应用数学丛书

变分法及其应用

叶庆凯　郑应平　编著

国防工业出版社

应用数学丛书

变分法及其应用

叶庆凯　郑应平　编著

国防工业出版社

内容简介

本书总结了近年来变分学在一般空间中的发展，以及这些理论在最优控制和力学领域中的应用。这有助于具有工科数学基础的读者了解和应用这些成果。

本书主要讨论了：在一般函数空间中泛函极值存在的条件；求泛函极值的直接方法；应用。

供不满足于使用经典变分法的数学、力学和系统及控制工作者、有关专业的教师、研究生和高年级学生参考使用。

应用数学丛书

变分法及其应用

叶庆凯　郑应平　编著

*

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（邮政编码100044）

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32　印张5 7/8　149千字

1991年9月第一版　1991年9月北京第一次印刷　印数：0001—2000册

ISBN 7-118-00814-1/O·61　　定价：4.85元

应用数学丛书目录

第　一　批

1. Z变换与拉普拉斯变换　　关肇直　王恩平　编著
2. 常微分方程及其应用　　秦化淑　林正国　编著
3. 实变函数论基础　　胡钦训　编著
4. 正交函数及其应用　　柳重堪　编著
5. 沃尔什函数与沃尔什变换　　关肇直　陈文德　编著
6. 圆柱函数　　刘　颖　编著

第　二　批

1. 集合论　　程极泰　编著
2. 图　论　　王朝瑞　编著
3. 概率论　　狄昂照　编著
4. 矩阵理论　　王耕禄　史荣昌　编著
5. 复变函数论　　杨维奇　编著
6. 逼近论　　徐利治、周蕴时、孙玉柏　编著
7. 矢量与张量分析　　冯潮清、赵愉深、何浩法　编著
8. 应用泛函分析　　柳重堪　编著

第　三　批

1. 网络理论　　张正寅　编著
2. 线性系统与多变量控制　　叶庆凯　编著
3. 椭圆函数及其应用　　高本庆　编著
4. 拓扑理论及其应用　　王则柯　凌志英　编著

*5. 数理逻辑　　沈百英　编著

6. 误差理论与数据处理	贾沛璋	编著
7. 随机过程理论及应用	熊大国	编著
8. 线性估计与随机控制	卢伯英 陈宗基	编著
9. 渐近分析方法及应用	徐利治 陈文忠	编著
*10. 预测的数学方法	张有为	编著
11. 变分法及其应用	叶庆凯 郑应平	编著
*12. 应用离散数学	陈文德	编著
*13. 多项式与多项式矩阵	王恩平 王朝珠	编著

* 表示即将出版的书目。

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本《丛书》将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本《丛书》是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，分期分批出版。

《丛书》可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　言

变分法是一个古老的数学分支。它研究泛函，主要是能用各种积分形式表达的泛函的极值和驻值问题。

经典的变分法主要讨论如何把泛函的驻值问题转化为微分方程的边值问题，亦即推导各种形式的欧拉（Euler）方程及定解条件。

经典变分法的主要缺陷表现在以下两方面：一是推导欧拉方程时，需要较强的条件；一是将泛函极值问题转化为微分方程的边值问题后，求解微分方程的边值问题一般说来仍相当困难。

本书的主要内容有两部分：（1）在一般函数空间中讨论泛函极值存在的条件；（2）讨论求泛函极值的直接方法，即不把它转化为微分方程的边值问题后再求解，而是直接在函数空间中用搜索方法来求极值。

本书共分八章。第一章介绍经典变分法的主要内容，熟悉经典变分法内容的读者可跳过这一章。第二章介绍线性空间的概念，它是以后各章的数学基础，熟悉泛函分析内容的读者可跳过这一章。第三至第五章讨论一般函数空间中极值存在的条件。第六章介绍变分法中的直接方法。第七章介绍变分法在最优控制中的应用，第八章介绍变分法在力学中的应用。

本书第二至第五章的初稿由郑应平同志提供，第一章以及第六至第八章的初稿由叶庆凯同志提供。全书最后由叶庆凯同志统一编写。

本书的主要对象是需要了解或使用变分法但又不满足于经典变分法的数学工作者，力学工作者，系统及控制工作者，以及有关专业的高年级学生和研究生。

至今，有关经典变分法的书籍已出版了不少，但按本书的方

式讨论与组织变分法内容的书籍尚少见。本书编写过程中，在选材与叙述方面均可能有不妥或错误之处，衷心希望广大读者指正。

作　者

目　录

第一章 变分法基础

§1.1 泛函的变分与泛函的极值

定义(泛函) 假设对某一类函数 $\{y(x)\}$中的每一个函数$y(x)$有一个实数值v与之对应,那末变量v称为定义于$\{y(x)\}$上的泛函, 并记为

$$v=v[y(x)]。$$

粗略地说,泛函即自变量为函数的实值函数。

上述定义不难推广到依赖于多个函数的泛函,也不难推广到定义在多元函数上的泛函。这时,上述定义中的x,y均可以是矢量。

一个泛函定义于其上的函数类称为对应于该泛函的容许函数类。

定义(函数的变分) 泛函$v[y(x)]$的自变量$y(x)$的变分δy是指容许函数类中的两个函数$y_1(x)$与$y_2(x)$之差:

$$\delta y=y_1(x)-y_2(x), \tag{1.1}$$

这里x是参数,或者说,在变分运算中可以认为x是固定不变的(但可以在容许范围内取任意值)。

函数变分有如下性质:如果容许函数类由可微函数组成,则有

$$\begin{aligned}d(\delta y)&=d[y_1(x)-y_2(x)]\\&=d(y_1(x))-d(y_2(x))\\&=\delta(dy)。\end{aligned}\tag{1.2}$$

也就是说,此时函数的微分运算与变分运算的次序是可交换的。

定义(泛函的变分) 如果泛函$v[y(x)]$的改变量

$$\Delta v=v[y(x)+\delta y]-v[y(x)] \tag{1.3}$$

可以表示为如下形式：

$$\Delta v = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y)\max|\delta y|, \quad (1.4)$$

其中$L[y(x), \delta y]$对于δy说来是线性的，且当$\max|\delta y| \to 0$时有$\beta(y(x), \delta y) \to 0$，则称$L[y(x), \delta y]$为泛函$v[y(x)]$的变分，记为$\delta v$。

由上述定义可以看出，泛函的变分与函数的微分十分类似，函数微分的运算法则一般说来对于泛函的变分也是适用的。例如，若取函数的变分$\delta y = \varepsilon\eta(x)$，则容易验证

$$\begin{aligned}\delta v &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} v[y(x) + \varepsilon\eta(x)]_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon \\ &= \varepsilon \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{v[y(x) + \varepsilon\eta(x)] - v[y(x)]}{\varepsilon} \\ &= \varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial y}, \ \eta\right) = \varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^T \eta = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^T \delta y, \end{aligned} \quad (1.5)$$

其中 $(\cdot \,.\, \cdot)$ 表示两个矢量的内积。当然，这里假定了v是y的可微函数。

又如，若$u[y(x)]$，$v[y(x)]$是定义在同一函数类$\{y(x)\}$上的两个泛函，则$u+v$，uv都是定义在$\{y(x)\}$上的泛函，且有（设变分δu，δv存在）

$$\delta(u+v) = \delta u + \delta v, \quad (1.6)$$

$$\delta(uv) = u\delta v + v\delta u。 \quad (1.7)$$

例1.1 考虑最简单的泛函

$$v[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \ y, \ y')dx,$$

求它的变分δv，其中上标$'$代表对自变量x求微商。

解 令$\delta y = \varepsilon\eta(x)$，则有$\delta y' = \varepsilon\eta'(x)$。因而

$$\begin{aligned}\Delta v = \int_{x_0}^{x_1} \{&F(x, \ y+\varepsilon\eta, \ y'+\varepsilon\eta') \\ &- F(x, \ y, \ y')\}dx,\end{aligned}$$

在F可对y，y'求导的假定下，容易得到

$$\delta v = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \{F_y(x, y, y')\eta + F_{y'}(x, y, y')\eta'\} dx。$$

必须指出，在求泛函的变分时，x是当作参数处理的。因而在上例中没有F_x出现。

例1.2 考虑泛函

$$J(u) = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + 2uf(x_1, x_2)\right] d\Omega,$$

求它的变分。

解 令$\delta u = \varepsilon\eta(x_1, x_2)$。因而

$$\Delta J = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial(u+\varepsilon\eta)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial(u+\varepsilon\eta)}{\partial x_2}\right)^2 \right.$$

$$\left. + 2(u+\varepsilon\eta) f\right] d\Omega$$

$$- \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + 2uf\right] d\Omega,$$

容易求出

$$\delta J = 2\varepsilon \iint_\Omega \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\partial(u+\varepsilon\eta)}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial(u+\varepsilon\eta)}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \eta f\right] d\Omega$$

$$= 2\varepsilon \iint_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \eta f\right] d\Omega。$$

定义（最小函数） 若泛函$v[y(x)]$在$y = y^*(x)$上的值不大于它在容许函数类中任一函数$y(x)$上的值，亦即

$$\Delta v = v[y(x)] - v[y^*(x)] \geqslant 0$$

对容许函数类$\{y(x)\}$中的任一函数均成立，则称泛函$v[y]$在$y^*(x)$上达到了最小值，而称$y^*(x)$为泛函$v[y]$的最小函数。

定义（极小函数） 若泛函$v[y(x)]$在$y = y^*(x)$上的值

不大于它在y^*邻近的任一函数$y(x)$上的值，则称泛函$v[y]$在$y^*(x)$上达到了极小值，而称$y^*(x)$为泛函$v[y]$的极小函数。

在上述定义中，若两个函数$y_1(x)$与$y_2(x)$相邻近只是指

$$\sup_x|y_1(x)-y_2(x)| \tag{1.8}$$

是小量，则相应的极小值称为强极小值；若相邻近是指

$$\sup_x|y_1(x)-y_2(x)|,\quad \sup_x|y_1'(x)-y_2'(x)| \tag{1.9}$$

均为小量，则相应的极小值称为弱极小值。

类似地可以定义泛函的最大值、最大函数、极大值、极大函数等。

变分法的基本任务就是在容许函数类中找出使给定泛函取极值的函数。显然，一个变分法问题的提出依赖于给定泛函是什么以及容许函数类是什么。对同样的泛函，如果容许函数类不同，所得结果往往也是不一样的。

变分法的基本引理 设$y(x)$是定义在区间$[x_0, x_1]$上的连续函数，$\eta(x)$为定义在同一区间上的一阶连续可微的任意函数，且$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$，若对于任何这样的$\eta(x)$均有

$$\int_{x_0}^{x_1} y(x)\eta(x)dx=0,$$

则在$[x_0, x_1]$上$y(x)\equiv 0$。

证明 用反证法。设$y(x)$在某一点$x'\in[x_0, x_1]$处不等于零，不妨设$y(x')=a>0$。由y的连续性可在$[x_0, x_1]$内选出x'的邻域$(\bar{x}_0, \bar{x}_1)$，当$x\in(\bar{x}_0, \bar{x}_1)$时有$y(x)\geqslant \frac{a}{2}$。再取

$$\eta(x)=\begin{cases}(x-\bar{x}_0)^2(x-\bar{x}_1)^2, & x\in(\bar{x}_0, \bar{x}_1),\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则有

$$\int_{x_0}^{x_1} y(x)\eta(x)dx \geqslant \frac{a}{2}\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1}(x-\bar{x}_0)^2(x-\bar{x}_1)^2dx > 0,$$

与假设矛盾，因而必有 $y(x)\equiv 0$。

推论 1 上述基本引理中的 $\eta(x)$ 可进一步限制为 K 阶连续可微的任意函数。

推论 2 上述基本引理可推广到多元函数的情况。此时积分区间应变更为积分区域 D，同时应要求函数 η 在区域 D 的边界 ∂D 上取零值。

定理1.1 如果泛函 $v[y(x)]$ 在 $y^*(x)$ 上达到极值，且它的变分 δv 存在，则在 $y^*(x)$ 上必有

$$\delta v = 0。$$

证明 由泛函极值的定义，若 $v[y]$ 在 y^* 上达到极值，则存在 y^* 的一个邻域，对于该邻域内的任一容许函数 y，泛函增量 $\Delta v = v[y] - v[y^*]$ 不变号。再由泛函变分的定义，当变分 δv 存在时，泛函的变分 δv 与函数的变分 $\delta y = y - y^*$ 之间具有线性关系。显然，这种情况下，若要求对任意的足够小的 δy，相应的泛函增量（即泛函的变分）δv 均不变号，则必须有 $\delta v = 0$。

§1.2 欧 拉 方 程

现在考虑这样的问题，即寻找函数 $y^*(x)$ 使泛函

$$v[y] = K[x_0,\ y(x_0);\ x_1,\ y(x_1)] + \int_{x_0}^{x_1} L(x,\ y,\ y')dx \tag{1.10}$$

在其上取极小。这里初始值 x_0, $y(x_0)$ 以及终端值 x_1, $y(x_1)$ 可以是给定的，也可以是自由的。

假定已经得到了 $y^*(x)$，现在来推导它应该满足哪些条件。考虑一个单参数的函数族 $y(x,\ \varepsilon)$，且令 $y(x,\ 0) = y^*(x)$。

定义（弱变分与强变分） 对于给定的小量 δ，函数类

$\{y(x, \varepsilon)\}$中满足条件

$$|y(x, \varepsilon)-y^*(x)|\leqslant\delta \tag{1.11}$$

以及

$$|y'(x, \varepsilon)-y'^*(x)|\leqslant\delta \tag{1.12}$$

的函数 $y(x, \varepsilon)$ 与 $y^*(x)$ 构成的变分称为弱变分。如果放弃条件 (1.12)，即满足条件式 (1.11) 而不要求满足条件式 (1.12) 的那些函数 $y(x, \varepsilon)$ 与 $y^*(x)$ 构成的变分称为强变分。

另外，$y'(x)$ 间断的地方称为 $y(x)$ 的角点。如果 $y^*(x)$ 具有角点，或者允许 $y(x, \varepsilon)$ 上具有角点，在组成变分 δy 时均将产生强变分。

本节只讨论弱变分的情况，在§1.4中再讨论强变分的情况。

将函数 $y(x, \varepsilon)$ 作为 ε 的函数在 $\varepsilon=0$ 附近展开成泰勒 (Taylor) 级数：

$$y(x, \varepsilon)=y^*(x)+\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\varepsilon+O(\varepsilon^2).$$

记 $\eta(x)=\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$。只考虑到 ε 的一阶项时有

$$y(x, \varepsilon)=y^*(x)+\varepsilon\eta(x)。$$

可见，这时函数 $y(x)$ 的变分是 $\varepsilon\eta(x)=y(x, \varepsilon)-y^*(x)$，记为 $\delta y(x)$，这里 x 是参数。

现在来求由式 (1.10) 给出的泛函 $v[y]$ 的变分。当 L 是 y 及 y' 的可微函数时，用类似于微分运算的变分运算法则可以得到

$$\delta v=dK+[Ldx]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)\delta y+\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta y'\right\}dx。 \tag{1.13}$$

由于 $\delta y=\varepsilon\eta$，而 $\delta y'=y'(x, \varepsilon)-y'^*(x)=\varepsilon\eta'$，因而

$$\delta y'=\frac{d}{dx}(\delta y).$$

这样，由分部积分规则可得

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta y' dx=\left[\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta y\right]_{x_0}^{x_1}$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta y dx。$$

将上式代入式（1.13）得到

$$\delta v=dK+\left[Ldx+\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta y\right]_{x_0}^{x_1}$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}\right\}\delta y dx。\qquad(1.14)$$

图 1.1 中画出了函数 $y(x)$ 在终端处的变分与微分之间的关系。可以看出，如果终端 x_1 是自由的，那末考虑到一阶小量时有

$$dy(x_1)=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x_1}dx_1+\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}d\varepsilon=y'(x_1)dx_1+\delta y(x_1)。$$
$$(1.15)$$

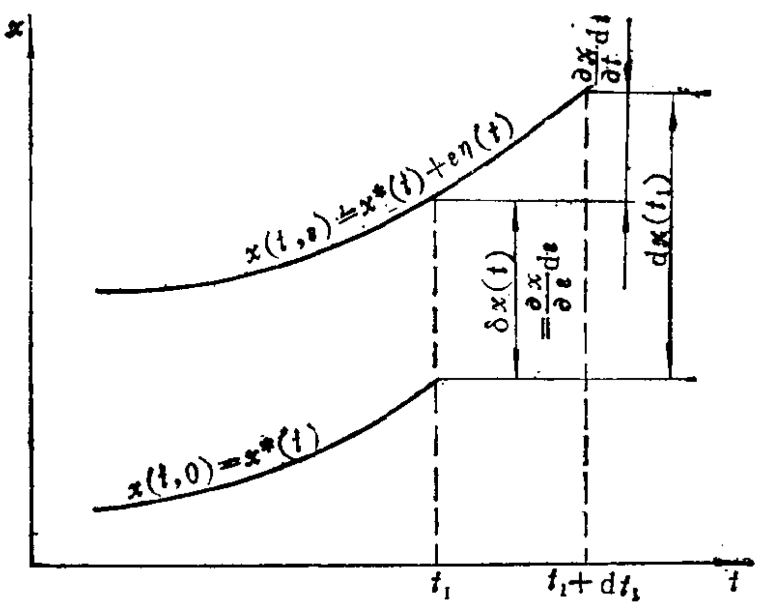

图1.1　终端处函数 $y(x)$ 的变分与微分的关系

类似地，若初始端 x_0 是自由的，就有

$$dy(x_0)=y'(x_0)dx_0+\delta y(x_0)。\qquad(1.16)$$

将式（1.15）以及（1.16）代入式（1.14），有