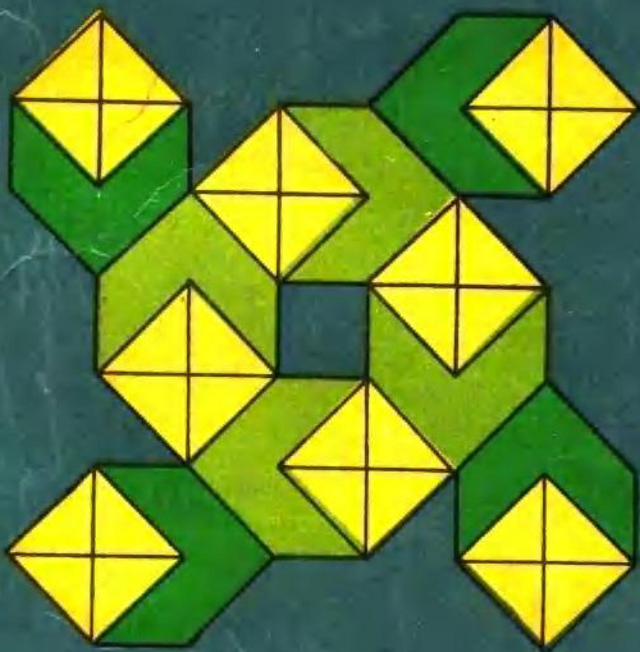
工科研究生教材

陈大新　编著

矩阵理论

JU ZHEN LI LUN



上海交通大学出版社

工科研究生教材

矩阵理论

陈大新 编著

上海交通大学出版社

沪新登字 205 号

内 容 提 要

本书是根据国家教委课程指导委员会制定的工科硕士研究生《矩阵论》课程教学基本要求编写的。本书主要讲述特征值与特征向量、内积空间与特殊矩阵、Jordan 标准型、矩阵分析初步和广义逆矩阵等内容。为了使读者加深理解和巩固知识，本书列举大量的题目，并在书后就每章都安排一定量的习题．本书可作为大专院校工科研究生的教材，也可作为工程技术人员进一步提高和更新知识等自修教材。

矩阵理论

出版：上海交通大学出版社

（淮海中路1984弄 19 号）

发行：新华书店上海发行所

印刷：常熟市印刷二厂

开本：850×1168(毫米)1/32

印张：8

字数：207000

版次：1991 年 11 月第 1 版

印次：1991 年 12 月第 1 次

印数：1—2650

科目：258—303

ISBN7—313—00952—6/O·1-0

定价：2.60元

前　言

本教材是根据国家教委课程指导委员会制定的工科硕士研究生《矩阵论》课程教学基本要求编写的。由于40学时的限制（*号部份为40学时外参考用）以及学习对象实践性强的特点，教材主要挑选矩阵应用理论的基本方法和进一步学习所必须的内容。重点讲清方法的含义、几何的背景和数学论证的思想，而不拘泥于繁琐的推演。

为了加强基本训练，习题分A，B两类。A类是基本要求。广义逆一章根据要求不设B类习题。

作者从事本课程教学工作已十多年，很久以来盼望有一本较有特色的教材，所以在编写中作了一些新的尝试。希望本教材能对进一步学习高级矩阵理论以及实际应用矩阵理论的读者带来方便和收益。但教材工作是件非常细致的工作，永无止境，望能得到同道批评指正。

作者

1991.6

主要符号表

$A^{(j)}$	矩阵 A 的第 j 列。
$A_{(i)}$	矩阵 A 的第 i 行。
$e^{(j)}$	$(0\cdots1\cdots0)^T$ 第 j 个分量。
e_i	$(0\cdots1\cdots0)$ 第 i 个分量。
$r(A)$	矩阵 A 的秩
$r(\sigma)$	线性变换 σ 的秩
$\eta(\sigma)$	线性变换 σ 的零度
C^n	n 维有序复数组构成的线性空间——n 维复向量空间
R^n	n 维有序实数组构成的线性空间——n 维实向量空间
F^n	n 维有序数组构成的线性空间，数取自域 F 上
$N(A)$	矩阵 A 的零空间
$R(A)$	矩阵 A 的像空间(矩阵 A 的列空间)
$N(A^T)$	矩阵 A^T 的零空间
$R(A^T)$	矩阵 A^T 的像空间(矩阵 A 的行空间)
$\mathrm{Im}\sigma$	线性变换 σ 的像空间
$\mathrm{Ker}\sigma$	线性变换 σ 的核空间
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$\mathrm{diag}(\lambda_1\cdots\lambda_n)$	对角元为 $\lambda_1\cdots\lambda_n$ 的对角阵
V_λ	由对应于特征值 λ 的特征向量生成的特征空
(α,β)	向量 α,β 的内积
$(A)_{ij}$	矩阵 A 在第 i 行第 j 列交叉处的元
$\mathrm{adj}A$	A 的伴随矩阵
$\|\alpha\|$	向量 α 的范数
单纯矩阵	有完全特征向量系的矩阵

$A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_k \\ j_1\cdots j_k \end{pmatrix}$	矩阵的 k 阶子式，它的行标为 $i_1\cdots i_k$，列标为 $j_1\cdots j_k$
m 集	由 m 个元组成的集合
整数矩阵	元为整数的矩阵
E_{ij}	位置在 (i,j) 处是 1，其余均为零的矩阵
$\lambda(A)$	矩阵 A 的谱
$C_{[a,b]}$	区间 $[a,b]$ 上全体连续函数构成的线性空间
$\mathrm{Hom}(V,W)$	由线性空间 V 至 W 的线性变换全体构成的集合
$[\alpha_1\cdots\alpha_k]$	由向量 $\alpha_1\cdots\alpha_k$ 生成的子空间
$J_{(k)}(\lambda)J_k(\lambda)$	k 阶 Jordan 块
▨	证明完毕
$\Longleftrightarrow$	充分必要
$\forall$	对所有
$\exists$	存在有

目　录

第一章 基础知识

本章带有复习性质，目的是帮助读者整理一下学习矩阵理论的一些有用的定理与方法。有些定理当作已知，只讲其应用。要求读者仔细学习本章，为后几章学习打下良好的基础。

第一节 矩阵的乘法

矩阵的乘法是矩阵的重要运算之一。如果有 $AB=C$，除了要知道如何进行乘法运算之外，还需将重点放在矩阵 C 的行向量与列向量的结构上，这点在理论上与计算上都是很重要的。下面矩阵 A 是 $m\times n$ 型，用 $A^{(j)}$表示 A 的第 j 列，而 $A_{(i)}$表示 A 的第 i 行。先从一个简单的结果开始。

1．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}\ x_1+\cdots+a_{1n}\ x_n \\ \vdots \\ a_{m1}\ x_1+\cdots+a_{mn}\ x_n \end{bmatrix}$$

$$=x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}=x_1A^{(1)}+x_2A^{(2)}+\cdots+x_nA^{(n)}。$$

上面的结果表明：矩阵乘一个列向量，其结果是将这个矩阵的列向量进行线性组合，以后当看到乘积 Ax 时，便将它看成由 A的的列向量线性组合而成的向量。组合系数是向量 x 的各个分量 $x_1,\cdots,x_n$。同样，如果将一个行向量左乘矩阵，便得出下面结果

$$(y_1\cdots y_m)\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn} \end{bmatrix}=y_1A_{(1)}+y_2A_{(2)}+\cdots+y_mA_{(m)}。$$

它表明是将 A 的各个行向量进行线性组合，而组合的系数是行向量 y 的各个分量 $y_1\cdots y_m$。

例1 (i) $3\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0\\6\\7\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}5\\-4\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23\\-31\\-26\end{bmatrix}$，

亦可写成

$$\begin{bmatrix}1&0&5\\-1&6&-4\\0&7&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23\\-31\\-26\end{bmatrix}。$$

(ii) $(-1\ \ 0\ \ 2)-7(\ 1\ \ 1\ \ 1)+6(1\ \ 2\ \ 3)=(-2\ \ 5\ \ 13)$，

亦可写成

$$(1\ \ -7\ \ 6)\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}=(-2\ \ 5\ \ 13)。$$

2. $AB=C$ 中乘积 C 的行向量与列向量的结构。由矩阵的乘法可得：

$$C^{(j)}=AB^{(j)} \text{ 与 } C_{(i)}=A_{(i)}B。$$

换句话说，矩阵 C 的第 j 个列向量是由A的列向量线性组合而成，组合系数由 B 的第 j 个列向量的各个分量给出。C 的第 i 个行向量是由 B 的行向量线性组合而成，组合系数由 A 的第 i 个行向量的各个分量给出。特别，如果用 $e^{(j)}$ 表示第 j 个标准单位列向量，$e_{(i)}$表示第 i 个标准单位行向量，则 $Ae^{(j)}=A^{(j)}$，$e_{(i)}A=A_{(i)}$。知道了矩阵乘积的行向量与列向量的构成以后，有些矩阵的乘积就很容易得出。

例 2 (i) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{13} & ka_{12} & a_{11} \\ a_{23} & ka_{22} & a_{21} \\ a_{33} & ka_{32} & a_{31} \end{bmatrix}。$$

(ii) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & -c \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{12} & ba_{12}+a_{13} & -ca_{13} \\ a_{22} & ba_{22}+a_{23} & -ca_{23} \\ a_{32} & ba_{32}+a_{33} & -ca_{33} \end{bmatrix}。$$

上面两个结果均可由乘积的列向量构成得出。

3．下面举例说明上面方法的一些应用。

例 3 上三角阵的乘积仍是上三角阵。

现有矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}。$$

$AB=C$,只要按 C 的列向量的构成即可得出结果。因为 $C^{(1)}$ 的第二,三个分量均为零,$C^{(2)}$ 第三个分量为零。

例 4 $AB=O$ 的意义。

由于 $AB^{(j)}=0$, 说明 B 的各个列向量，是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解向量。或者有 $A_{(i)}B=0$，即 A 的各个行向量是齐次方程组 $B^Ty=0$ 的解向量。

例 5 (i) $Ax=b$ 有解的充要条件。

由方程的等式可知,如果方程有解,表明向量 b 是矩阵 A 的各个列向量的线性组合。反之,如果 b 是矩阵 A 的各个列向量的线性组合,则可知方程一定有解。因此，方程有解的充要条件是：b 是 $A^{(1)}A^{(2)}\cdots A^{(n)}$ 的线性组合。

(ii) $Ax=0$ 有非零解与唯一解的充要条件。

由等式 $Ax=0$ 说明要将矩阵 A 的各个列向量线性组合为零

向量。因此，如果 A 的各个列向量是相关的，则一定有非零解。如果矩阵 A 的列向量是独立的，则它仅可有零解。显然这些都是充要条件。

例 6 矩阵 A 有左逆或右逆的条件。

该矩阵 A 是 $m\times n$ 型矩阵，如果存在一 $n\times m$ 型矩阵 B 有 $AB=I_m$（m 阶单位阵），则称 B 是 A 的右逆。现在来看一下 A 存在右逆的条件是什么？

$AB=I_m$ 说明 I_m 的各个列向量都是 A 的列向量的线性组合。由于 I_m 的秩为 m，因而矩阵 A 的秩至少是 m，但 A 的秩至多是 m。所以如果 A 有右逆，则矩阵 A 的秩（记为 $r(A)$ 或 r）为 m 或者说 A 是行满秩的。反之，如果 $r(A)=m$，说明 A 的独立的列向量有 m 个。所以 I_m 中任一个列向量都可通过 A 的列向量的线性组合来表示，即 $AB=I_m$。由此证明了下面的命题。

命题 1 矩阵 A 有右逆 $\Longleftrightarrow r(A)=m$。

类似可以证明，矩阵 A 有左逆的命题如下：

命题 2 矩阵 A 有左逆 $\Longleftrightarrow r(A)=n$。

上述关于矩阵乘积的行向量与列向量的结构的结论，还可举出很多应用。请读者在学习矩阵理论时留意。

第二节 矩阵的初等变换

1. 关于矩阵的初等变换的重要结论

矩阵的初等变换实际上是线性方程组消去法运算的一种抽象，它包括对一组向量施行下面三种运算。

(i) 交换二个向量。

(ii) 用一个非零的数乘一个向量。

(iii) 用一个数乘一个向量与另一个向量相加。

在矩阵理论中很重要的一点，是将矩阵施行初等变换与矩阵乘初等矩阵联系起来。关于这方面重要的结论有下面四个。

命题 3 矩阵左乘一个初等矩阵，相当于对矩阵施行行初等变换。

对矩阵右乘一个初等矩阵相当于对矩阵施行列初等变换。

命题 4 施行初等变换，不改变矩阵的秩。

定理 1 （初等变换的标准型）

任何一个秩为 r 的 $m\times n$ 型矩阵 A，总存在有非奇异矩阵 P、Q 使得

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & \\ & O \end{bmatrix}_{m\times n}\text{。} \tag{1-1}$$

命题 5 A 是非奇异矩阵$\Longleftrightarrow A$ 是初等矩阵的乘积。

2．初等矩阵

对单位矩阵施行一次行或列的初等变换后所得的矩阵称为初等矩阵，下面是初等矩阵的例子（以三阶矩阵为例）。

$$E_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad E_3(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix},E_{23}(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E_{12} 表示单位阵交换第一、二两行后所得的矩阵（交换第一、二两列得同样的矩阵）。$E_3(k)$ 表示用一不为零的常数 k 乘单位阵的第三行（列）所得的矩阵。$E_{23}(k)$ 表示用 k 乘单位阵的第三行加到第二行后所得的矩阵（亦为用 k 乘单位阵的第二列加到第三列）。如果 A 是一 3 阶方阵，这样由前面所讨论矩阵的乘法容易知道：

$E_{12}A,E_3(k)A,E_{23}(k)A$ 的结果恰为将原施于单位阵的行初等变换施于矩阵 A 上。同样，$AE_{12},AE_3(k)$，$AE_{23}(k)$，便是将原施于单位阵的列变换施于矩阵 A 上。

3．初等变换的标准型的应用

这一小节主要通过实例说明初等变换的标准型的应用。另一方面这些实例在矩阵理论里也是一些重要的结果。

例 7 矩阵的满秩分解定理。

设 A 是 $m\times n$ 型矩阵，$r(A)=r$，则一定存在一个 $m\times r$ 型矩阵 L，与一个 $r\times n$ 型矩阵 R，有 $r(L)=r(R)=r$，$A=LR$。

证 由初等变换的标准型可以知道：

$$\underset{m\times n}{A}=\underset{m\times m}{P}\begin{bmatrix} I_r & \\ & O \end{bmatrix}_{m\times n}\underset{n\times n}{Q}=\underset{m\times m}{P}\underset{m\times r}{\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}}\underset{r\times n}{[I_r O]}\underset{n\times n}{Q}=LR。$$

由证明的过程立即可以知道 L 是由 P 的前 r 列构成，而 R 是由 Q 的前 r 行构成。

例 8 矩阵满秩分解的数值例。

现有矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 14 \\ 4 & 9 & 3 & 24 \end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

则

$$PAQ=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

所以

$$A=P^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\4&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1&5\\0&1&-1&4\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1&5\\0&1&-1&4\end{bmatrix}。$$

一般而言，一个矩阵的满秩分解，并不是唯一的。如矩阵A还可写成：

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1&5\\2&5&1&14\end{bmatrix}。$$

例 9 (Sylvester) 设A是$m\times n$型矩阵，而B是$n\times m$型矩阵($m\geqslant n$)。用f_{AB}与f_{BA}分别记AB与BA的特征多项式，则有$f_{AB}=\lambda^{m-n}f_{BA}$。换句话说，矩阵$AB$与$BA$的非零特征值是一样的，而所差仅是零特征值的重数。

证 设$r_A=r$，因而有$PAQ=\begin{bmatrix}I_r&\\&O\end{bmatrix}_{m\times n}$。

$$PABP^{-1}=PAQQ^{-1}BP^{-1}=\begin{bmatrix}I_r&\\&O\end{bmatrix}_{m\times n}C,$$

这里$C=Q^{-1}BP^{-1}$。

同理可知

$$Q^{-1}BAQ=Q^{-1}BP^{-1}PAQ=C\begin{bmatrix}I_r&\\&O\end{bmatrix}_{n\times m}。$$

因此只要证明矩阵$\begin{bmatrix}I_r&\\&O\end{bmatrix}C$与矩阵$C\begin{bmatrix}I_r&\\&O\end{bmatrix}$的特征多项式满足定理的等式即可。

$$f_{AB}=|\lambda I_m-AB|=\left|\lambda I-\begin{bmatrix} I_r & \\ & O\end{bmatrix}C\right|$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-C_{11} & \cdots & C_{1r} & \cdots & C_{1n} & & \\ \vdots & & & & & & \\ -C_{r1} & \cdots & \lambda-C_{rr} & \cdots & C_{rn} & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^{m-r}|\lambda I_r-C_r|。$$

这里 C_r 表示矩阵 C 的首 r 行 r 列构成的子阵。同样的方法，可计算得

$$f_{BA}=|\lambda I_n-BA|=\lambda^{n-r}|\lambda I_r-C_r|。$$

比较两个等式，可知定理成立。

这个例子所讲的结果，亦称为特征多项式的降阶计算公式。它对于计算秩小的矩阵是很方便的。

例 10 设 A 是 n 阶方阵，$r(A)=1$。试求它的特征多项式。

解 由于 A 的秩为 1，因而可设 A 有满秩分解如下：

$$A=xy^T=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}[y_1 \quad y_2\cdots y_n]。$$

又由例 9 的结论可知：

$$\left|\lambda I_n-A\right|=\left|\lambda I_n-\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}[y_1 \ y_2\cdots y_n]\right|$$

$$=\lambda^{n-1}\left|\lambda-[y_1 \ y_2\cdots y_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n\end{bmatrix}\right|$$

$$=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum x_i y_i)。$$

下面讨论标准型在估计矩阵秩方面的应用。现先将一些有关矩阵的秩的一些结论罗列如下。

命题6 A是$m\times n$型矩阵，且$AB=O$，则$r(B)\leqslant n-r(A)$。

命题7 A是$m\times n$型矩阵，任取s行构成子阵B，则$r(B)\geqslant r(A)+s-m$。

命题8 $r(AB)\leqslant\min\{r(A)\ r(B)\}$。

命题9 设A是$m\times n$型矩阵，B是$n\times s$型矩阵，则$r(AB)\geqslant r(A)+r(B)-n$。

上面关于矩阵的秩的命题，可借助于定理1来证明，这里仅举二个命题的证明为例。

例11 A是$m\times n$型矩阵，任取s行构成子阵B，则$r(B)\geqslant r(A)+s-m$。

证 因$A=P\begin{bmatrix} I_r & \\ & O \end{bmatrix}Q$，而$B$是$A$的子阵，所以在求$A$的标准型的同时对$B$亦施行初等变换，还可得出$B$的标准型。所以$B$的标准型中的零行的数目，不会超过$A$的标准型中零行的数目，即$s-r(B)\leqslant m-r(A)$。

例12 A是$m\times n$型矩阵且$AB=O$，则$r(B)\leqslant n-r(A)$。

证 设$r(A)=r$，由标准型可知：

$$A=P\begin{bmatrix} I_r & \\ & O \end{bmatrix}Q。$$

又由$AB=O$，可得

$$P\begin{bmatrix} I_r & \\ & O \end{bmatrix}QB=O。$$

由此可知矩阵QB的前r行一定都为零行，所以QB的非零行至多是$n-r$行，即$r(QB)\leqslant n-r$，而$r(QB)=r(B)$，故有$r(B)\leqslant n-r(A)$。

其余两个命题的证明希望读者自己完成。

4. Hermite 标准型

(1) Hermite 标准型的定义

前面所讲的标准型是对矩阵施行行与列的初等变换后所获得的。这里所讨论矩阵的另一种标准型，它是对矩阵仅施行行初等变换，(这变换相当于利用矩阵格式解线性方程组)。这种标准型同样在计算上有很广泛的用途。现在先给出定义如下。

定义 一个 $m\times n$ 型矩阵。如果满足下面的条件便称它为 Hermite 梯形阵。

(i) 它的首 r 行是非零行，且每一个非零行的第一个非零元是1。

(ii) 设第 i 行的第一个非零元出现在 k_i 列上，则应有 $k_1<k_2<\cdots<k_r$。

(iii) 在第 k_i 列上除第 i 行外，其余的元均为零。

下面便是 Hermite 梯形阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

任何一个 $m\times n$ 矩阵 A，都可通过施行行变换的方法，变为 Hermite 梯形阵。

例 13 将下面矩阵 A 变为 Hermite 梯形阵，并将初等变换矩阵记录下来。

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 6}。$$

解 为了要记录变换矩阵，要采用如下的格式。即在 A 的右边放一个3阶单位阵 $[A|E]$，对整个矩阵施行行变换。只要将 A 变成 Hermite 梯形阵时，在 E 块便会将变换矩阵记录下来。其理由如下：对分块矩阵 $[A|E]$ 施行行初等变换相当于左乘一