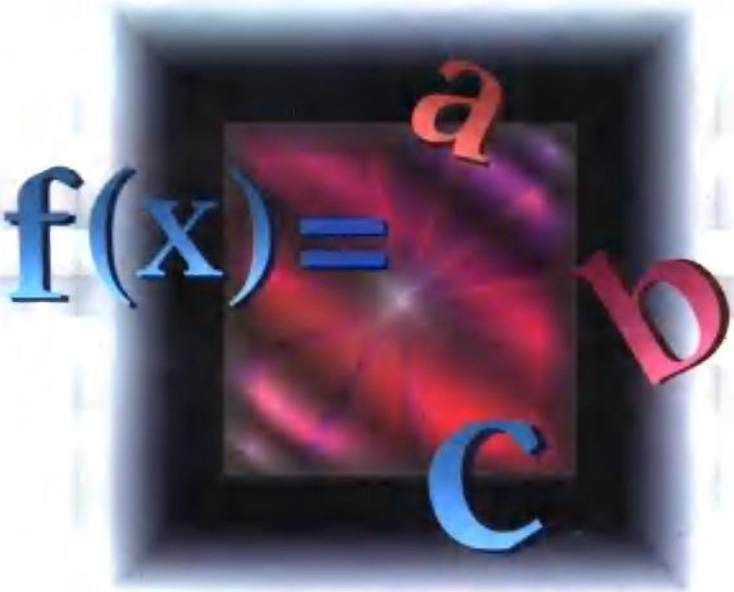
离散数学
及其在计算机中的应用

(第二次修订)

徐洁磐　惠永涛　宋方敏　编著



人民邮电出版社

离散数学
及其在计算机中的应用

（第二次修订）

徐洁磐　惠永涛　宋方敏　编著

人 民 邮 电 出 版 社

内 容 提 要

离散数学和计算机科学关系密切。本书系统地介绍了离散数学的基础理论，阐述了各个分支之间的联系，还说明了它在计算机中的应用。主要内容包括：集合论、关系、映射和无限集、近世代数、图论、命题逻辑、谓词逻辑、命题逻辑和谓词逻辑的公理化理论、离散数学在计算机中的应用。章末附有习题。

本书适合作为计算机专业的学生和自学考试者的教材，也可供从事计算机和数学方面研究的科技工作者和教师学习参考。

离散数学及其在计算机中的应用(第二次修订)

◆ 编　　著　徐洁磐　惠永涛　宋方敏

责任编辑　梁　凝

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京崇文区夕照寺街14号

北京朝阳区隆昌印刷厂印刷

新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：850×1168　1/32

印张：10.5

字数：275千字　　1997年2月第1版

印数：1—3.000册　　1997年2月北京第1次印刷

ISBN7-115-06404-0/TP.407

定价：17.00元

第三版序言

《离散数学及其在计算机中的应用》一书自1985年出版以来，经1988年再版至今已是第三版了。该书自出版至今已有十余个年头，在这十几年中共发行近万册，使用者多为大学本科及专科的师生。由于本书取材适宜、内容精炼、讲解清楚，因此深受广大学生的欢迎，在本版中为了能更适应发展的需要，对本书作了一些修改与调整，主要有以下几方面：

（1）为能适应目前计算机专业“离散数学”课程教学大纲要求。对与大纲无关的内容作了大量的删改，同时增加了与大纲有关的内容。

（2）增加与加强了离散数学在计算机中应用的内容，并更新了部分过时的细节。

（3）对本书中的少量证明与定义作了修改，使之更为科学合理。

（4）对书中一些错误作了改正。

总之，经过修改后的第三版将更能适应读者的要求，它既保留了过去两版的特点，又使得内容更为科学与精炼、表达更为合理。

本版的第一章到第五章由宋方敏副教授修改，第六章到第九章由徐洁磐教授修改。

本书适合于作为计算机等有关专业的教材，也可作为自学教材及参考资料，还可供从事计算机及相关专业的科技工作者学习、参考。

由于作者水平有限，书中错误及不妥之处难免，恳请读者不吝赐教。

作　者

1996年9月于南京

目　录

第一章 集合论

§1 集合和元素的概念

集合的理论在现代数学中起了十分重要的作用，许多数学工作者认为集合论的语言是各门数学的基础。对计算机科学工作者来说，集合的概念也是必不可少的。

首先我们对集合及其元素的概念作一初步说明。一般地说，一个**集合**是指所研究对象的全体，其中每个对象是该集合中的一个**元素**（也叫**成员**）。对任意一个集合 S 和一个元素 x，若 x 是 S 中的一个元素，记以 $x\in S$，读作"x 属于 S"，若 x 不是 S 中的一个元素，记作 $x\notin S$，读作"x 不属于 S"。显然，任意一个元素要么属于某一个集合，要么不属于某一个集合，二者必居其一。

本书中，除非特别声明，下面几个符号是常用来表示特定集合的。

$\boldsymbol{N}$：自然数集合{0, 1, 2, …}*

[illegible]集合

[illegible]理数集合

$\boldsymbol{R}$：实数集合

$\boldsymbol{N}_m(m\geqslant 1)$：集合[illegible]2, …, $m-1$}

[illegible]一个集合[illegible]三种方法：

[illegible]集合中的元素，如 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{1, 2,$

100[illegible]…}。

* 在本书中，自[illegible]合包括零。

第二,当一个集合 A 中的元素很多或者无穷时,则用元素特性刻划的方法来表示。如用 P 表示某种特性,$P(a)$表示元素 a 满足特性 P,则

$$A = \{a \mid P(a)\}$$

表示 A 是所有使 $P(a)$成立的元素 a 构成的集合。P 可以是某项规定或某个公式,例如:

$A=\{x \mid x\in \boldsymbol{I}$ 并且 $x<0\}$

$B=\{x \mid x=y^2$ 并且 y 是正整数$\}$

$C=\{x \mid x$ 是有效的 FORTRAN 标识符$\}$

$D=\{x \mid x$ 是开始为 c,结束为 t 的三个字母的字$\}$

$=\{\text{cat}, \text{cot}, \cdots, \text{cut}\}$

第三,可以通过计算规则定义集合中的元素,这种情况下的集合有的称为**递归指定**集合。

例 1-1 设 $a_0=1$, $a_1=1$, $a_{i+1}=a_i+a_{i-1}$, $i\geqslant 1$,于是 $S=\{a_k \mid k\geqslant 0\}=\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots\}$。

如果一个集合的元素是有限的,称它为**有限集**,反之是**无限集**。我们最常见的自然数集合是无限集,无限集将在第三章专门讨论。

设 A 是有限集,则 A 中**元素的数目**用 $n(A)$或$|A|$表示。关于集合中的元素及计算方法,后面要作专门研究。

§2 集合的子集

定义 1-1 设 A 和 B 是两个集合,如果 A 中的每个元素也是 B 中的一个元素,则称 A 是 B 的一个**子集** [illegible] $A\subseteq B$。A 是 B 的子集也叫 A 被 B 包含,或叫 B 包含 A。

如果 A 不是 B 的一个子集,即 A 中至少有 [illegible] 记作 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$。

定义 1-2 设 A 和 B 是两个集合,如果 [illegible] 素是 B 中的一个元素,同时 B 中的每个元素也是 A 中的 [illegible] 元素,则称 A 和

B **相等**，记作 $A=B$。

如果 A 中至少有一个元素不在 B 中或者 B 中至少有一个元素不在 A 中，则称 A 和 B **不等**，记作 $A \neq B$。

集合间的包含和相等是两个极其重要的概念，它们之间的关系可归结为下述定理。

定理 1-1 设 A 和 B 是两个集合，则 $A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。

证明： 假定 $A=B$，由相等的定义，A 中每个元素在 B 中，所以 $A\subseteq B$，同样 B 中每个元素在 A 中，所以 $B\subseteq A$；

反之，若 $A \neq B$，故 A 中至少有一个元素不在 B 中，这与 $A\subseteq B$ 矛盾，或者 B 中至少有一个元素不在 A 中，这与 $B\subseteq A$ 矛盾，所以 $A \neq B$ 是不可能的；

故 $A=B$。

定义 1-3 设 A 和 B 是两个集合，如果 $A\subseteq B$ 并且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**（或叫**真包含**），记以 $A\subset B$。

例 1-2 设集合 $A=\{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$，$B=\{1, 2, 3, 5, 7\}$，$C=\{1, 5\}$，则有 $A\supset C$，$B\supset C$。这是因为 C 中的每个元素都在 B 和 A 中，然而 $B\not\subset A$，因为 $2,7\in B$，但是 $2,7\notin A$。

例 1-3 设 $S_1=\{a\}$，$S_2=\{\{a\}\}$，则 $S_1 \neq S_2$。S_1 和 S_2 无公共元素，且每个集合仅有一个元素。再令 $S_3=\{a, \{a\}\}$，则 S_3 有两个元素。这三个集合的关系是：$S_1 \neq S_3$，$S_2 \neq S_3$，然而 $S_1\subset S_3$，$S_2\subset S_3$。

§3 全集和空集

在这一节，我们将介绍两个特殊的集合——全集和空集。

定义 1-4 如果一个集合包含了我们所考虑的每一个集合，则称该集合为全集。除非特别声明，本书用 U 表示全集。

例 1-4 设有一个方程

$$(x+1)(2x-3)(3x+4)(x^2-2)(x^2+1)=0$$

对于这个方程，如果U是全体复数的集合，则其解集（即该方程根的集合）是

$$S=\{-1,\ 3/2,\ -4/3,\ \sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ \mathrm{i},\ -\mathrm{i}\}$$

如果U是全体实数集合，则其解集是

$$A=\{-1,\ 3/2,\ -4/3,\ \sqrt{2},\ -\sqrt{2}\}$$

自然，当U是全体整数集合或自然数集合时，读者不难求出其相应的解集。

相反，如果仅仅给出某些集合，譬如说$A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$，那么我们难以知道其全集是什么，因为U可以是$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7\}$，$\{x\mid x\in \boldsymbol{N}$ 且 $x<100\}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{I}$，…。不过今后在集合的应用中，我们总认为它包含在固定大的集合之中，一般不再声明其全集是哪一个。因为读者完全可从研究的具体问题而知道其全集，例如，在平面几何中，全集是平面上的所有的点。

与全集相反的概念是空集。

定义 1-5 没有元素的集合称为空集，记以ϕ。

定理 1-2 设A是任意一个集合，则有$\phi\subseteq A$。

证明： 用反证法。若$\phi\nsubseteq A$，由定义，ϕ中至少有一个元素不属于A，这与空集ϕ的定义发生矛盾，故有$\phi\subseteq A$。

对任意一个集合A，总有$\phi\subseteq A\subseteq U$。

定理 1-3 空集ϕ是唯一的。

证明： 用反证法。设ϕ_1和ϕ_2是两个空集，则由于ϕ_1是空集，根据定理 1-2 有$\phi_1\subseteq\phi_2$；由于ϕ_2是空集，根据定理 1-2 有$\phi_2\subseteq\phi_1$；因此$\phi_1=\phi_2$。

注意，ϕ和$\{\phi\}$是不同的，前者是没有元素的一个集合；后者是以空集ϕ作为其元素的一个集合。如果$S=\{\phi\}$，则$\phi\subset S$而且$\phi\in S$；如果$S=\{\{\phi\}\}$，则$\phi\subset S$但是$\phi\notin S$。

§4 集合的运算、文氏图

定义 1-6 设 A 和 B 是两个集合，则

(1) A 和 B 的**并**记为 $A\cup B$，是由 A 和 B 中的所有元素构成的集合，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

(2) A 和 B 的**交**，记为 $A\cap B$，是由 A 和 B 中的所有公共元素构成的集合，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 并且 } x \in B\}$$

特殊情况：如果 A 和 B 无公共元素，此时 $A\cap B=\phi$，称 A 和 B 是**分离**的。

(3) A 和 B 的**差**，记为 $A-B$，是由属于 A 而不属于 B 的元素构成的集合，即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 并且 } x \notin B\}$$

定义 1-7 一个集合 A 的补，记为 $\overline{A}$，是由属于全集 U 但不属于 A 的所有元素构成的集合，即

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ 并且 } x \notin A\}$$

所以 $\overline{A}$ 是全集 U 和 A 的差集。

对任意两个集合 A 和 B，有 $A-B=A\cap\overline{B}$。

例 1-5 设 $A=\{1, 2, 3, 5\}$，$B=\{1, 2, 4, 6\}$，$U=N$(N 为自然数集)，求 A 和 B 的并集、交集、差集和 $\overline{A}$、$\overline{B}$。

解： $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A\cap B=\{1, 2\}$

$A-B=\{3, 5\}$

$B-A=\{4, 6\}$

$\overline{A}=\{0, 4, 6, 7, \cdots\}$

$\overline{B}=\{0, 3, 5, 7, 8, \cdots\}$

集合的运算满足一些基本定律，为便于比较，列表如下：

等 幂 律	
$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
结 合 律	
$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
交 换 律	
$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
分 配 律	
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
恒 等 律	
$A\cup\phi=A$	$A\cap U=A$
$A\cup U=U$	$A\cap\phi=\phi$
吸 收 律	
$A\cup(A\cap B)=A$	$A\cap(A\cup B)=A$
双 重 补	
$\overline{\overline{A}}=A$	
取 补 律	
$A\cup\overline{A}=U$	$A\cap\overline{A}=\phi$
$\overline{U}=\phi$	$\overline{\phi}=U$
德·摩根定律	
$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$

如果在一个表达式中同时具有取补、交和并的运算，其运算的优先次序是先作取补运算，再作交的运算，最后作并的运算，若表达式中有括号，则先作内层括号中的运算。利用补、交及并的优先次序，可减少表达式中括号的层数。

下面我们利用前述的一些定义及基本定律来证明一些常用的关系式，通过这些证明，读者将会掌握基本的解题方法。

例 1-6

(1) 如果 $A\subseteq B$, $C\subseteq D$,则有

$$(A\cup C)\subseteq(B\cup D),\ (A\cap C)\subseteq(B\cap D)。$$

证明： 任取 $x\in(A\cup C)$,于是 $x\in A$ 或 $x\in C$,由于 $A\subseteq B$, $C\subseteq$

D,故 $x\in B$ 或 $x\in D$,从而有 $x\in(B\cup D)$,所以$(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$。

同理可证 $(A\cap C)\subseteq(B\cap D)$。

(2) 求证 $(A\cap B)\subseteq A\subseteq(A\cup B)$

$(A\cap B)\subseteq B\subseteq(A\cup B)$。

证明: 任取 $x\in(A\cap B)$,则 $x\in A$ 成立,因此$(A\cap B)\subseteq A$;另一方面,任取 $x\in A$,则 $x\in(A\cup B)$肯定成立,因此 $A\subseteq(A\cup B)$,故有

$$(A\cap B)\subseteq A\subseteq(A\cup B)$$

同理可证$(A\cap B)\subseteq B\subseteq(A\cup B)$。

(3) 如果 $A\subseteq B$,则有$(A\cap B)=A$, $(A\cup B)=B$。

证明: 假定 $A\subseteq B$,任取 $x\in A$,于是 $x\in B$,因此 $x\in(A\cap B)$,得到 $A\subseteq(A\cap B)$;另一方面,$(A\cap B)\subseteq A$。所以$(A\cap B)=A$。

任取 $x\in(A\cup B)$,于是 $x\in A$ 或 $x\in B$,如果 $x\in A$,由于 $A\subseteq B$,则有 $x\in B$,所以$(A\cup B)\subseteq B$;另一方面$(A\cup B)\supseteq B$,故$(A\cup B)=B$。

(4) 求证$(A-B)\subseteq A$。

证明: $A-B=A\cap\overline{B}\subseteq A$(由(2))

例 1-7 求证 $A-(A-B)=A\cap B$

证明: $A-(A-B)=A-(A\cap\overline{B})=A\cap\overline{(A\cap\overline{B})}$

$=A\cap(\overline{A}\cup\overline{\overline{B}})=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)=\phi\cup(A\cap B)$

$=A\cap B$

例 1-8 求证$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$当且仅当 $C\subseteq A$。

证明: 设$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$,由于 $C\subseteq(A\cap B)\cup C$,$A\cap(B\cup C)\subseteq A$,故 $C\subseteq A$;

反之,如果 $C\subseteq A$,则 $A\cup C=A$,故$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)=A\cap(B\cup C)$。

例 1-9 求证 $A-(B-C)=(A-B)-C$ 当且仅当 $A\cap C=\phi$。

证明: 先设 $A-(B-C)=(A-B)-C$,于是

$$A-(B-C)=A-(B\cap\overline{C})=A\cap\overline{(B\cap\overline{C})}$$

$$=A\cap(\overline{B}\cup C)=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap C)$$

$$=A\cap\overline{B}\cap(C\cup\overline{C})\cup A\cap(B\cup\overline{B})\cap C$$
$$=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$$
$$=(A-B)-C=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\quad\text{(右端)}$$
由于 $A\cap B\cap C$、$A\cap\overline{B}\cap C$、$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ 是两两分离的(为什么?),故 $(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)=\phi$,但是 $(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)=A\cap C$,所以 $A\cap C=\phi$。

充分性的证明从略。

两个集合 A 和 B 之差是不满足结合律和交换律的,我们引进另外一种运算称为对称差。

定义 1-8 集合 A 和 B 的**对称差**,记以 $A\oplus B$,是:
$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$$
即
$$A\oplus B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\notin B\text{ 或 }x\in B\text{ 且 }x\notin A\}$$
对称差的元素属于 A 或 B,但不能同时属于 A 和 B。

定理 1-4

(1) $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$

(2) $A\oplus B=B\oplus A$

(3) $A\oplus\phi=A$

(4) $A\oplus A=\phi$

(5) $A\oplus U=\overline{A}$(其中 U 是全集)

(6) $A\oplus\overline{A}=U$

(7) $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$

(8) $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

证明: 对(8)我们可以证明如下:
$$(A\cap B)\oplus(A\cap C)$$
$$=((A\cap B)-(A\cap C))\cup((A\cap C)-(A\cap B))$$
$$=(A\cap B)\cap\overline{(A\cap C)}\cup\overline{(A\cap B)}\cap(A\cap C)$$
$$=A\cap B\cap\overline{A}\cup A\cap B\cap\overline{C}\cup\overline{A}\cap A\cap C\cup A\cap\overline{B}\cap C$$
$$=(A\cap\overline{A})\cap B\cup A\cap B\cap\overline{C}\cup A\cap\overline{B}\cap C$$

$$=\phi\cap B\cup A\cap B\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{B}\cap C$$

$$=A\cap B\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{B}\cap C$$

$$=A\cap(B\cap\bar{C}\cup\bar{B}\cap C)$$

$$=A\cap((B-C)\cup(C-B))$$

$$=A\cap(B\oplus C)$$

下面为叙述简单，有时用记号“甲⇒乙”表示由甲能推出乙。

例 1-10 假定 $A\oplus B=A\oplus C$，则有 $B=C$。

证明： 欲证 $B=C$，只须证 $B\subseteq C$ 且 $B\supseteq C$。

(1) 任取 $x\in B$，此时若 $x\in A$，则

$x\in A\cap B$

$\Rightarrow x\notin A\oplus B$（由对称差定义导出）

$\Rightarrow x\notin A\oplus C$（由 $A\oplus B=A\oplus C$）

$\Rightarrow x\in A\cap C$（由对称差定义导出）

$\Rightarrow x\in C$

任取 $x\in B$，此时若 $x\notin A$，则

$x\notin A\cap B$

$\Rightarrow x\in A\oplus B$（由对称差定义导出）

$\Rightarrow x\in A\oplus C$（由 $A\oplus B=A\oplus C$）

$\Rightarrow x\in A\cap\bar{C}$ 或 $x\in\bar{A}\cap C$

$\Rightarrow x\in\bar{A}\cap C$（$x\in A\cap\bar{C}$ 不成立）

$\Rightarrow x\in C$

所以，对任意 $x\in B$，不管 x 是否属于 A，总有 $x\in C$，故 $B\subseteq C$。

(2) 任取 $x\in C$，按同样的方法，可证明

$$B\supseteq C,\text{所以 } B=C。$$

集合的幂集是一个很重要的概念。

定义 1-9 设 S 是一个有限集合，则 S 的所有子集所组成的集合称为 S 的**幂集**，用 $\rho(S)$或 2^S 表示，即

$$\rho(S)=\{X\mid X\subseteq S\}$$

例 1-11 设 $S=\{1,2,3\}$，则

$$\rho(S)=\{\phi,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,\ 2\},$$
$$\{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\},\ S\}$$

对于空集 ϕ,其幂集为:$\rho(\phi)=\{\phi\}$

还有:$\rho(\rho(\phi))=\{\phi,\ \{\phi\}\}$

$$\rho(\rho(\rho(\phi)))=\{\phi,\ \{\phi\},\ \{\{\phi\}\},\ \{\phi,\ \{\phi\}\}\}$$

以后将会证明如果 S 有 k 个元素,则 $\rho(S)$ 有 2^k 个元素。

例 1-12 设 A 和 B 是两个集合,则

(1) $\rho(A)\cup\rho(B)\subseteq\rho(A\cup B)$

(2) $\rho(A)\cap\rho(B)=\rho(A\cap B)$

证明: (1) 任取 $X\in(\rho(A)\cup\rho(B))$

$\Rightarrow X\in\rho(A)$ 或 $X\in\rho(B)$

$\Rightarrow X\subseteq A$ 或 $X\subseteq B$

$\Rightarrow X\subseteq(A\cup B)$

$\Rightarrow X\in\rho(A\cup B)$

故 $\rho(A)\cup\rho(B)\subseteq\rho(A\cup B)$

(2) 任取 $X\in\rho(A)\cap\rho(B)$

$\Rightarrow X\in\rho(A)$ 且 $X\in\rho(B)$

$\Rightarrow X\subseteq A$ 且 $X\subseteq B$

$\Rightarrow X\subseteq(A\cap B)$

$\Rightarrow X\in\rho(A\cap B)$

故 $\rho(A)\cap\rho(B)\subseteq\rho(A\cap B)$

反之,任取 $X\in\rho(A\cap B)\Rightarrow X\subseteq(A\cap B)$

$\Rightarrow X\subseteq A$ 且 $X\subseteq B$

$\Rightarrow X\in\rho(A)$ 且 $X\in\rho(B)$

$\Rightarrow X\in(\rho(A)\cap\rho(B))$

故 $\rho(A)\cap\rho(B)\supseteq\rho(A\cap B)$

所以 $\rho(A)\cap\rho(B)=\rho(A\cap B)$

一般情况下,$\rho(A)\cup\rho(B)\neq\rho(A\cup B)$,我们举例说明如下:

$$A=\{a\},\ B=\{b\}.\ A\cup B=\{a,\ b\}$$