



研究生教材

非线性连续介质 力学基础

匡震邦

西安交通大学出版社

1975.12

研究生教材

非线性连续介质力学基础

匡 震 邦

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书阐述非线性连续介质力学的基本内容和近代发展，全书共十章和一个附录，详尽地研究了有限变形理论，特别是增率理论；概括了各种固体和流体本构理论的主要方面；系统地介绍了不可逆过程热力学在连续介质力学中的应用；并适当介绍了连续介质力学在计及材料微观组织时的处理方法。前九章采用直角坐标系，物理概念和数学推演并重，第十章又在曲线坐标系中用普遍形式概括地叙述了连续介质力学的基本原理。书中给出不少例题并附有一定数量的习题以供练习。

本书可作为力学、数学和有关专业的研究生教材，也是有关学科的大学教师和科学技术工作者的有益的参考书。

非线性连续介质力学基础

匡 震 邦

责任编辑 蒋 潞

*

西安交通大学出版社出版

(西安市咸宁路28号)

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

*

开本850×1168 1/32 印张 15.5 字数：395 千字

1989年3月第1版 1989年3月第1次印刷

印数：1——3000册

ISBN7-5605-0024-2/O·10 定价：3.80元

《研究生教材》总序

研究生教育是我国高等教育的最高层次，是为国家培养高层次人才的人才。他们必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，以及从事科学研究工作或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是研究生培养中的重要环节。为此，我们组织出版这套《研究生教材》，以满足当前研究生教学，主要是公共课和一批新型的学位课程的教学需要。教材作者都是多年从事研究生教学工作，有着丰富教学和科学研究经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外的最新学术动态，使研究生学习之后，能迅速接近当代科技发展的前沿，以适应“四化”建设的要求；其次，也注意到研究生公共课程和学位课程应有它最稳定、最基本的内容，是研究生掌握坚实的基础理论和系统的专门知识所必要的，因此在研究生教材中仍应强调突出重点，突出基本原理和基本内容，以保持学位课程的相对稳定性和系统性，内容有足够的深度，而且对本门课程有较大的覆盖面。

这套《研究生教材》虽然从选题、大纲、组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的定稿工作，但毕竟是第一次编辑这样的高层次教材系列，水平和经验都感不足，缺点与错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院

西安交通大学出版社

1986年12月

前 言

随着科学和工程技术的迅速发展，人们的知识日益丰富，对自然界的认识日趋深刻，使用材料的种类日益增多，对工程设计的要求也愈来愈高；因而对构件内的应力、变形和破坏机理，以及流体的运动规律，流体和固体相互作用的分析，都提出了更高的要求。所有这些都和有限变形理论及非线性本构理论密切相关。力学工作者正面临着严峻的挑战。

在目前大学的力学课程中，有关上述两方面的知识一般都显得薄弱，这就要求由研究生的课程加以弥补。如何在大学课程和近代力学之间架起一座坚实的桥樑，这是一个迫切而又艰巨的任务。若干年来，本书作者曾作过一些微薄但却认真的努力，希望研究生能较快熟悉近代力学的基本内容。展现在读者面前的这本书便是这种努力的一部分。本书力求物理概念和数学表示并重，遵循由浅入深的原则，希望在教师的引导下，研究生可独立地钻研。

本书的内容大体可分为五部分。第一部分包括第一章和第十章的前几节，简要地叙述了本书中要用到的张量和线性代数知识，使读者只须具备微积分和矩阵代数运算知识，便可阅读本书。

第二部分包括第二和第三章，主要讲述直角坐标系中有限变形和应力理论。在这两章中，还引入随体(或嵌入)坐标系，但只使用协变基矢量，这样做的好处是使变形几何学的叙述更为简明。这两章的显著特点是详细介绍了应变和应力的增率理论、给出了应力增率形式的运动方程和虚功率增率原理，它们无论在理论上还是在数值分析中都极为重要。此外这两章还讨论了增量有限元

的基本理论，使对数值分析感兴趣的读者，可从中得到足够的理论基础。

第三部分包含第四章，主要介绍连续介质力学中的不可逆热力学理论，指出用它来研究本构方程的方法，这部分较为系统地总结了目前常用的一些理论，并提出了把本构方程分为两组的设想。这方面的内容，目前尚未形成严谨的理论，正在不断发展中。希望读者通过学习，能以此为新的研究起点。

第四部分包括第五到第九章，讲述本构方程的基本理论和一些特殊物质的本构理论。第五章讨论了简单物质的 Noll 三原则和本构方程，较详细地阐述了客观性原理，证明了 Newton 运动定律采用本构加速度后便与客观性原理相符合。第六章讨论了非线性弹性体的本构方程和本构方程中所含常数的确定方法，通过一些简单问题的求解，给出了非线性弹性力学边值问题解的一般特征。第七章介绍了非 Newton 流体本构方程的建立方法和一些简单问题的解，较为详细地讨论了测粘函数的确定方法，这对聚合物和生物流体极为重要。第八章讨论粘弹性体，第九章讲述弹塑性体和弹-粘塑性体，考虑到大学教材中这两部分内容叙述较少，因此都从基本概念和理论出发，再进入较为一般的讨论；在这两章中，增率型的本构方程和积分型的本构方程同时叙述，两者相辅相成，各具优点；为照顾在数值分析中的应用，还给出了积分型本构方程的增率形式；在塑性理论中专用一节介绍了晶体塑性理论，使读者初步了解如何把连续介质力学应用到微观和宏观相结合的研究中去。

第五部分包含第十章大部分，主要讲述曲线坐标系中连续介质力学的一般理论，介绍了一种初读者易于接受的从张量分量转换为物理分量的方法。此章中对客观性应力增率作了较为详细的讨论，并提出了微元体的真实旋率理论。

研究内部有损伤的材料对外载荷的响应，是损伤力学的任务。

利用本书正文中的内容可以建立损伤力学的唯象理论，因而在附录中作一介绍是恰当的。

本书较为广泛地引用了近年来文献中提出的一些主要理论，并引用了西安交通大学的一些研究结果，使读者通过学习，可较顺利地阅读有关文献。每章中给出了相当数量的例题，帮助读者掌握基本概念和理论。每章附有一定数量的习题，以供练习。

从作者的教学实践看，前四章是必读内容，约需 25~30 学时；第五至第九章约需 30~35 学时，第十章约需 6~8 学时(可自学)。

罗祖道、戴天民教授，周兆民和茅人杰副教授曾对本书提出过许多宝贵意见；西安交通大学使用过本书的研究生也提出了不少改进意见，作者对此深表谢意。

希望本书能对力学系和有关系科的研究生，以及教育和科技工作者有所帮助。由于作者水平有限，错误和不当之处，望读者和专家们指正。

匡 震 邦 写于古都长安

1987.6

目 录

前 言

第一章 绪论

- § 1—1 物体的理论模型 (1)
- § 1—2 连续介质力学中的“基元” (2)
- § 1—3 连续介质力学的研究对象、内容和方法 (5)
- § 1—4 欧氏空间中的矢量和张量 (7)
- § 1—5 实对称方阵的本征值与本征矢量 (15)
- § 1—6 坐标变换与二阶张量的不变量 (19)
- § 1—7 Cayley-Hamilton定理 (21)
- § 1—8 各向同性张量 (22)

第二章 直角坐标系中的变形与运动

- § 2—1 物体的构形和坐标系 (25)
- § 2—2 物体的运动 (28)
- § 2—3 变形梯度和变形张量 (32)
- § 2—4 应变张量 (36)
- § 2—5 变形张量的主值和极分解 (41)
- § 2—6 随体坐标系与变形的几何解释 (53)
- § 2—7 协调方程 (59)
- § 2—8 面元和体元的变化 (62)
- § 2—9 变形率、应变率和旋率张量 (67)
- § 2—10 速度环量与涡旋 (76)
- § 2—11 流动参照构形和 Rivlin-Ericksen 张量 (78)
- § 2—12 应变的增量理论与参照构形的变换 (84)

第三章 直角坐标系中的应力理论 动力学基本方程

- § 3—1 质量守恒和体积分的物质导数……………(92)
- § 3—2 Euler 应力张量……………(95)
- § 3—3 Euler 描述法中的运动方程 ……(98)
- § 3—4 坐标变换和主应力……………(99)
- § 3—5 间断面上质量和动量的间断条件……………(105)
- § 3—6 Lagrange 和 Kirchhoff 应力张量 ……(109)
- § 3—7 Lagrange 描述法中的运动方程 ……(116)
- § 3—8 应力增率理论……………(118)
- § 3—9 应力增率运动方程……………(122)
- § 3—10 应力增量理论与参照构形的变换……………(126)
- § 3—11 虚功原理、虚功率原理和虚功率增率原理(129)
- § 3—12 增量有限元的基本理论……………(140)

第四章 连续介质热力学

- § 4—1 平衡系统热力学的基本概念……………(151)
- § 4—2 均匀系统的熵理论……………(153)
- § 4—3 理想气体的特性函数和比热……………(158)
- § 4—4 连续介质热力学第一定律……………(162)
- § 4—5 连续介质热力学第二定律与熵产率……………(166)
- § 4—6 不可逆热动力学理论……………(170)
- § 4—7 内变量理论……………(181)
- § 4—8 能量和熵的间断条件……………(190)

第五章 本构方程的基本理论

- § 5—1 本构方程构成的基本原理……………(196)
- § 5—2 物质客观性原理……………(198)
- § 5—3 简单物质的本构方程……………(208)
- § 5—4 物质对称性原理……………(215)

第六章 弹性体

- § 6—1 Cauchy 弹性材料的本构方程 (223)
- § 6—2 超弹性材料 (226)
- § 6—3 用 T 、 S 表示的本构方程 (232)
- § 6—4 弹性力学边值问题的提法 (234)
- § 6—5 各向同性弹性体的均匀变形 (236)
- § 6—6 橡胶试验和应变能函数的确定 (241)
- § 6—7 增率理论 (248)
- § 6—8 有限变形弹性理论中的变分原理 (251)

第七章 流体

- § 7—1 流体的本构方程 (261)
- § 7—2 流体动力学问题的提法 (268)
- § 7—3 不可压缩 $R-E$ 流体在两平行板间的
平行运动 (270)
- § 7—4 Poiseuille 圆管流 (273)
- § 7—5 Couette 流与测粘函数 (280)
- § 7—6 Bingham 流体在两旋转圆柱之间的运动 (287)
- § 7—7 平行板粘度计 (289)
- § 7—8 锥—板粘度计 (292)
- § 7—9 单轴拉伸流动 (297)

第八章 粘弹性体

- § 8—1 线性粘弹性体的基本概念和理论 (302)
- § 8—2 线性粘弹性体的本构方程 (309)
- § 8—3 粘弹性体的减退记忆理论 (320)
- § 8—4 增量型本构方程 (329)

第九章 弹塑性体和弹—粘塑性体

- § 9—1 弹塑性体小变形时的基本概念和理论 (344)
- § 9—2 小变形时塑性积分不等式和法向流动规则 (351)

§ 9—3	弹塑性体的增率型本构方程	(356)
§ 9—4	弹塑性体的积分型本构方程	(368)
§ 9—5	晶体塑性理论初步	(378)
§ 9—6	弹—粘塑性体	(384)

第十章 曲线坐标系中的基本方程

§ 10—1	曲线坐标系中的矢量和张量	(392)
§ 10—2	张量的协变微分	(400)
§ 10—3	Gauss 定理和 Stokes 定理	(407)
§ 10—4	两点张量	(412)
§ 10—5	变形理论	(414)
§ 10—6	速度、加速度、变形率、应变率、 旋率和 $R-E$ 张量	(420)
§ 10—7	线元、面元和体元的变化	(424)
§ 10—8	曲线坐标系中的应力	(427)
§ 10—9	运动方程	(431)
§ 10—10	应力增率理论	(433)
§ 10—11	曲线坐标系中的本构方程和热力学定律	(442)
§ 10—12	圆柱坐标系中的基本方程	(446)
§ 10—13	球坐标系中的基本方程	(452)
§ 10—14	直杆的纯变曲—同时应用两种坐标系	(459)

附录 损伤力学介绍

§ 1	损伤变量	(464)
§ 2	广义正则材料	(466)
§ 3	损伤力学的热力学理论	(469)
§ 4	孔洞模型	(477)

参考文献	(480)
------	---------

第一章 绪 论

§ 1-1 物体的理论模型

客观物质世界的运动是非常复杂的。机械的、物理的、化学的和生物学的各种运动，往往交织在一起。为了认识现实的运动，人们把具体的复杂的现实运动分解成一些较为简单的运动，然后逐一研究，建立各种分支学科，这便是“分解”的方法。分支学科发展到一定阶段，它们相互渗透，构成新的分支或边缘学科；同时，人们认识到各分支学科之间的共性，又把它们综合起来研究，形成内容更为广泛、更为基本也更为统一的综合性理论，这是“综合”的方法。分解和综合的方法是人们认识自然界的基本方法。

现实的物体及其运动极为复杂，人们要在思维的王国中把它们完全再现是很困难的。然而，对于特定物体的特定运动，只是事物和环境中的特定因素起主导作用；在这种情形下，人们只需把握这些“特定的因素”，便可充分掌握物体的运动。因此，对于各种特定的运动，人们提出种种“理论模型”，然后以较为严格的数学方式去研究这种模型，再把研究的结果和实际情况相对照，进一步修正模型，直至理论结果和现实的运动比较一致。显然，理论模型要比较简单，便于物理的和数学的处理；理论模型又应力求准确，能反映特定运动的本质，保证理论结果和现实的运动基本一致。简单而又准确的模型是人们在长期的实践中逐步获得的。

在力学范畴内,质点、刚体、弹性体、粘弹性体、弹塑性体、理想不可压流体、理想可压气体、Newton粘性流体等,便是一些公认的理论模型,它们都在不同的条件下,代表真实的连续体;它们具体应用的情形,已在理论力学、固体力学和流体力学等分支学科中详加说明。这些模型在科学研究和工程应用中,都显示出重要作用。

当力学研究的对象更新,领域扩大或精确性要求提高时,原先提出的理论模型往往显得不足,须加以改进,提出新的模型。例如研究动载荷作用下的塑性较好的材料,无论是粘弹性体或是硬化弹塑性体,都难以准确地反映材料的响应,引入弹-粘塑性体的模型便较为可取;讨论低应变率下的血液,桐油等流体时,会出现用Newton粘性流体理论无法解释的现象,引入各种非Newton流体的模型便是必要的;讨论等离子气体的运动时,又需要引入电磁流体力学模型等等。

上面讨论的是物体的宏观模型,它虽以物质的微观结构为背景,但采用的是宏观的唯象方法。除唯象方法外,人们还通过研究组成物体的分子、原子和基本粒子的运动,来推断材料的宏观性质,这便是物质结构论或物理力学,这是一种更为基本且完善的理论研究方法,但到目前为止,这种方法只能对一些十分简单的物质,如稀薄气体,得出一些有实用意义的结果,而象固体等复杂物质,取得的结果是很有限的。因此,目前,人们仍然大量采用唯象方法,提出各种宏观的理论模型,去解决实际问题。

物质结构论和宏观的唯象方法是相辅相成的,两者相结合,对物质本身的认识和理论模型的建立将会起重大作用。

§ 1-2 连续介质力学中的“基元”

连续介质力学以现实物体的理论模型作为研究对象,并力求

使它能在本质上准确地描写客观物体的运动。正好像建造房屋时，首先要有砖瓦和木材那样，为了描写这种运动，需要给出一些基本的名词和术语，它们构成连续介质力学的“基元”。通过一些定律、理论和公式，把这些名词和术语相互联系起来，便构成连续介质力学的理论体系。本节中将给出一些最基本的名词和术语的主要含义。

1. 物体 在某一确定的瞬时，物体具有一定的几何形状，并有一定的质量。同时，物体还可具有电磁、热容和变形等许多重要的性质。物体由质点构成，质点占据非常小的确定的空间，具有非常小的确定的质量，这和不占空间的数学点在性质上是不同的。例如，可以把原子看成质点，约占 10^{-24}cm^3 量级的空间；一个氢原子的质量约为 $1.67 \times 10^{-24}\text{g}$ 等等。但当我们以宏观尺度来讨论问题时，例如体积为 $1\mu\text{m}^3 = 10^{-12}\text{cm}^3$ 的物体，其中仍含有 10^{12} 个原子，其数量是非常庞大的，因此仍可相当准确地应用数学中连续的概念，应用现成的数学方法去解决问题。

物体可以抽象成各种模型：如质点、刚体、弹塑性体、流体、颗粒体等；按几何性质还可分为质点、一维的弦和杆、二维的板壳及三维的块体等。物体与物体是可以相互区别的，若干个物体可以形成集合，组成系统，不属于这个系统的物体，构成这个系统的环境或外界。

2. 质量 质量是物体运动惯性的度量，对有限体或理想化的质点，它是一个有限数。质量是物体的基本属性，没有不具质量的物体。在 Newton 力学领域内，质量是一可加量，即物体的总质量是其各部分质量的直接和。质量服从质量守恒定律，不能被消灭，也不能无中生有。和物体的形态相对应，质量可分为点质量、线分布质量、面分布质量和体分布质量。质量的单位是 kg。

3. 时空系 时间和空间是运动物体的客观存在形式，离开空间和时间来讨论物体的存在和运动是没有意义的。空间表示物

体的形状、大小和相互位置的关系；时间表示物体运动过程的顺序。为了描写物体的运动，需要在时间和空间中选出一特定的标架，作为描写物体运动的基准，这种标架系称为时空系。现实的空间是三维的，可用三个不相互重合的任意坐标架来描写，但为简单起见，通常选用三根相互垂直的坐标轴，即正交坐标系。位置的变动是可逆的，即一个物体可以从左向右运动，也可以从右向左运动。现实的时间是一维的，用一根时间轴来描写；时间变化是不可逆的，永远从“过去”走向“未来”，事件只能向前运动，不能倒退。时间的不可逆性和事件的因果律相关，原因发生作用的后果是结果，原因在前，结果在后。在讨论一些理想化的可逆模型时，有时时间也理想化成可逆的，即把时间倒退回去，物体可以恢复到原先的状态，而不对环境产生任何影响。

在许多实际问题中，需要从一个时空系转换到另一个时空系，在经典的转换理论中，需要满足两个基本的事实，即同一事件的时间间隔和空间间隔保持不变。在相对论中，时空是相互关联的，只要求四维的时空间隔保持不变。

4. 运动 物体状态或各种参数随时间的变化过程称为运动。机械运动描写物体位置的变化；电磁运动描写电磁场的变化；生物运动描写生物体的诞生、成长和衰亡的变化及各种生物学参数的变化。显然，物体的运动是构成物体质点运动的有机总和。物体的运动须满足某些一般的规律，如质量、动量、能量和电荷等的守恒定律。

5. 动量 动量是物体机械运动的度量，质点的线动量等于其质量和运动速度的乘积；动量是矢量，服从矢量运算规则，物体的总动量是各部分动量的矢量和。

6. 力 物体线动量的变化率等于作用于其上的合力，力是改变物体运动的原因。物体与物体间的相互作用产生机械力，任何两个物体之间均存在引力，电磁场中的带电粒子受到电磁力的

作用，甚至化学反应也采用亲和力的概念。力是矢量，服从矢量运算规则。物体受到外界其它物体相互作用的力称为外力，物体内部各部分之间的相互作用力称为内力。根据力的作用方式又可分为点集中力、线分布力、面力和体力等。力的单位是 $N(kgm/s^2)$ 。

7. 功和能 力和沿力方向位移的乘积称为功。对于和外界环境没有热交换的系统，系统对环境所作的功等于其内（部）能（量）的减少；物体的动能等于其质量和速度平方乘积的一半。对保守力场，其势能的减少等于它对物体所做的功。能量是一个抽象的概念，只有从不同形式的能量相互转换的过程中，才能深入地把握它。能量是纯量，服从能量守恒和转化定律，它不能无中生有，也不能被消灭。系统的总能量是其各部分能量之和。它的单位是 $J(即N\cdot m)$ 。

8. 温度和热 温度是物体冷热程度的度量。较热的物体有较高的温度，处于热平衡的物体具有相同的温度。由于存在温度差，从一个物体流向另一个物体的能量以热的形式表现出来。常用的温度单位是热力学温度 $^{\circ}K$ 和摄氏温度 $^{\circ}C$ 。

9. 熵 熵是在热力学第二定律的数学表述中引进的一个态函数，它是可加函数，系统的熵等于各部分熵的和。它最重要的特性是：系统熵的变化永不小于系统由环境得到的热量与得到（或放出）此一热量时的热力学温度的比值，详细的讨论见第四章。理性热力学把熵看成无须用其它物理量定义的“本原量”。

§ 1-3 连续介质力学的研究对象、 内容和方法

简单说来，连续介质力学研究连续介质（包括固体、流体、松散介质、颗粒体等）的变形和运动，也研究破坏机理。在材料力学和弹塑性力学等课程中研究固体，在流体力学和空气动力学等

课程中研究流体等等，不同的研究对象构成了力学中不同的分支学科。虽然这些分支学科各有特点，互不相同，但它们全体仍然服从一些共同的规律。把这些分支学科放到一起来讨论，看看哪些规律是它们共有的，哪些规律互不相同，进而在统一的基础上加以研究，这是连续介质力学研究的重要内容。

连续介质力学作为一门课程，可以放在各分支学科之前学习，使读者对力学有一概括的了解，然后对特殊介质进行更深入的研究，即学习各分支学科；它也可以放在诸分支学科之后学习，研究各分支之间的内部联系，以高度统一的观点去把握各分支学科。所以连续介质力学既可以看成各分支学科的出发点，也可以看成是各分支学科的归宿。作为出发点，它给出了各分支学科的骨架；而作为归宿，它却是有血有肉，用骨架支撑起来的客观有机体。

广义言之，连续介质力学还讨论“场——一种特殊的连续介质”的运动，例如引力场，电磁场，甚至化学反应等。本书只作狭义的讨论；同时，也不涉及相对论连续介质力学和具有量子效应的连续介质力学，有兴趣的读者可查阅有关文献。

连续介质力学的基本方程，大体可分为两类。一类适用于所有物体，构成了自然界的基本规律，如质量守恒、能量守恒、Newton运动定律，又如保证物体自身完整性的连续性条件或遵循一定规则的间断性条件等；另一类是各种物体特有的规律，构成了各自的本构方程。不同的本构方程是各种介质相互区别的标志，是在相同环境下，物体具有不同运动的原因。在通常等温体的弹性力学中，本构方程只涉及应力和应变，因而又称应力应变关系；在热力学中，本构方程也称状态方程。

虽然不同的介质具有不同的本构关系，但本构关系本身却满足一些共同的准则，如时空无差异性，热力学第二定律等等。自然界只存在可能存在的一类本构关系，因此本构关系的探讨，构成连续介质力学的重要内容。