高等数理统计

Advanced Mathematical Statistics

● 茆诗松 王静龙 濮晓龙 编著

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

Advanced Mathematical Statistics

高等数理统计

茆诗松　王静龙　濮晓龙　编著

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

(京) 112 号

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数理统计/茆诗松等编著. －北京：高等教育出版社；德国：施普林格出版社，1998.7

ISBN 7-04-006397-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. 茆… Ⅲ. 数理统计-教材 Ⅳ. 0212

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 17247 号

*

高等教育出版社 出版
施普林格出版社

北京沙滩后街 55 号

邮政编码：100009 传真：64014048 电话：64054588

新华书店总店北京发行所发行

北京外文印刷厂印装

*

开本 880×1230 1/32 印张 15 字数 430 000

1998 年 7 月第 1 版 1998 年 7 月第 1 次印刷

定价 29.00 元

前　言

本书是为统计学专业及相关专业的学生和统计工作者编写的教科书.阅读此书需要有高等数学基础和概率论与数理统计基础知识.读完本书即可进入数理统计各分支的学习和研究.基于这样的要求,我们在本书中着力于数理统计的基本概念,基本方法和基本理论,充分反映数理统计的现代发展,力求做到理论与实际的结合,为读者进入理论研究领域和实际应用领域打下扎实的基础.

全书共分六章,依次为基本概念,点估计,假设检验,区间估计,统计决策理论与 Bayes 分析,统计计算方法.前五章的前身是一份讲义,曾在华东师范大学统计系研究生"高等数理统计"课程上使用了十多年.虽经多次修改,总感不足.这次趁出版之际,对前五章作了较大的修改,充实了一些新的内容,另外在叙述上也作了不少改进,使内容有点新意,也更易理解.书中丰富的例子着力说明统计思想和统计应用领域,配置的习题足够让读者得到各种基本训练,掌握本书内容.完成这些习题就能品尝到统计学特有的味道.

本书的出版是在上海市学位委员会"上海研究生专项经费"资助下实现的,在他们大力支持和倡导下,我们充满信心地完成这本书的充实,完善和改写工作.在此对上海市学位委员会表示衷心的感谢.另外对我校研究生院培养处徐钧涛副教授,高等教育出版社张小萍和翁咏梅二位女士表示衷心的感谢,没有他(她)们的帮助与关心,此书不可能很快出版.

本书的编写和修改得到我系广大师生的帮助,特别是梁小筠教授和程依明副教授.另外还有尤进红、刘忠和何基报三位博士生为本书部分章节的打印、修改做了很多工作,在此一并表示衷心感谢.

本书由茆诗松主编.第一、五章由茆诗松执笔,第三、四章由王静龙

执笔,第二、六章由濮晓龙执笔,最后由茆诗松统稿.由于编者水平有限,错缪之处在所难免,恳请国内同行及广大读者批评指正.

茆诗松,王静龙,濮晓龙

1998年4月于华东师范大学统计系

责任编辑　翁咏梅
封面设计　王　喆
责任绘图　孟庆祥
版式设计　焦东立
责任印制　宋克学

目　　录

前言……………………………………………………………………（1）
第一章　基本概念……………………………………………………（1）
§1.1　统计结构 ……………………………………………………（1）
§1.1.1　统计结构 …………………………………………………（1）
§1.1.2　乘积结构与重复抽样结构 ………………………………（3）
§1.1.3　可控结构 …………………………………………………（5）
§1.2　常用分布族 …………………………………………………（8）
§1.2.1　Gamma 分布族……………………………………………（8）
§1.2.2　Beta 分布族 ……………………………………………（10）
§1.2.3　Fisher Z 分布族………………………………………（11）
§1.2.4　t 分布族 ………………………………………………（13）
§1.2.5　多项分布族………………………………………………（16）
§1.2.6　多元正态分布族…………………………………………（17）
§1.2.7　几个非中心分布族………………………………………（22）
§1.3　统计量及其分布……………………………………………（23）
§1.3.1　统计量……………………………………………………（24）
§1.3.2　抽样分布…………………………………………………（25）
§1.3.3　来自正态总体的抽样分布………………………………（30）
§1.3.4　次序统计量及其分布……………………………………（34）
§1.4　统计量的近似分布…………………………………………（39）
§1.4.1　从中心极限定理获得渐近分布…………………………（39）
§1.4.2　随机变量序列的两种收敛性……………………………（40）
§1.4.3　几个重要的结果…………………………………………（42）
§1.4.4　样本的 p 分位数及其渐近分布 ………………………（46）
§1.5　充分统计量…………………………………………………（50）

§1.5.1　统计量的压缩数据功能…………………………… (50)
§1.5.2　充分性…………………………………………………… (52)
§1.5.3　因子分解定理…………………………………………… (58)
§1.5.4　最小充分统计量………………………………………… (61)
§1.6　完备性……………………………………………………… (63)
§1.6.1　分布族的完备性………………………………………… (63)
§1.6.2　完备统计量……………………………………………… (65)
§1.7　指数结构…………………………………………………… (67)
§1.7.1　定义与例子……………………………………………… (67)
§1.7.2　指数型分布族的标准形式……………………………… (69)
§1.7.3　指数型分布族的基本性质……………………………… (70)
参考文献 ……………………………………………………………… (76)
习题一 ………………………………………………………………… (77)
第二章　点估计 …………………………………………………… (86)
§2.1　估计与优良性……………………………………………… (86)
§2.1.1　参数及其估计…………………………………………… (86)
§2.1.2　均方误差………………………………………………… (87)
§2.1.3　无偏性…………………………………………………… (87)
§2.1.4　相合性…………………………………………………… (89)
§2.1.5　渐近正态性……………………………………………… (91)
§2.2　无偏估计…………………………………………………… (93)
§2.2.1　无偏性…………………………………………………… (93)
§2.2.2　一致最小方差无偏估计………………………………… (95)
§2.2.3　例题……………………………………………………… (97)
§2.2.4　U 统计量 ……………………………………………… (101)
§2.3　信息不等式 ……………………………………………… (102)
§2.3.1　Fisher 信息量 ………………………………………… (102)
§2.3.2　Fisher 信息与充分统计量 …………………………… (105)
§2.3.3　信息不等式 …………………………………………… (108)
§2.3.4　有效无偏估计 ………………………………………… (112)

§2.4　矩估计与替换方法 …………………………………… (114)
§2.4.1　矩估计 ………………………………………… (114)
§2.4.2　矩估计的特点 ……………………………………… (116)
§2.4.3　频率替换估计 ……………………………………… (119)
§2.5　极大似然估计 ……………………………………… (122)
§2.5.1　定义与例子 ……………………………………… (122)
§2.5.2　相合性与渐近正态性 …………………………… (125)
§2.5.3　渐近有效性 ……………………………………… (132)
§2.5.4　局限性 ………………………………………… (133)
§2.6　最小二乘估计 ……………………………………… (134)
§2.6.1　最小二乘估计 ……………………………………… (134)
§2.6.2　最好线性无偏估计 ………………………………… (137)
§2.6.3　加权最小二乘估计 ………………………………… (139)
§2.7　同变估计 ………………………………………… (143)
§2.7.1　有偏估计 ………………………………………… (143)
§2.7.2　同变估计 ………………………………………… (144)
§2.7.3　位置参数的同变估计 …………………………… (145)
§2.7.4　尺度变换下的同变估计 ………………………… (149)
§2.7.5　最好线性同变估计 ………………………………… (152)
参考文献……………………………………………………… (155)
习题二………………………………………………………… (155)
第三章　假设检验……………………………………………… (167)
§3.1　基本概念 ………………………………………… (167)
§3.1.1　假设 …………………………………………… (167)
§3.1.2　检验，拒绝域与检验统计量…………………………… (168)
§3.1.3　两类错误 ………………………………………… (169)
§3.1.4　势函数 ………………………………………… (170)
§3.1.5　检验的水平 ……………………………………… (170)
§3.1.6　检验函数和随机化检验 ………………………… (173)
§3.1.7　充分性原则 ……………………………………… (174)

§3.2 Neyman-Pearson 基本引理 …………………… (175)
§3.3 一致最优势检验 …………………… (182)
§3.3.1 一致最优势检验 …………………… (182)
§3.3.2 单调似然比 …………………… (184)
§3.3.3 单边假设检验 …………………… (187)
§3.3.4 双边假设检验 …………………… (193)
§3.3.5 N-P 基本引理的推广(一) …………………… (194)
§3.3.6 单参数指数型分布族的双边假设检验问题(一) …………………… (195)
§3.4 一致最优势无偏检验 …………………… (198)
§3.4.1 无偏检验 …………………… (198)
§3.4.2 相似检验 …………………… (198)
§3.4.3 N-P 基本引理的推广(二) …………………… (199)
§3.4.4 单参数指数型分布族的双边假设检验问题(二) …………………… (202)
§3.5 多参数指数型分布族的假设检验 …………………… (211)
§3.5.1 多参数指数型分布族 …………………… (211)
§3.5.2 多参数指数型分布族的假设检验 …………………… (213)
§3.5.3 两个 Poisson 总体的比较 …………………… (215)
§3.5.4 两个二项总体的比较 …………………… (216)
§3.5.5 正态总体参数的检验问题 …………………… (217)
§3.6 似然比检验 …………………… (225)
§3.6.1 似然比检验 …………………… (225)
§3.6.2 简单原假设的检验问题 …………………… (228)
§3.6.3 复合原假设的检验问题 …………………… (232)
§3.6.4 二维列联表的独立性检验 …………………… (237)
§3.6.5 三维列联表的条件独立性检验 …………………… (238)
§3.7 U 统计量检验 …………………… (241)
§3.7.1 U 统计量 …………………… (241)
§3.7.2 U 统计量的期望和方差 …………………… (244)

§3.7.3　U 统计量的渐近正态性 …………………………… (248)
§3.7.4　两样本 U 统计量 …………………………………… (251)
参考文献…………………………………………………… (254)
习题三……………………………………………………… (254)
第四章　区间估计……………………………………… (262)
§4.1　基本概念 ……………………………………………… (262)
§4.1.1　区间估计 ………………………………………… (262)
§4.1.2　区间估计的可靠度 ……………………………… (262)
§4.1.3　区间估计的精确度 ……………………………… (263)
§4.1.4　置信水平 ………………………………………… (264)
§4.1.5　置信限 …………………………………………… (268)
§4.1.6　置信域 …………………………………………… (269)
§4.2　构造置信区间(置信限)的方法 …………………… (269)
§4.2.1　枢轴量法 ………………………………………… (269)
§4.2.2　基于连续随机变量构造置信区间 ……………… (273)
§4.2.3　基于离散随机变量构造置信区间 ……………… (274)
§4.2.4　区间估计与假设检验 …………………………… (280)
§4.2.5　似然置信域 ……………………………………… (281)
§4.3　一致最精确的置信区间(置信限) ………………… (283)
§4.3.1　一致最精确的置信限 …………………………… (283)
§4.3.2　一致最精确的无偏置信限和无偏置信区间 …… (285)
§4.3.3　置信区间的平均长度 …………………………… (288)
§4.4　信仰推断方法 ………………………………………… (290)
§4.4.1　信仰分布 ………………………………………… (290)
§4.4.2　函数模型 ………………………………………… (291)
§4.4.3　Behrens-Fisher 问题 …………………………… (294)
参考文献…………………………………………………… (297)
习题四……………………………………………………… (298)
第五章　统计决策理论与 Bayes 分析………………… (302)
§5.1　统计决策问题 ………………………………………… (302)

§5.1.1 决策问题 …… (302)
§5.1.2 统计决策问题的三个基本要素 …… (305)
§5.1.3 常用的损失函数 …… (308)
§5.2 决策函数和风险函数 …… (311)
§5.2.1 决策函数 …… (311)
§5.2.2 风险函数 …… (312)
§5.2.3 经典统计推断三种基本形式的再描述 …… (316)
§5.2.4 最小最大估计 …… (320)
§5.2.5 随机化决策函数 …… (323)
§5.2.6 随机化决策函数的风险函数 …… (325)
§5.3 决策函数的容许性 …… (330)
§5.3.1 决策函数的容许性 …… (330)
§5.3.2 Stein 效应 …… (332)
§5.3.3 单参数指数族中的容许性问题 …… (337)
§5.3.4 最小最大估计的容许性 …… (339)
§5.4 Bayes 决策准则 …… (340)
§5.4.1 先验分布 …… (340)
§5.4.2 Bayes 风险准则 …… (344)
§5.4.3 Bayes 公式 …… (346)
§5.4.4 共轭先验分布 …… (352)
§5.4.5 后验风险准则 …… (358)
§5.5 Bayes 分析 …… (362)
§5.5.1 Bayes 估计 …… (362)
§5.5.2 Bayes 估计的性质 …… (367)
§5.5.3 无信息先验分布 …… (373)
§5.5.4 多层先验分布 …… (377)
§5.5.5 可信域 …… (381)
参考文献 …… (389)
习题五 …… (390)
第六章 统计计算方法 …… (400)

§6.1　随机数的产生 …………………………………………… (400)
§6.1.1　逆变换法 …………………………………………… (400)
§6.1.2　合成法 ……………………………………………… (402)
§6.1.3　筛选抽样 …………………………………………… (403)
§6.1.4　连续分布的抽样方法 ……………………………… (405)
§6.1.5　离散分布的抽样方法 ……………………………… (410)
§6.1.6　随机向量的抽样方法 ……………………………… (413)
§6.2　随机模拟计算 …………………………………………… (416)
§6.2.1　统计模拟 …………………………………………… (416)
§6.2.2　随机投点法 ………………………………………… (419)
§6.2.3　样本平均值法 ……………………………………… (420)
§6.2.4　重要抽样方法 ……………………………………… (421)
§6.2.5　分层抽样方法 ……………………………………… (423)
§6.2.6　关联抽样方法 ……………………………………… (426)
§6.3　EM 算法及其推广 ……………………………………… (428)
§6.3.1　EM 算法 …………………………………………… (429)
§6.3.2　标准差 ……………………………………………… (438)
§6.3.3　GEM 算法 ………………………………………… (441)
§6.3.4　Monte Carlo EM 算法 …………………………… (442)
§6.4　Markov Chain Monte Carlo (MCMC)方法 ………… (444)
§6.4.1　基本思路 …………………………………………… (444)
§6.4.2　满条件分布 ………………………………………… (447)
§6.4.3　Gibbs 抽样 ………………………………………… (450)
§6.4.4　Metropolis-Hastings 方法 ……………………… (454)
§6.4.5　应用 ………………………………………………… (457)
参考文献…………………………………………………………… (459)
习题六……………………………………………………………… (461)

第一章　基本概念

§1.1　统计结构

§1.1.1　统计结构

概率论和数理统计都是研究随机现象统计规律性的数学学科，它们之间联系密切，但也有根本差别：在概率论中研究的出发点是一个概率空间$(\mathscr{X},\mathscr{B},\mathscr{P})$，即已知一个样本空间$\mathscr{X}$、$\mathscr{X}$中某些子集组成的$\sigma$代数$\mathscr{B}$和在可测空间$(\mathscr{X},\mathscr{B})$上定义的一个概率分布$P$，然后研究这个概率空间的各种性质；而在数理统计中研究的是一组受到随机性干扰的数据，再加上人们对这组数据的一些认识（即各种假设），就形成数理统计研究的出发点，然后对所考虑的问题作出统计推断或预测. 为说清这个出发点，我们先看一个例子.

例 1.1　（测量问题）一个试验者对未知的物理量μ进行测量，为了对μ作出估计，大家知道，他的测量值x会受到各种随机因素的影响，以至于使x可认为是μ加上随机误差ε后而得到的，即

$$x=\mu+\varepsilon$$

这里的“可加性”是人们对测量数据构成所作的一个假设，经过多次使用经验，说明这个假设是合理的. 另外，由于测量误差ε是受到测量仪器、环境温度、光线、视觉、心理等因素的微小变化而引起的综合结果，据中心极限定理，又可认为ε是服从均值为0和方差为σ^2的正态分布$N(0,\sigma^2)$. 这是人们对测量数据的另一个假设（认识）. 至此，我们对这个测量值问题的认识有如下三点：

1. 测量值x可取任何实数，实数集$\mathbf{R}$组成样本空间；

2. 实数集 $\mathbf{R}$ 上的 Borel 集的全体组成的 σ 代数 $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$；

3. 在可测空间$(\mathbf{R},\mathscr{B}_{\mathbf{R}})$上的一个概率分布族

$$\mathscr{P}_1=\{N(\mu,\sigma^2):(\mu,\sigma)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+\}$$

其中 $\mathbf{R}^+$ 是正实数集.

这样三件东西 $\mathbf{R}$,$\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ 和 $\mathscr{P}_1$ 就是我们研究测量问题的出发点. 假如不仅了解 ε 服从正态分布,而且还知其方差为 σ_0^2(比如知道测量仪器的精度),那么分布族就缩小为

$$\mathscr{P}_2=\{N(\mu,\sigma_0^2):\mu\in\mathbf{R}\}$$

这时 $\mathbf{R}$,$\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ 和 $\mathscr{P}_2$ 就成为我们研究这个问题的出发点,假如我们对随机误差 ε 了解甚少,讲不出 ε 的分布是什么类型,只知道它是关于 0 对称的连续分布,那么分布族就扩大为

$$\mathscr{P}_3=\{P:P\text{ 为 }\mathbf{R}\text{ 上关于 }\mu\text{ 对称的分布}\}$$

这时,研究这个问题的出发点就是 $\mathbf{R}$,$\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ 和 $\mathscr{P}_3$.

定义 1.1 设$(\mathscr{X},\mathscr{B})$为可测空间,$\mathscr{P}$ 为其上的一个概率分布族,则称三元组$(\mathscr{X},\mathscr{B},\mathscr{P})$为统计结构,或称为统计模型. 假如分布族 $\mathscr{P}$ 仅依赖于某个参数(或参数向量)θ,即

$$\mathscr{P}=\{P_\theta:\theta\in\Theta\}$$

其中 Θ 为参数空间,则称此结构为参数(统计)结构,或称为参数(统计)模型,否则称为非参数(统计)结构或非参数(统计)模型.

在例 1.1 中,$(\mathbf{R},\mathscr{B}_{\mathbf{R}},\mathscr{P}_1)$,$(\mathbf{R},\mathscr{B}_{\mathbf{R}},\mathscr{P}_2)$,$(\mathbf{R},\mathscr{B}_{\mathbf{R}},\mathscr{P}_3)$是三个不同的统计结构. 它们之间的差别可能反映实际背景的差别,也可能反映人们对实际情况认识上的差别,因此这三个结构可能都是合理的,至于选用哪一个结构,这已不是一个理论问题,而是一个实践性很强的问题,人们常凭借经验积累、专业知识和抽象概括等来确定统计结构.

在例 1.1 中,$(\mathbf{R},\mathscr{B}_{\mathbf{R}},\mathscr{P}_1)$和$(\mathbf{R},\mathscr{B}_{\mathbf{R}},\mathscr{P}_2)$是参数结构,而$(\mathbf{R},\mathscr{B}_{\mathbf{R}},\mathscr{P}_3)$是非参数结构. 人们往往希望从参数结构出发来研究问题,因为参数结构含有较多的信息,由此出发,可以获得精度较高的参数估计,但这样做要意识到是有风险的,因为当参数结构不真时,那推断结果可能离实际更远了. 若选用非参数结构,所冒风险就要小得多,因为非参数结构所含的信息较少,适应面广,但精度一般不会很高,以后会看到,在

这两类结构下所用的统计推断方法有很大差别,以至于在今天已形成统计中的参数方法与非参数方法两类.

§1.1.2 乘积结构与重复抽样结构

由简单的统计结构可以派生出一些比较复杂的统计结构.

定义 1.2 设$(\mathscr{X},\mathscr{B},\mathscr{P})$和$(\mathscr{X}',\mathscr{B}',\mathscr{P}')$是两个统计结构,则称$(\mathscr{X}\times\mathscr{X}',\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}',\mathscr{P}\otimes\mathscr{P}')$为两者的乘积结构,并记为$(\mathscr{X},\mathscr{B},\mathscr{P})\otimes(\mathscr{X}',\mathscr{B}',\mathscr{P}')$,其中

$$\mathscr{P}\otimes\mathscr{P}'=\{P\otimes P':P\in\mathscr{P},P'\in\mathscr{P}'\}$$

类似地可以给出多于两个统计结构的乘积结构.特别,n个相同统计结构$(\mathscr{X},\mathscr{B},\mathscr{P})$的乘积结构称为重复抽样结构,记为$(\mathscr{X},\mathscr{B},\mathscr{P})^n$或$(\mathscr{X}^n,\mathscr{B}^n,\mathscr{P}^n)$.

乘积结构在实际中相当于独立观察系统,重复抽样结构相当于对一个总体进行有限次独立抽样结果的描述.今后,“从一个总体(或分布)抽取一个样本”与“从一个统计结构抽取一个样本”这两种说法是表示同一个意思.

例 1.2 在方差相等的两个正态均值的比较的问题中,若对于第一个正态总体$N(\mu_1,\sigma^2)$获得n_1个观察值,对于第二个正态总体$N(\mu_2,\sigma^2)$获得n_2个观察值,那么研究这个问题所涉及的统计结构是一个乘积结构.

$$\begin{aligned}&(\mathbf{R}^{n_1},\mathscr{B}_{\mathbf{R}}^{n_1},\mathscr{P}_1^{n_1})\otimes(\mathbf{R}^{n_2},\mathscr{B}_{\mathbf{R}}^{n_2},\mathscr{P}_2^{n_2})\\&=(\mathbf{R}^{n_1+n_2},\mathscr{B}_{\mathbf{R}}^{n_1+n_2},\mathscr{P}_1^{n_1}\otimes\mathscr{P}_2^{n_2})\end{aligned}$$

其中

$$\mathscr{P}_1=\{N(\mu_1,\sigma^2):(\mu_1,\sigma)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+\}$$

$$\mathscr{P}_2=\{N(\mu_2,\sigma^2):(\mu_2,\sigma)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+\}$$

$(\mathbf{R}^{n_1},\mathscr{B}_{\mathbf{R}}^{n_1},\mathscr{P}_1^{n_1})$是第一个正态总体的重复抽样结构,而$(\mathbf{R}^{n_2},\mathscr{B}_{\mathbf{R}}^{n_2},\mathscr{P}_1^{n_2})$是第二个正态总体的重复抽样结构.

从定义 1.2 可以看出,从统计结构$(\mathscr{X},\mathscr{B},\mathscr{P})$抽取容量为$n$的样本和从重复抽样结构$(\mathscr{X}^n,\mathscr{B}^n,\mathscr{P}^n)$抽取容量为 1 的样本所给出的信

息是一样的.

定义 1.3　设$(\mathscr{X},\mathscr{B},\mathscr{P})^n$为重复抽样结构,对每个样本$(X_1,\cdots,X_n)\in\mathscr{X}^n$,由

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_{\{X_i\leqslant x\}},\quad \forall\, x\in\mathbf{R}$$

所确定的$(\mathscr{X},\mathscr{B})$上的分布称为样本分布或经验分布.对每一个样本观察值来说,$F_n(x)$是一个分布函数,称为样本分布函数或经验分布函数.对每个固定的$x\in\mathbf{R}$,$F_n(x)$又是样本$X_1,\cdots,X_n$的一个函数,故$F_n(x)$又是一个随机变量.

由于可把诸示性函数$I_{\{X_i\leqslant x\}}$,$i=1,\cdots,n$,看作是独立同分布,仅取0或1的随机变量,故有

$$\mathrm{E}F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}I_{\{X_i\leqslant x\}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(X_i\leqslant x)=F(x)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[F_n(x)]&=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}I_{\{X_i\leqslant x\}}\\&=\frac{1}{n}F(x)[1-F(x)]\leqslant\frac{1}{4n}\leqslant\frac{1}{4}\end{aligned}$$

其中$F(x)$为分布族$\mathscr{P}$中某个P的分布函数,常称$F(x)$为某总体的分布函数.由大数定律可知,对任意$\varepsilon>0$,总有

$$P(|F_n(x)-F(x)|\geqslant\varepsilon)\to 0\quad(n\to\infty)\tag{1.1}$$

这表明,只要n愈来愈大,样本的经验函数$F_n(x)$可以愈来愈接近总体分布函数$F(x)$,因此可以用$F_n(x)$的各阶矩(如样本均值,样本方差,样本相关系数,样本协方差阵等)研究统计结构$(\mathscr{X},\mathscr{B},\mathscr{P})$的某些特征.这一想法在统计中是经常被使用的.

关于经验分布函数$F_n(x)$,还有比(1.1)更强的结论,那就是如下的格里汶科定理.

定理 1.1(格里汶科)　对任意给定的自然数n,设$x_1,\cdots,x_n$是取自总体分布函数$F(x)$的一个样本观察值,$F_n(x)$为其经验分布函数,记

$$D_n=\sup_{-\infty<x<\infty}|F_n(x)-F(x)|$$