混　凝　土
试验设计与质量管理

卢瑞珍　编著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书主要阐述概率统计方法在混凝土生产、试验、研究工作中的应用。内容包括：混凝土材料试验中的测量误差；混凝土性能研究中的正交试验设计；混凝土生产过程的质量管理和最终产品的验收评定标准。

本书的读者对象为土建、水利类专业的大专学生，也可供从事混凝土生产质量管理或材料试验研究的工程技术人员或教师作参考。

混 凝 土

试验设计与质量管理

上海交通大学出版社出版

(淮海中路1984弄19号)

新华书店上海发行所发行

上海交通大学印刷厂排印

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 12.25 字数 262000

1986年6月第1版 1986年7月第1次印刷

印数 1—10000

统一书号：15324.24 科技书目：129-225

定价：2.30元

目　　录

第一章 概率论提要

第一节 随机事件及概率

1.1.1 随机事件及其运算关系

1． 在一定条件下，可能发生也可能不发生的试验结果称为随机事件，简称事件，用A、B、$C\cdots$表示。随机事件有两个特殊情况，即必然事件和不可能事件。必然事件是指在一定条件下，每次试验都必定发生的事件，用Ω表示。不可能事件是指在一定条件下，各次试验都一定不发生的事件，用ϕ表示。

有些事件能分解成一些更基本的事件，称为复合事件。而不能再分解（或不必再分解）的事件，则称为基本事件。

2． 事件间的关系和运算有(见图1-1)：

(1) 包含关系——当事件A发生时，事件B也一定发生，就称B包含A。

(2) 等价关系——事件A、B，如有B包含A，又有A包含B，即事件A和B同时发生或不发生，则称A与B等价，记作$A=B$。

(3) 事件的和——表示事件A或事件B发生的事件，称为A与B的和，记作$A+B$。

(4) 事件的积——表示事件A和事件B同时发生的事件，称为A与B的积，记作AB。

(5) 事件的差——表示事件A发生而事件B不发生的事件，称为A与B的差，记作$A-B$。

(6) 互斥关系——如事件A与事件B不可能同时发生，称A与B是互斥（或互不相容）的，记作$AB=\phi$。

(7) 对立（互逆）关系——如事件A与事件B互斥（即$AB=\phi$），且在每次试验中，不是出现A就是出现B（即$A+B=\Omega$），则称事件B为A的对立事件（或逆事件），记作$B=\overline{A}$。此时，$(\overline{\overline{A}})=A$，$A\overline{A}=\phi$，$A+\overline{A}=\Omega$。

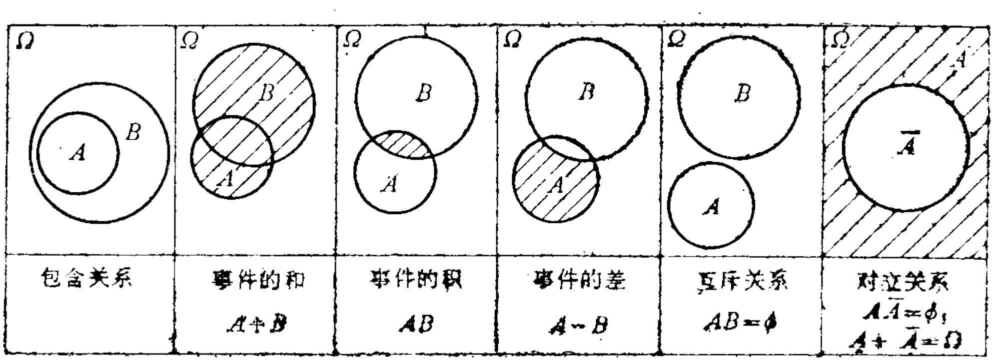

图 1-1 事件关系的示意图

1.1.2 概率及概率运算公式

1．概率的定义及基本性质

随机事件在一次试验中是否发生，固然是无法事先肯定的偶然现象，但当进行多次重复试验，就可以发现其发生的可能性大小，还是具有规律性的。用来描述事件出现可能性大小的量，就是概率。

概率的统计定义是：在相同条件下进行 n 次重复试验，事件 A 出现了 m 次，事件 A 的频率（记作 $F(A)$）即为

$$F(A)=\frac{\text{事件}A\text{出现的次数}}{\text{试验的总次数}}=\frac{m}{n} \tag{1-1}$$

当试验次数 n 足够大时，$F(A)$ 趋向于稳定在某个固定常数附近，此固定常数是事件 A 出现可能性大小的一个合理尺度，称为概率（记作 $P(A)$），此时有

$$P(A)\approx F(A) \tag{1-2}$$

即当试验次数 n 足够大时，可用事件的频率近似地表示该事件的概率。

概率的古典定义是：当随机现象具有以下特征：

(1) 所有可能发生的试验结果为 n 个有限数量，即随机现象只有 n 个不同的基本事件；

(2) 每次试验只能发生，且必然发生这 n 个事件中的一个；

(3) 这 n 个事件中的每一个事件，在试验中出现的可能性相等。

这类随机现象称为等可能性概率模型，或古典概率模型。如事件 A 由 $k(k\leqslant n)$ 个不同基本事件组成，则事件 A 的概率 $P(A)$ 定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{所包含的基本事件个数}}{\text{基本事件的总数}}=\frac{k}{n} \tag{1-3}$$

由概率的定义可归纳出概率的基本性质有：

(1) 任何事件 A 的概率，总介于 0 与 1 之间，

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \tag{1-4}$$

(2) 必然事件 Ω 的概率等于 1，

$$P(\Omega)=1 \tag{1-5}$$

(3) 不可能事件 ϕ 的概率等于 0，

$$P(\phi)=0 \tag{1-6}$$

[例 1-1] 一批混凝土预制板共 50 块，其中 45 块为正品，5 块为次品。如从中任意抽取 1 块，问抽出是正品的概率 $P(A)$ 和抽出为次品的概率 $P(B)$ 分别为多少？

[解] 预制板总数为 50 块，一次抽 1 块，即可能出现的结果共有 50 个，而导致正品出现的机会是 45 个，故

$$P(A)=\frac{45}{50}=\frac{9}{10}$$

导致次品出现的机会是 5 个，故

$$P(B)=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$$

2．概率的加法公式

(1) 如事件 A 与事件 B 是互斥事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1-7}$$

(2) 事件A 与事件$\overline{A}$为对立（互逆）事件，其概率和等于1，即

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$$

$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{1-8}$$

(3) 对于任意两个事件 A 与 B，有

$$\begin{aligned}P(A+B)&=P(A)+P(B)-P(AB)^{①}\\&\leqslant P(A)+P(B)\end{aligned} \tag{1-9}$$

概率的加法公式可推广至事件 A_1、A_2、$\cdots$、A_n。

[例 1-2] （条件同例 1-1），如用户来验收时，从中任意抽取 3 块，相约 3 块中只要发现有次品，整批预制板将按次品作价。问可能出现此种情况的概率是多少？

[解法 1] 按次品作价的可能情况有："3 块中 1 块次品、2 块正品"用 A_1 表示；"3 块中 2 块次品、1 块正品"用 A_2 表示；"3 块中 3 块次品、无正品"用 A_3 表示。按次品作价的事件为 A_1、A_2、A_3 事件之和。由于 A_1、A_2、A_3 不可能同时出现，为互斥事件，按加法公式

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

$$P(A_1)=\frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}=\frac{4950}{19600}=0.2526$$

$$P(A_2)=\frac{C_5^2\ C_{45}^1}{C_{50}^3}=\frac{450}{19600}=0.0230$$

$$P(A_3)=\frac{C_5^3\ C_{45}^0}{C_{50}^3}=\frac{10}{19600}=0.0005$$

$$P(A_1+A_2+A_3)=\frac{4950+450+10}{19600}=0.2761$$

[解法 2] "3 块中出现 1 块、2 块或 3 块次品"的事件，记作 $A_1+A_2+A_3$，与"3 块中没有 1 块次品，全是正品"的事件 B 是互逆事件，既不能同时出现，又必有一件出现。

$$P(B)=\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}=\frac{1419}{1960}=0.7239$$

根据加法公式

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+A_3)&=1-P(B)\\&=0.2761\end{aligned}$$

两种解法的结果是一致的，且解法 2 比解法 1 简便。

---

①$P(AB)$为任意两事件 A、B 同时发生的概率，可以推得此概率的上下界限值如下：

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+[1-P(A+B)]$$

$$\geqslant 1-P(\overline{A})-P(\overline{B})=P(A)+P(B)-1$$

$$P(AB)\leqslant \min\{P(A),\ P(B)\}$$

$$\therefore\ \max\{P(A)+P(B)-1,\ 0\}\leqslant P(AB)\leqslant \min\{P(A),\ P(B)\}$$

②C_n^d 为组合数的符号

$$C_n^d=\frac{n!}{d!(n-d)!}\ \text{并规定}\ 0!=1.$$

3. 条件概率及概率的乘法公式

在事件B已发生的条件下，事件A发生的概率，称为事件A对于事件B的条件概率，记作$P(A|B)$。当$P(B)>0$时，有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1-10}$$

当$P(B)=0$时，规定$P(A|B)=0$。

概率的乘法公式

(1) 两个事件积的概率，等于其中一事件的概率，乘以在此事件出现条件下另一事件的条件概率，即

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)P(B|A)\\&=P(B)P(A|B)\end{aligned} \tag{1-11}$$

(2) 如两事件为相互独立事件，即事件A是否发生不影响事件B的概率；反之，事件B是否发生不影响事件A的概率，则

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1-12}$$

概率的乘法公式可推广至事件A_1、A_2、…、A_n。

[例 1-3] (条件同例 1-1)，且 5 块次品中有 1 块严重残缺，应列为废品。现从中任意抽取 1 块，并已知抽得的属次品，问它恰好是废品的概率是多少?

[解] 用事件A表示“抽得的是次品”，事件B表示“抽得的是废品”。现在事件A已出现，要求的是事件A已出现条件下事件B出现的概率$P(B|A)$。由于 5 块次品中废品占 1 块，故

$$P(B|A)=\frac{1}{5}$$

[例 1-4] (条件同例 1-1)，从中连抽两次，每次抽 1 块。如第一次已抽得 1 块次品，(记作事件)A。求第二次再抽得次品，(记作事件B)的概率是多少?

[解] A、B两事件连续出现这一事件，是事件A与事件B的积，根据乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

由于事件A已出现，混凝土预制板只剩下 49 块，其中次品也只剩下了 4 块，故

$$P(AB)=\frac{5}{50}\times\frac{4}{49}$$

[例 1-5] (条件同例 1-1)，仍从中连抽两次，每次抽 1 块，分别记作事件A、B。如第一次已抽得 1 块次品，但抽后又将其放回，再抽第二次。问第二次再抽得次品的概率?

[解] 由于已将第一次抽得的次品放回，事件A不影响事件B的概率，A、B相互独立。根据独立事件的乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{5}{50}\times\frac{5}{50}$$

4. 全概率公式及贝叶斯(Bayes)公式

设事件B_1，B_2，…，B_n构成一必然事件，且B_1，B_2，…，B_n间两两互斥，$P(B_i)>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，事件A仅当事件B_1，B_2，…，B_n中之一发生时，它才发生。事件A的概率$P(A)$可按下式求得：

$\because B_1+B_2+\cdots+B_n=\Omega$

$A=A\Omega=A(B_1+B_2+\cdots+B_n)=AB_1+AB_2+\cdots+AB_n$

（且也两两互斥）

根据概率加法公式

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_n)$$

根据概率乘法公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i) \tag{1-13}$$

此即全概率公式。

由条件概率的定义，有

$$P(B_k|A)=\frac{P(AB_k)}{P(A)}$$

根据概率乘法公式及全概率公式，可得

$$P(B_k|A)=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)} \tag{1-14}$$

此即贝叶斯公式。

［例 1-6］ 有甲、乙、丙、丁四个预制厂生产同一种混凝土预制板。如各厂产量分别占总产量的 20%，30%，15%，35%。每个预制厂的次品率又分别为 4%，2%，5%，1%。问（1）这四个预制厂生产的总次品率为多少？（2）如现在已经出现了一件次品，此次品恰好是丁厂生产的概率是多少？

［解 1］ 用事件A表示“抽出产品为次品”，B_1，B_2，B_3，B_4分别表示抽到产品为甲、乙、丙、丁四个厂这一事件。由于B_1，B_2，B_3，B_4不可能同时出现，是互斥事件，因此有

$$A=AB_1+AB_2+AB_3+AB_4$$

根据全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)$$

由题意可知：

$$P(B_1)=0.20 \qquad P(A|B_1)=0.04$$
$$P(B_2)=0.30 \qquad P(A|B_2)=0.02$$
$$P(B_3)=0.15 \qquad P(A|B_3)=0.05$$
$$P(B_4)=0.35 \qquad P(A|B_4)=0.01$$

$$P(A)=0.20\times0.04+0.30\times0.02+0.15\times0.05+0.35\times0.01=0.025$$

［解 2］ 根据贝叶斯公式

$$P(B_4|A)=\frac{P(B_4)P(A|B_4)}{\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{0.35\times0.01}{0.025}=0.14$$

第二节　随机变量及概率分布

1.2.1　随机变量

每次试验的结果可以用一个变量ξ(或记作η，ζ)的数值来表示，这个变量的取值随偶然因素而变化，但又遵从一定的概率分布规律，这种变量称为随机变量。

随机变量通常有两类：

(1) 如试验结果的可能值能一一列举出来，即ξ可取的值是间断的、可数的，称这类随机变量是离散型随机变量。例如，从一批混凝土预制板中抽检三块，以出现的次品数作为随机变量，则ξ可取的值是0、1、2、3，是间断的、可数的。

(2) 如试验结果的可能值不能一一列举出来，即ξ可取的值是连续充满在一个区间的，称这类随机变量是连续型随机变量。例如，标号为30(即300#)的混凝土，其试块强度值波动于20～50MPa(200～500kgf/cm²)，以混凝土试块强度作为随机变量，则ξ可取的值落在该强度的区间内，是连续的。

随机变量是随机现象的数量化，我们可以用：

$\xi=x$　表示某事件；

$P(\xi=x)$　表示该事件出现的概率；

$F(x)=P(\xi<x)$　表示$\xi<x$事件的概率，并定义为随机变量ξ的概率分布函数，用来描述随机变量的统计规律。

1.2.2　离散型随机变量及常用分布

1.　离散型随机变量的概率分布函数

设有离散型随机变量ξ_1，ξ_2，…，ξ_n，…。

相应的概率为$P(\xi=\xi_i)=p_i(p_i>0,\ i=1,2,3,\cdots)$。

且$\sum\limits_{i=1} p_i=1$。

为直观起见，可写成表格形式，称为离散型随机变量ξ的分布列。

ξ	ξ_1	ξ_2	…	ξ_n	…
p	p_1	p_2	…	p_n	…

其概率分布函数为

$$F(x)=P(\xi<x)=\sum_{\xi_i<x} p_i \qquad (1\text{-}15)$$

2.　二项分布

二项分布是离散型随机变量的一种常用分布。设每次试验只有两个结果：A和$\overline{A}$，且

$$P(A)=p,\qquad P(\overline{A})=q,\qquad p+q=1$$

n次独立试验中，A出现k次的概率可由以下的分析得出：

“事件A在n次试验中出现k次”，这一事件可以有许多不同方式出现。例如，前k次

试验都出现 A，后$(n-k)$次都不出现；或前$(n-k)$次不出现 A，而后 k 次出现；也可以是 n 次试验中的某 k 次出现 A，其他$(n-k)$次不出现。即

$$\underbrace{A\,A\cdots A}_{k}\ \underbrace{\overline{A}\ \overline{A}\ \cdots\overline{A}}_{n-k},\ \cdots\cdots,\ \underbrace{\overline{A}\ \overline{A}\ \cdots\overline{A}}_{n-k}\ \underbrace{A\,A\cdots A}_{k}$$

这些不同方式的总数，是组合数 C_n^k。

在任一种方式中，事件 A 出现 k 次的概率，可根据概率乘法公式给出。由于 n 次试验是相互独立的，所以

$$P(\underbrace{AA\cdots A}_{k}\ \underbrace{\overline{A}\ \overline{A}\ \cdots\overline{A}}_{n-k})=\{P(A)\}^k\{P(\overline{A})\}^{n-k}=p^kq^{n-k}$$

因此，n 次独立试验中，A 出现 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k\,p^k\,q^{n-k}$$

当把事件 A 出现的次数，视作离散型随机变量 ξ，则其分布列可写成

$$P(\xi=k)=C_n^kp^kq^{n-k} \tag{1-16}$$

列成表格形式，即为

ξ	0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n
p	q^n	$C_n^1\,p\,q^{n-1}$	$C_n^2\,p^2\,q^{n-2}$	$\cdots$	$C_n^{n-1}p^{n-1}q$	p^n

表中的概率恰好是二项式 $(p+q)^n$ 的展开式的各项，且和为 1，所以称这个分布列为二项分布，或称随机变量ξ服从二项分布。示意图见图 1-2。

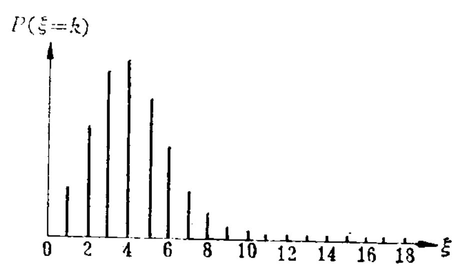

图 1-2　二项分布的示意图

二项分布的概率分布函数为

$$\begin{aligned}F(x)&=P(\xi<x)\\&=\sum_{k<x}P(\xi=k)\\&=\sum_{d=0}^{k}C_n^d\,p^dq^{n-d}\end{aligned} \tag{1-17}$$

［例 1-7］　一大批混凝土预制板，其中次品占 2%。现任意抽取 5 块，问(1) 5 块中恰好有 2 块是次品的概率是多少？(2) 5 块中次品不超过 2 块的概率是多少？

［解 1］　由于整批混凝土预制板的数量很大，而抽样的数量很小，可以认为：第一块板抽出后不放回，对第二次抽取没有实际影响，各次抽取是相互独立的。

称抽到次品为事件 A，则抽到正品即为$\overline{A}$，$P(A)=0.02$，$P(\overline{A})=1-P(A)=0.98$。现 $n=5$，$k=2$

$$\begin{aligned}P_5(2)&=C_5^2\,p^2\,q^{5-2}\\&=\frac{5!}{2!(5-2)!}(0.02)^2(0.98)^3=0.0038\end{aligned}$$

［解 2］　5 块中次品不超过 2 块，可以有这样几种情况：5 块中次品数分别为 0,1 或 2。由于这几种情况互斥，利用概率加法公式

$$\sum P(\xi=2)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)$$

$$P_5(0)=\frac{5!}{0!(5-0)!}(0.02)^0(0.98)^5=0.9039$$

$$P_5(1)=\frac{5!}{1!(5-1)!}(0.02)^1(0.98)^4=0.0922$$

$$P_5(2)=\frac{5!}{2!(5-2)!}(0.02)^2(0.98)^3=0.0038$$

$$\sum P(\xi=2)=0.9039+0.0922+0.0038=0.9999$$

1.2.3 连续型随机变量及常用分布

1. 连续型随机变量的概率分布函数

连续型随机变量ξ，其概率分布函数$F(x)$可写成

$$F(x)=P(\xi<x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx \tag{1-18}$$

称$f(x)$为ξ的概率密度函数（或简称概率密度）。

$f(x)$有如下性质：

(1) $f(x)\geqslant 0$ (1-19)

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$ (1-20)

(3) $P(a\leqslant\xi<b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b}f(x)dx$ (1-21)

2. 正态分布（又称高斯 Gauss 分布）

正态分布是连续型随机变量最常用的一种分布。随机变量ξ的概率密度函数$f(x)$和概率分布函数$F(x)$分别为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)2}{2\sigma 2}} \tag{1-22}$$

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)2}{2\sigma 2}}dx \tag{1-23}$$

$f(x)$的图象（见图1-3），具有如下特点：

(1) $f(x)$对称于直线$x=\mu$，且$f(x)>0$，曲线位于横轴的上方。它向左右无穷伸延，并以横轴为渐近线；

(2) 当$x=\mu$时，$f(x)$曲线出现最高点，当x向左右远离μ时，曲线逐渐降低；

(3) 参数σ为曲线拐点的横坐标，其大小决定了正态曲线的形状特点，σ愈大曲线愈平缓，σ愈小曲线愈高陡。

可以看出，正态分布主要取决于μ,σ两个参数，常记作$N(\mu,\sigma^2)$，分别称μ，σ^2为随机变量ξ的数学期望和方差（数学期望和方差的统计概念将在第三节中讨论）。

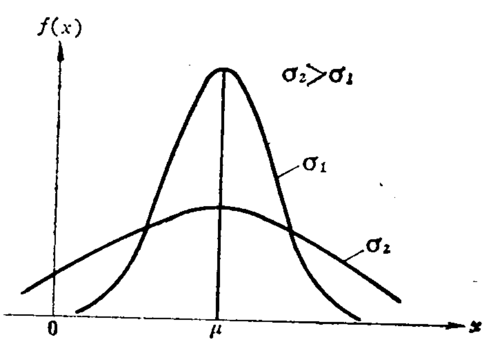

图 1-3 正态分布的示意图

3. 标准正态分布

如令随机变量$t=(x-\mu)/\sigma$，通过变量转换，可由一般正态分布推算得随机变量t的概

率密度函数 $\varphi(t)$及相应的概率分布函数 $\Phi(t)$，

$$\varphi(t)dt=f(x)dx$$

$$\varphi(t)=\frac{dx}{dt}f(x)\Big|_{x=\mu+\sigma t}$$

$$\because\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sigma}$$

$$\therefore\quad \varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{1-24}$$

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{1-25}$$

这种分布称为标准正态分布，是正态分布中 $\mu=0$，$\sigma=1$ 的一种特例。常记作 $N(0,1)$。

通常将 $t\sim\Phi(t)$制成数值表（见附表一），称 t 为标准正态分布的分位数。如已知 t，即可从表中查得相应的 $\Phi(t)$；反之，亦然。

标准正态分布与一般正态分布具有如下关系：

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{1-26}$$

因此，对于任意正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$，当已知 x，需要求相应的 $F(x)$时，均可通过下式变换

$$t=\frac{x-\mu}{\sigma} \tag{1-27}$$

算得对应于 x 的 t 值，再在标准正态分布函数值表上，查得相应的概率。

［例 1-8］ 已知随机变量 t 服从 $N(0,1)$的标准正态分布，试计算下列概率：(1) $P(t<-2.0)$，(2) $P(-1.0\leqslant t<1.0)$。

［解 1］ 查标准正态分布函数值表，得

$P(t<-2.0)=\Phi(-2.0)=0.0228$

［解 2］ $P(-1.0\leqslant t<1.0)$

$=\Phi(1.0)-\Phi(-1.0)$

$=0.8413-0.1587=0.6823$

［例 1-9］ 已知随机变量 ξ 服从 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 正态分布，试分别计算 ξ 落在 $\mu\pm3\sigma$ 内和 $\mu\pm3\sigma$ 外的概率。

［解］ $P(\mu-3\sigma\leqslant\xi<\mu+3\sigma)$

$$=\Phi\left(\frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$

$=\Phi(3.0)-\Phi(-3.0)=0.9987-0.00135$

$=0.9973$

$P(|\xi|\geqslant3\sigma)=1-0.9973=0.0027$

［例 1-10］ 已知一批标号为25（即 250#）的混凝土，其抗压强度 R 服从 $N(30,5^2)$的正态分布。试计算抗压强度高于 25MPa 的概率（即求标号的强度保证率）。

［解］ $P(R\geqslant25)=1-P(R<25)$

$$=1-\Phi\left(\frac{25-30}{5}\right)=1-\Phi(-1.0)$$

$$=1-0.1587=0.8413$$

此批混凝土，其标号的强度保证率为 84.1%。

[例 1-11] （条件同例 1-10），新的国家标准拟将标号的保证率提高到 95%，且将标准立方体试件尺寸由 $20cm^3$ 改为 $15cm^3$，试问此批混凝土相当于新标号的什么等级？

[解] $\Phi(t)=1-0.95=0.05$

$$t=-1.645$$

$$\frac{R-30}{5}=-1.645 \qquad R=21.78$$

考虑到标准试件尺寸的改变，原来的测试强度值应乘以 1.05

$$R=1.05\times21.78=22.87\text{MPa}(228.7\text{kgf/cm}^2)$$

此批混凝土大致相当于新标号 23（即 230#）。

1.2.4 二维连续型随机变量系及联合分布

很多随机现象中往往涉及多个随机变量。例如，混凝土的质量波动既反映在抗压强度上，也反映在抗拉强度和其他性能上，有时需要用多个随机变量 ξ，η，ζ …来描述。这些随机变量之间，一般说来，又有某种联系，因而需要作为一个整体来研究。这里，我们仅讨论由二个连续型随机变量组成的有序数组。

1. 对于二维随机变量(ξ,η)系，其概率分布函数 $F(x,y)$ 定义为

$$F(x,y)=P(\xi<x,\eta<y)$$

式中 $P(\xi<x,\ \eta<y)$表示事件$(\xi<x)$及事件$(\eta<y)$同时出现的概率。$F(x,y)$ 则称为随机变量(ξ,η)系的联合分布函数。

从几何意义上来说，$F(x,y)$表示二维随机变量(ξ,η)系落在图 1-4 中区域 D 上的概率。

(ξ,η)系落在图 1-4 中区域 Q 上的概率可按下式算出：

$$\begin{aligned}&P(\xi\geqslant x,\ \eta\geqslant y)\\&=1-P(\xi<x)-P(\eta<y)+P(\xi<x,\ \eta<y)\\&=1-F(x)-F(y)+F(x,\ y)\end{aligned} \tag{1-28}$$

$(\xi,\ \eta)$系落在任意平面区域 G 上的概率（见图 1-5），可按下式算出：

$$\begin{aligned}&P(x_1\leqslant\xi<x_2,\ y_1\leqslant\eta<y_2)\\&=P(\xi<x_2,\ \eta<y_2)-P(\xi<x_2,\ \eta<y_1)-P(\xi<x_1,\ \eta<y_2)\\&\quad+P(\xi<x_1,\ \eta<y_1)\\&=F(x_2,\ y_2)-F(x_2,\ y_1)-F(x_1,\ y_2)+F(x_1,\ y_1)\end{aligned} \tag{1-29}$$

2. 二维连续型随机变量的概率密度函数 $f(x,y)$与联合分布函数 $F(x,y)$的关系为

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dx\,dy \tag{1-30}$$

并具有如下性质：

(1) $f(x,y)\geqslant0$ (1-31)

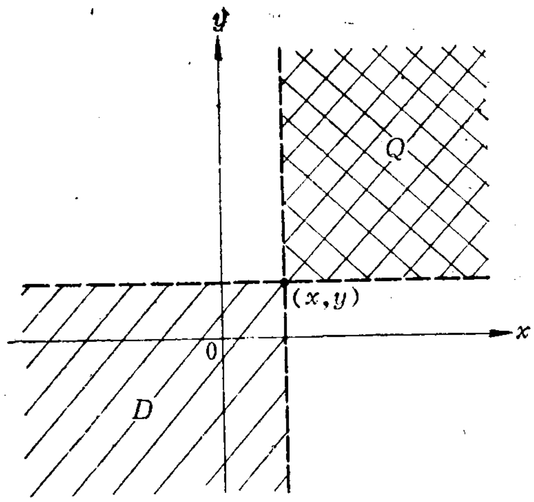

图 1-4

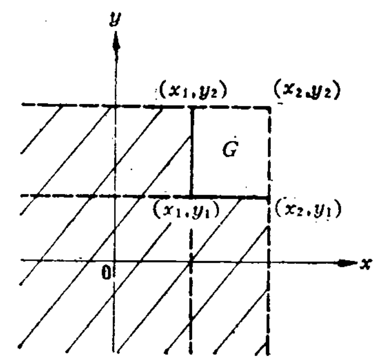

图 1-5

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\,dy=1$ (1-32)

(3) $(\xi,\ \eta)$系落在区域 G 上的概率

$$P\{(\xi,\eta)\in G\}^{①}=\iint_G f(x,y)dx\,dy \tag{1-33}$$

(4) $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=f(x,y)$ (1-34)

3. 边际概率密度及边际概率分布

作为特殊情况，有

$$F(x,+\infty)=F_\xi(x)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx \tag{1-35}$$
$$F(+\infty,\ y)=F_\eta(y)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dy\,dx=\int_{-\infty}^{y} f_\eta(y)\,dy \tag{1-36}$$

式中：
$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$
$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

$F_\xi(x)$，$F_\eta(y)$和 $f_\xi(x)$，$f_\eta(y)$分别称为二维随机变量 (ξ,η) 系关于 ξ 或关于 η 的边际分布和边际概率密度。

4. 条件概率密度及条件概率分布

对于二维连续型随机变量系，x 关于 y 和 y 关于 x 的条件概率密度定义为

$$f_\xi(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_\eta(y)} \tag{1-37}$$

① $\in$ 表示属于。

$$f_\eta(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_\xi(x)} \tag{1-38}$$

其相应的条件概率分布为

$$F_\xi(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(x|y)dx=\int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}dx \tag{1-39}$$

$$F_\eta(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_\eta(y|x)dy=\int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)}dy \tag{1-40}$$

因此，二维概率密度函数可写作

$$f(x,y)=f_\xi(x|y)f_\eta(y)=f_\eta(y|x)f_\xi(x) \tag{1-41}$$

二维概率分布函数可写作

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y} F_\xi(x|y)f_\eta(y)dy=\int_{-\infty}^{x} F_\eta(y|x)f_\xi(x)dx \tag{1-42}$$

当 ξ 与 η 相互独立时

$$f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y) \tag{1-43}$$

$$F(x,y)=F_\xi(x)F_\eta(y) \tag{1-44}$$

一般情况下有下列不等式成立

$$\max\{F_\xi(x)+F_\eta(y)-1,0\}\leqslant F(x,y)\leqslant \min\{F_\xi(x),F_\eta(y)\} \tag{1-45}$$

5. 二维正态分布

二维正态分布是二维连续型随机变量系最常用的一种分布(见图1-6)。

二维正态概率密度函数表达为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho_{xy}(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]} \tag{1-46}$$

称 ρ_{xy} 为 ξ,η 的相关系数(其统计意义将在1.3.3节中讨论)，当 ξ,η 相互独立时，$\rho_{xy}=0$，即有

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}} \tag{1-47}$$

其边际概率密度为

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} \tag{1-48}$$

$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}} \tag{1-49}$$

即二维正态分布的两个边际分布都是一维正态分布，分别为$N(a,\sigma_1^2)$和$N(b,\sigma_2^2)$。

其条件概率密度为

$$f_\xi(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}e^{-\frac{\left\{x-\left[a+\rho_{xy}\sigma_1\left(\frac{y-b}{\sigma_2}\right)\right]\right\}^2}{2\sigma_1^2(1-\rho_{xy}^2)}} \tag{1-50}$$