数**。

**例1** 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$的前$n$项之和

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\to 2\qquad(n\to+\infty).$$

因此$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$是收敛的，并且有和$S=2$。

**例2** 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n$的前$n$项之和

$$S_n=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\to+\infty\quad(n\to+\infty).$$

故$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n$有和$S=+\infty$，但此级数是发散的。

**例3** 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$的前$2n$项之和与前$2n+1$项之和

$$S_{2n}=0,\quad S_{2n+1}=1.$$

因此序列$\langle S_n\rangle$当$n\to+\infty$时极限不存在，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$没有和，故它是发散的。

由上述数项级数的收敛性定义知，数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$的敛散性实质就是它的部分和序列$\langle S_n\rangle$的敛散性问题。

反过来，一个K—序列$\langle u_n\rangle$的敛散性[①]问题也可以化为数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)$的敛散性问题来研究，这是因为对此级数，它的前$n$项之和

$$\begin{aligned}S_n&=(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\cdots+(u_{n+1}-u_n)\\&=u_{n+1}-u_1,\end{aligned}$$

从而

$$\langle u_n\rangle\text{收敛}\Longleftrightarrow\langle S_n\rangle\text{收敛}\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)\text{收敛。}$$

## 2. 级数收敛的必要条件

**定理11·1·1** 若数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$。

**证明** 因为数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$收敛，故有

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}S_{n-1}=S.$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}u_n&=\lim_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to+\infty}S_n-\lim_{n\to+\infty}S_{n-1}\\&=S-S=0.\ \blacksquare\end{aligned}$$

此定理表明，若数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$有$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\neq0$，则$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$必然发散，但是$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$还不足以判断级数$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$收敛。

**例4** 考察数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$的敛散性。

① 指收敛性和发散性。

我们有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$，但由于此级数的前$n$项之和

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$=\sqrt{n}\quad(n>1),$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散。

**例5** 考察数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}q^n\,(q\in\mathbf{K})$ 的敛散性。

1）若 $|q|\geqslant1$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n\neq0$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}q^n$ 发散。

2）若 $|q|<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}q^n$ 的前$n$项之和

$$S_n=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}\to\frac{1}{1-q}\quad(n\to+\infty),$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}q^n$ 收敛，并且有和 $S=\frac{1}{1-q}$。

这个级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}q^n$ 称为几何级数，它在今后的级数收敛性研究中将发挥重要的作用。

**定理11·1·2** 若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛，则

$$r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\quad(n\in\mathbf{N})$$

（我们称 $r_n$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 的$n$阶余项）当 $n\to+\infty$ 时收敛于零。

**证明** 令收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 的和为 $S$。则

$$r_n=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k-S_n=S-S_n\to S-S=0\quad(n\to+\infty).\ \blacksquare$$

### 3. 级数的Cauchy收敛准则

**定理11·1·3(Cauchy准则)** 数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛的充分必要条件是：

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in \mathbf{N})(\forall n,\ k\in \mathbf{N},\ n\geqslant N)$$
$$\Longrightarrow |u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}|<\varepsilon.$$

**证明** 令

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\ S_{n+k}=u_1+u_2+\cdots+u_{n+k}.$$

则

$$S_{n+k}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}.$$

于是由K—序列的Cauchy收敛准则及级数的收敛定义推知

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\text{收敛}\Longleftrightarrow \langle S_n\rangle\text{收敛}$$
$$\Longleftrightarrow(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in \mathbf{N})(\forall n,\ k\in \mathbf{N},\ n\geqslant N)$$
$$\Longrightarrow |S_{n+k}-S_n|<\varepsilon$$
$$\Longleftrightarrow(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in \mathbf{N})(\forall n,\ k\in \mathbf{N},\ n\geqslant N)$$
$$\Longrightarrow |u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}|<\varepsilon. \blacksquare$$

**推论1** 数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛，当且仅当$\forall k\in \mathbf{N}$，数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+k}$收敛。

**推论2** 任意改变数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$的有限多项后所得新级数与原级数有相同的收敛与发散性。

这两个推论的证明都很简单，我们留给读者作为练习。

下面我们看两个用Cauchy准则证明数项级数的敛散性的例子。

**例6** 考察数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$的敛散性。

由于$\forall n$，$k\in\mathbf{N}$，

$$0<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+k)^2}$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n},$$

故

$$(\forall\varepsilon>0)\left(\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\right)(\forall n,\ k\in\mathbf{N},\ n\geqslant N)$$

$$\Longrightarrow 0<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+k)^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

由定理11·1·3知，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛。

**例7** 证明数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散。

事实上，$\forall n\in\mathbf{N}$，我们有

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

故由Cauchy收敛准则知，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散。

### 4. 收敛级数的一个运算性质

**定理11·1·4** 设数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$收敛，其和分别为 $S$ 与$T$，则

1） $\forall \lambda \in \mathrm{C}$，数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda u_n$收敛，其和为$\lambda S$。

2） 数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$收敛，其和为$S + T$。

**证明** 令

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad T_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

则$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$，$\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = T$，从而

$$(\lambda u_1) + (\lambda u_2) + \cdots + (\lambda u_n) = \lambda S_n \to \lambda S (n \to +\infty),$$

$$\begin{aligned}&(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n)\\ &= S_n + T_n \to S + T (n \to +\infty).\end{aligned}$$

此即表明数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda u_n$与$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$收敛，并且其和分别为$\lambda S$与$S + T$。▮

**推论** 设$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$是任一复数项级数，$u_n = x_n + iy_n, x_n, y_n \in \mathrm{R}$，($n \in \mathrm{N}$)，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛的充分必要条件是：实数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$与$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$均收敛。在收敛的情况下，

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

**证明** 令

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

$$Y_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

则

$$S_n=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)+\cdots+(x_n+iy_n)$$
$$=X_n+iY_n.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\text{收敛}\Longleftrightarrow\langle S_n\rangle\text{收敛}$$
$$\Longleftrightarrow\langle X_n\rangle\text{与}\langle Y_n\rangle\text{收敛}$$
$$\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\text{与}\sum_{n=1}^{+\infty}y_n\text{收敛}.$$

并且在$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$收敛的情况下，

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n+iy_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}x_n+\sum_{n=1}^{+\infty}iy_n$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}x_n+i\sum_{i=1}^{+\infty}y_n.\ \blacksquare$$

这个推论的结论表明可以把复数项级数的敛散性研究化为实数项级数的敛散性研究。

**例8** 设$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$是任意两个数项级数．试在下面两种情形下：

1）$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$与$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n-b_n|$均收敛，

2）$a_n\geqslant0$，$b_n\geqslant0(\forall n\in\mathrm{N})$并且$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$均发散，研究数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\max(a_n,\ b_n)\ \text{与}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\min(a_n,\ b_n)$$

的收敛与发散性。

在情形1）下，由于

$$\max(a_n,\ b_n)=\frac{a_n+b_n+|a_n-b_n|}{2},$$

$$\min(a_n, b_n)=\frac{a_n+b_n-|a_n-b_n|}{2},$$

故由已知条件及定理11·1·4知数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\max(a_n, b_n)$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\min(a_n, b_n)$均收敛。

在情形2）下，由于$a_n\geqslant 0$，$b_n\geqslant 0$，故$\forall n\in\mathbf{N}$，

$$\sum_{k=1}^{n}\max(a_k, b_k)\geqslant\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

从而由$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$的发散性推知$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\max(a_k, b_k)=+\infty$。因此数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\max(a_n, b_n)$发散。

对于数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\min(a_n, b_n)$，则可能收敛，也可能发散。

例如，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=1+\frac{1}{2^2}+2+\frac{1}{2^4}+3+\cdots+n+\frac{1}{2^{2n}}+\cdots$，

$$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n=\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2^3}+4+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}+2n+\cdots,$$

则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$均发散，但$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\min(a_n, b_n)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$收敛。

又例如

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+\cdots+n+\frac{1}{n+1}+\cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n=1+2+\frac{1}{3}+4+\cdots+\frac{1}{n}+n+1+\cdots,$$

则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$发散，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\min(a_n, b_n)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$也发散。

## 5. 收敛级数的结合性质

**定理11·1·5** 设$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$是任一数项级数，$k_0=0$，$\langle k_n\rangle$是任一严格单调上升的自然数序列，令

$$v_n=u_{k_n+1}+u_{k_n+2}+\cdots+u_{k_{n+1}},\quad n\in\mathbf{N}\cup\{0\}.$$

1）若级数$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$收敛，则级数$\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$也收敛，并且$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$。

2）若级数$\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$收敛，并且实数序列$\langle a_n\rangle$：

$$a_n=|u_{k_n+1}|+|u_{k_n+2}|+\cdots+|u_{k_{n+1}}|\quad(n\in\mathbf{N})$$

收敛于0，则级数$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$也收敛，并且$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$。

**证明** 1）$\forall n\in\mathbf{N}$，令

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\quad V_n=v_1+v_2+\cdots+v_n.$$

于是

$$V_n=(u_1+\cdots+u_{k_1})+(u_{k_1+1}+\cdots+u_{k_2})+\cdots+(u_{k_n+1}+\cdots+u_{k_{n+1}})=S_{k_{n+1}}.$$

此即表明$\langle V_n\rangle=\langle S_{k_{n+1}}\rangle$是$\langle S_n\rangle$的一个子序列。由于级数$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$收敛，故序列$\langle S_n\rangle$收敛，从而序列$\langle V_n\rangle$收敛，并且

$$\lim_{n\to+\infty}V_n=\lim_{n\to+\infty}S_n=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n.$$

因此数项级数$\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$收敛，并且$\sum_{n=0}^{+\infty}v_n=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$。

2）首先，由于$\langle k_n\rangle$是严格单调上升的自然数序列，故$\forall n\in\mathbf{N}$，存在唯一的$m=m(n)\in\mathbf{N}$使得

$$k_{\overline{m}} < n \leqslant k_{\overline{m}+1}.$$

于是

$$\begin{aligned}
S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&= (u_1 + \cdots + u_{k_1}) + (u_{k_1+1} + \cdots + u_{k_2}) \\
&\quad + \cdots + (u_{k_{\overline{m}-1}+1} + \cdots + u_{k_{\overline{m}}}) + (u_{k_{\overline{m}}+1} + \cdots + u_n) \\
&= v_0 + v_1 + \cdots + v_{\overline{m}-1} + (u_{k_{\overline{m}}+1} + \cdots + u_n) \\
&= V_{m(n)-1} + (u_{k_{\overline{m}}+1} + \cdots + u_n),
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
|S_n - V_{m(n)-1}| &\leqslant |u_{k_{\overline{m}}+1}| + \cdots + |u_n| \\
&\leqslant |u_{k_{\overline{m}}+1}| + \cdots + |u_{k_{\overline{m}+1}}| = a_{\overline{m}} .
\end{aligned}$$

另一方面，由假设$\lim\limits_{m\to+\infty} a_m = 0$及$\sum\limits_{m=0}^{+\infty} v_m$收敛，若令$V = \lim\limits_{m\to+\infty} V_m = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} v_m$，则

$$\begin{aligned}
(\forall \varepsilon>0)(\exists m_0\in \mathbf{N})(\forall m\geqslant m_0) \Longrightarrow 0\leqslant a_m < \frac{\varepsilon}{2}, \\
|V_m - V| < \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

现在我们令$N\in \mathbf{N}$充分大使得$m(N)-1\geqslant m_0$，由于$\forall n\geqslant N$，$m(n)\geqslant m(N)$，故

$$\begin{aligned}
\forall n\in \mathbf{N}, n\geqslant N \Longrightarrow |S_n - V| &\leqslant |S_n - V_{m(n)-1}| + |V_{m(n)-1} - V| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

此即表明$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = V$，即 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛并且与级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$有相同的和$V$。▌

**推论** 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$是任一数项级数，$k\in \mathbf{N}$，令

$$v_n = u_{(n-1)k+1} + u_{(n-1)k+2} + \cdots + u_{nk} \quad (n\in \mathbf{N}).$$

假设

1）数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$收敛， 2）$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$，

那末级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛，并且与级数$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$有相同的和。

**证明** 根据上述定理，我们只需证明

$$a_n = |u_{(n-1)k+1}| + |u_{(n-1)k+2}| + \cdots + |u_{nk}| \to 0 \,(n \to +\infty).$$

事实上，由于$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$，故$\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$，从而

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} |u_{(n-1)k+1}| + \lim_{n\to+\infty} |u_{(n-1)k+2}| + \cdots + \lim_{n\to+\infty} |u_{nk}|$$
$$= 0. \blacksquare$$

**例9** 考虑数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$：

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \cdots$$

证明：此级数收敛，并且其和$S = \frac{1}{2}\log 2$，若我们承认$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2$（见§2例14）。

事实上，我们先考虑上述级数每3项为一组所得的新级数$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$：

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \cdots$$

由于

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right),$$

故

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots$$