

函数论习题集

HANSHULUNXITIJ

〔日〕远木幸成著 蒋增荣译

湖南科学技术出版社

函数论习题集

〔日〕远木幸成著 蒋增荣译

汪 浩 刘 德 铭 校

湖南科学技术出版社

函数论习题集

〔日〕远木幸成著

蒋增荣译

汪浩、刘德铭校

责任编辑：胡海清

装帧设计：曾东凡

*

湖南科学技术出版社出版

湖南省新华书店发行

湘潭地区印刷厂印刷

*

1979年9月第1版第1次印刷

字数：227,000 印数：1—20,000册 印张：11.125

统一书号：13204·9 定价：1.04元

译者的话

函数论的著作很多，但习题书却很少，而且有的习题书所选的题目过难，不便应用。远木幸成理学博士所著的这本习题集，正如著者所称，尽量避免过难的题目，多选取较为平易的问题。书中还特别选入了很多重要的思考性的问题，以有助于提高解题练习的效果。虽然如此，但初学者仍需花费很多脑汁，才能获得充分的理解。

本书章、节的排列与日本共立出版公司出版的基础数学讲座《函数论》（远木幸成著）完全相同。各章中的提要列出了本章问题中所需的定义、定理。每章系统地配有例题，以供解题参考。习题的解答也相当详细。如果充分理解了提要内容及例题，独立完成各章习题不会有很大困难。本书著者在不大篇幅里介绍了函数论的基本内容，对材料的安排及问题的配备作了不少努力，应当说是一本较好的习题书。

在翻译过程中，遇到的名词尽量采用已有而习见的，也有少数名词是译者拟译的。原书喜用“在集 E ”或“在区域 D ”等字样，为照顾汉语习惯，译作“在集 E 上”或“在集 E 中”而不是译作“在集 E ”。这时不再含有这样的意义，即：“在集 E 上”暗指 E 是闭集，“在集 E 中”暗指 E 是开集。 E 到底是开集还是闭集，前后文自有交待。

一
十
七
九
年
十
一
月

历来共立数学讲座组稿出版较急,校对工作不免有些欠缺,给翻译工作带来一些不便。在翻译及校对中凡是发现印刷及遗漏的地方均已指正,较为重要的加了“译者注”,明显的错误虽已改正,但没有一一指明。

本书根据日本共立出版公司《数学演习讲座“函数论”》1957年第一版翻译。在翻译中,得到方舵副教授不少帮助,特此致谢。

限于译者水平,谬误之处一定很多,望读者批评指正。

译者

一九七九年四月

6

目 录

第一章 复 数

提 要	1
1.1 实数的性质	1
1.2 复数	2
1.3 点集合	4
例 题	8
练习题一	20
练习题一的解答	24

第二章 复变函数

提 要	37
2.1 复变函数和正则性	37
2.2 初等函数	40
2.3 初等多值函数	41
例 题	41
练习题二	52
练习题二的解答	56

第三章 复变积分

提 要	77
3.1 复变积分和基本性质	77
3.2 正则函数	79
3.3 有理型函数	81
例 题	86
练习题三	97
练习题三的解答	105

第四章 无限函数列

提 要	135
4.1 函数列和级数	135
4.2 幂级数	137
4.3 正规族	141
例 题	143
练习题四	167
练习题四的解答	176

第五章 保角映射

提 要	205
5.1 一次变换	205
5.2 保角映射的基本定理	206
5.3 保角映射和镜象原理	208

例 题	210
练习题五	230
练习题五的解答	234

第六章 Dirichlet 问题

提 要	251
6.1 调和函数	251
6.2 Dirichlet问题	255
6.3 复连通区域的保角映射	258
例 题	260
练习题六	288
练习题六的解答	294

第七章 解析延拓

提 要	312
7.1 解析延拓	312
7.2 代数函数	316
例 题	317
练习题七	326
练习题七的解答	326

第八章 函数特论

提 要	330
8.1 单叶函数	330

8.2 Picard定理	331
8.3 拟保角映射	332
例 题	334
练习题八	337
练习题八的解答	339
参考书籍	347

第一章 复数

提 要

1.1 实数的性质

定义 实数的集合 S 有界时, S 的最小上界称为 S 的**上限**, S 的最大下界称为**下限**,各以 $\sup S$, $\inf S$ 表示^①.

定理1 实数的集合 S 如果有上界,则其上限存在,如果 S 有下界,则下限存在.

定理2 a 是 S 的上限的必要充分条件是:

(1) 对于属于 S 的一切数 x ,有 $x \leq a$;

(2) 设 ε 为任意正数, S 中必有这样的数 x 存在,使 $a - \varepsilon < x$.
同样, b 是 S 的下限的必要充分条件是:

(1)' 对于属于 S 的一切数 y ,有 $y \geq b$;

(2)' 设 ε 为任意正数, S 中必有这样的数 y 存在,使
 $y < b + \varepsilon$.

定理3 单调递增(或递减)数列如果有上界(下界),则这个数列收敛.

定理4 关于区间 $I_n: a_n \leq x \leq b_n$ ($n=1,2,3,\dots$),如果

① “上限”和“下限”亦可分别称作“上确界”和“下确界”。——译者注

$$I_n \supset I_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \textcircled{1}$$

则仅仅存在一点为各区间所共有。

定理5 (Cauchy收敛定理)

数列 $\{a_n\}$ 收敛的必要充分条件是, 对于任意的正数 ε , 可确定号码 N , 当 $p > N, q > N$ 时, 有 $|a_p - a_q| < \varepsilon$ 成立。

定义 数列 $\{a_n\}$ 有界时, 从号码 n 开始的数列

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \cdots$$

的上限和下限各设为 l_n, m_n , 则称

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n, \quad \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$$

为 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限, 各以

$$\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \mu = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

表示。当 $\{a_n\}$ 没有上界时, 定义 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\{a_n\}$ 没有下界时, 定义 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ 。

1.2 复数

定义 设 a, b 为实数, i 为虚数单位, 复数 α 表示为 $\alpha = a + bi$. 称 a 为 α 的实部, b 为 α 的虚部, 各以 $\Re(\alpha), \Im(\alpha)$ 表示。又称 $a - bi$ 为 α 的共轭复数, 以 $\bar{\alpha}$ 表示。

定义 对于复数 $\alpha = a + bi$, 称 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 为 α 的绝对值, 以 $|\alpha|$ 表示。又称满足

$$\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

① 原文误为“ $I_n \supset I_{n-1}$ ”。——译者注

的角 θ 为 a 的幅角, 以 $\arg a$ 表示.

定理6 设 $a = a + bi$, $a' = a' + b'i$, 则

$$|a| = | -a|, \quad |a| = |\bar{a}|, \quad a \bar{a} = |a|^2 = |\bar{a}|^2;$$

$$|a \cdot a'| = |a| \cdot |a'|, \quad \left| \frac{a}{a'} \right| = \frac{|a|}{|a'|};$$

$$|a| \leq |a|, \quad |b| \leq |a|, \quad |a| \leq |a| + |b|;$$

$$\arg(a \cdot a') = \arg a + \arg a',$$

$$\arg \left(\frac{a}{a'} \right) = \arg a - \arg a'.$$

定理7 设 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 为异于零的复数, 则有

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$

仅当 $\arg z_1 = \arg z_2 = \dots = \arg z_n$ 时, 等号成立.

定义 对于 $z = a + bi$, 设 $|z| = r$, $\arg z = \theta$, 称

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

为复数的极形式.

定理8 (Cauchy收敛条件) 复数数列 $\{a_n\}$ 收敛的必要充分条件是对任意正数 ε , 总存在号码 N , 对于 $n \geq N$, $p > 0$ 的一切自然数 n, p , 成立

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

系 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要充分条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同时收敛.

定理9 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要充分条件是对任意正数 ε , 总存在号码 N , 对于 $n \geq N$, $p > 0$ 的一切自然数 n, p , 成立

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

定义 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛时, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

定理10 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的必要充分条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

同时绝对收敛.

1.3 点 集 合

定义 对于点 a 和正数 ρ , 称满足 $|z-a| < \rho$ 的点 z 的全体为 a 的 ρ -近傍. 特别, 没有指定 ρ 时, 只称为 a 的近傍. 如果在一定点 a 的任意近傍中都包含有集合 E 的无限多个点, 则称 a 为 E 的凝聚点. 特别 E 为点列时, a 称为极限点. 还有, 以 $a \in E$ 表示 a 属于集合 E .

定义 点集合 E 的凝聚点均属于 E 时, 称 E 为闭集合. 全复数平面除去集合 E 的剩余部分称为 E 的补集合. 集合 E 的补集合是闭集合时, 称 E 为开集合.

定义 点 a 的某个近傍全是集合 E 的点时, 称 a 为 E 的内点, 点 a 是 E 的补集合的内点时, 称 a 为 E 的外点. a 的任意近傍内, 既有内点又有外点时, 称 a 为 E 的境界点, E 的境界点的全体称为 E 的境界.

定义 给出有限个或者无限个点集合时, 由各个集合的全部点所成的集合称为它们的和集, 由它们的一切公共点的全体所成的集合称为它们的通集. 集合 E_1, E_2 的和集以 $E_1 + E_2$ 或者 $E_1 \cup E_2$ 表示, 通集以 $E_1 \cdot E_2$ 或者 $E_1 \cap E_2$ 表示.

定理11 开集合的和集以及闭集合的通集, 不论其个数如何, 仍是开集合和闭集合.

定理12 有限个开集的通集以及有限个闭集的和集，仍为开集和闭集。

注意 无限个开集的通集以及无限个闭集的和集，不一定仍是开集和闭集。

定理13 (Heine-Borel 定理) 设对于有界闭集合的每一点各给以一个近傍，则从这些近傍中可选出有限个，使得 E 的一切点均包含在这些近傍中。

定理14 (Bolzano-Weierstrass 定理) 有界的无限点集合必有凝聚点。

系 有界的无限数列必含有收敛的子数列。

定义 一个集合的全部元素可与自然数 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ 一一对应时，则称这个集合为可数无限集合。有限集合和可数无限集合总称为可数集合。

定义 点集合 E 的点 α 不是 E 的凝聚点时，称 α 为 E 的孤立点。 E 的所有点均为孤立点时，称 E 为孤立点集合。

定理15 孤立点集合是可数集合。

定义 一个至少含有两个点的闭集合，如果不能分作两个不具有公共点的非空的闭集，则称这个闭集合为连续体。如果一个开集不能分作两个不具有公共点的非空开集，则称这个开集为区域。

定理16 开集 D 是区域的必要充分条件是可用一条曲线 (这曲线完全由 D 的点所构成) 联结 D 的任意两点。

定义 设点集合 E 和 E 外的一点 α ，称

$$d(\alpha, E) = \inf_{z \in E} |z - \alpha|$$

为 a 和 E 的距离。又设 E 和 E^* 为两个点集合，称

$$d(E, E^*) = \inf_{z \in E, z^* \in E^*} |z - z^*|$$

为 E 和 E^* 的距离。

定理17 设 E 和 E^* 是没有公共点的闭集合，并且 E 和 E^* 之中至少有一个有界，则

$$d(E, E^*) > 0.$$

定义 由定义于有界区间 $a \leq t \leq b$ 的函数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 所描绘的曲线，如果 $x(t)$ ， $y(t)$ 都是连续函数，则称这曲线是连续曲线。当 $z(a) = z(b)$ 时，称为闭曲线，当 $z(a) \neq z(b)$ 时，称为开曲线。又如果当 $t_1 \neq t_2$ 时，有 $z(t_1) \neq z(t_2)$ ，则称这个曲线为Jordan开曲线。对于Jordan开曲线，如果 $x'(t)$ ， $y'(t)$ 都连续，且 $x'(t) = 0$ 和 $y'(t) = 0$ 不同时发生，则这个曲线称为正则弧，由有限个正则弧相联结所得到的曲线称为正则曲线。除去 $z(a) = z(b)$ 之外，如果 $t_1 \neq t_2$ ，有 $z(t_1) \neq z(t_2)$ ，则这曲线称为Jordan闭曲线。

定理18 Jordan闭曲线将平面分成两部分。一部分是有界区域，另一部分是无界区域。

定义 由Jordan闭曲线所分成的区域中，有界的部分称为此闭曲线的内部，另一部分则称为其外部。

定义 设 Σ 是半径为1的球面①，它与复数平面相切于原点 S 。N为过 S 点的 Σ 的直径的另一端，设复数平面上的点 z 和N相连接的直线交 Σ 于 P 。由这个方法，除N外，复数平面与 Σ

① 根据下文，特别是由例题(13)，这里似应改为“设 Σ 是直径为1的球面”。

的全体点成一一对应，称此为**球极投影**。在复数平面上补充一点与 Σ 上的点 N 相对应，这点名叫无限远点，以记号 ∞ 表之。以记号 $|z| \leq \infty$ 表示补充了 ∞ 点的所谓全平面。因而以记号 $|z| < \infty$ 表示不含 ∞ 的全有限平面。

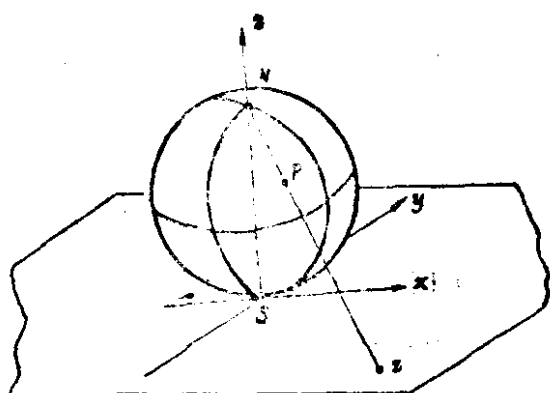


图 1.1

称 Σ 为复数球面或者 **Riemann 球面**。

定理19 由球极投影，与复数平面上的点 $z = x + iy$ 相对应的 Riemann 球面上的点 P 的坐标 (ξ, η, ζ) 之间成立如下关系式：

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{2} \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}} \\ \eta &= \frac{y}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{2i} \frac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}} \\ \zeta &= \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} = \frac{\bar{z}z}{1 + z\bar{z}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\xi}{1-\zeta} \\ y &= \frac{\eta}{1-\zeta} \\ x^2+y^2 &= \frac{\zeta}{1-\zeta} \\ \xi^2+\eta^2 &= \zeta - \zeta^2 \end{aligned} \right\}$$

定理20 (Bolzano-Weierstrass定理的推广)

全复数平面上的任意无限集合必存在凝聚点。

例 题

[1] 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 各为数列, 证明如下不等式:

$$(1) \sup\{x_n\} \geq \inf\{x_n\};$$

$$(2) \inf\{x_n\} + \inf\{y_n\} \leq \inf\{x_n + y_n\} \leq \inf\{x_n\} + \sup\{y_n\};$$

$$(3) \inf\{x_n\} + \sup\{y_n\} \leq \sup\{x_n + y_n\} \leq \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}.$$

解 (1) 对于任意的号码 n , 由于

$$\sup\{x_n\} \geq x_n, \quad x_n \geq \inf\{x_n\},$$

故 $\sup\{x_n\} \geq x_n \geq \inf\{x_n\}.$

(2) 对于任意的 n , 由于有 $x_n \geq \inf\{x_n\}$, $y_n \geq \inf\{y_n\}$,

因此 $x_n + y_n \geq \inf\{x_n\} + \inf\{y_n\}.$

从而得到

$$\inf\{x_n + y_n\} \geq \inf\{x_n\} + \inf\{y_n\}.$$

又由于 $x_n + y_n \geq \inf\{x_n + y_n\}$, $y_n \leq \sup\{y_n\}$, 所以有

$x_n + \sup\{y_n\} \geq \inf\{x_n + y_n\}$, 亦即有

$$x_n \geq \inf\{x_n + y_n\} - \sup\{y_n\}.$$

因此

$$\inf\{x_n\} \geq \inf\{x_n + y_n\} - \sup\{y_n\}.$$

(3) 由于 $x_n \geq \inf\{x_n\}$, $x_n + y_n \leq \sup\{x_n + y_n\}$,

所以有 $y_n \leq \sup\{x_n + y_n\} - x_n \leq \sup\{x_n + y_n\} - \inf\{x_n\}.$

因此

$$\sup\{y_n\} \leq \sup\{x_n + y_n\} - \inf\{x_n\}.$$

另外, 由于 $\sup\{x_n\} \geq x_n$, $\sup\{y_n\} \geq y_n$, 所以 $\sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}$