考研数学教程

第三册

《线性代数、概率论和复变函数》

李安贵 吴檀
秦明达 李忠祥 编

气象出版社

（京）新登字046号

内 容 简 介

本书是按照国家教委近几年颁布的《工学硕士研究生入学考试数学考试大纲》和《经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲》的要求编写的，也是在多次举办的考研辅导班的教学实践基础上逐步形成的。

本书分三册出版。第一册为《一元微积分和微分方程》(气象出版社，1992年6月出版)，第二册为《多元微积分和无穷级数》(气象出版社，1992年10月出版)，第三册为《线性代数、概率论和复变函数》。书末均附有习题答案或提示。

本书通过各部分的内容提要、典例分析和习题，针对各类考生的薄弱环节，加强了对数学基本概念和基本理论的理解与掌握；特别注意培养考生在灵活运用和综合运用方面的能力，以期在较短时间内尽快达到考研的要求。

本书适用于报考工学和经济学硕士研究生的各专业考生，也可作为高等理工院校本科和大专的数学教学参考书或工程技术人员的自学用书。

考研数学教程
第 三 册
《线性代数、概率论和复变函数》
李安贵　吴　檀
秦明达　李忠祥　编
责任编辑：黄丽荣　终审：顾仁俭
封面设计：黄　健　责任技编：都　平　责任校对：王　旭
*
气象出版社出版
（北京西郊白石桥路43号）
北京市燕山联营印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行　全国各地新华书店经销
*
开本：850×1168　1/32　印张：8.75　字数：220千字
1993年8月第一版　1993年8月第一次印刷
印数：1—6000　定价：6.60元
ISBN 7-5029-1322-X/O·0024

序　言

这套考研数学教程是按照国家教委近几年颁布的《工学硕士研究生入学考试数学考试大纲》和《经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲》的要求编写的。为了便于教师和不同类型的考生使用，这套教程分为以下三册出版：

第一册：《一元微积分和微分方程》；

第二册：《多元微积分和无穷级数》；

第三册：《线性代数、概率论和复变函数》。

这套教程是在多次举办的考研辅导班的教学实践基础上形成的，目的是帮助考生在较短时间内系统地复习、巩固并适当加宽、加深在大学本科所学的数学知识；进一步能够灵活地、综合地加以运用，使解题能力有较明显地提高，尽快达到上述大纲的要求。在教学中，我们常常发现：许多考生一方面陷于盲目地、大量地作题，甚至片面追求难题，而忽视对于数学基本概念、基本理论的正确理解和掌握；另一方面又不善于从解题过程中概括和提炼出典型方法和常用技巧，更不注意有意识地提高自己灵活运用和综合运用方面的能力，这样就很难使深造的良好愿望变为现实。

针对这些情况，在这套教程中，我们首先加强了对于数学基本概念、基本理论的教学。不仅在各章的内容提要（其中纲目与上述大纲一一对应）中对有关概念和理论进行简要地概括，而且通过典例分析和习题逐步深入和强化，并对错误理解给以澄清。其次，我们特别注意引导考生注重灵活运用和综合运用能力的培养，各部分的典型例题和习题均是从历届硕士生的入学试题或本科使用多年的优秀试题中精选出的，力求以基本灵活题和综合运

用题为主，以少量难题为辅，并在典型例题的解法中，穿插必要的解题思路分析或解后的评注，以深化概念或提炼典型方法，书中带“*”号的题为较难或扩面型的题。

这套教程的第三册：《线性代数、概率论和复变函数》的第十章由李安贵执笔，第十一章由秦明达执笔，第十二章由吴檀执笔。李忠祥参加了本书的修改工作。最后由李安贵统一成稿。

编者们深深感谢我校教务处和研究生院以及应用数学教研室的关心和支持。

由于时间仓促和水平所限，书中一定存在不少缺点和错误，恳请批评指正。

编　者

1993年于北京科技大学

目　录

第十章 线性代数

§ 10.1 行列式

一、内容提要

1. 行列式概念

(1) n阶行列式 记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示n阶行列式，它是$n!$ 项的代数和，即

$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

其中每项是位于D中不同行和不同列的n个数的乘积，$p_1p_2\cdots p_n$是1，2，…，n的一个排列，t是排列$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数。

(2) 代数余子式 在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去，留下来的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}，记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij}叫做元素a_{ij}的代数余子式，元素a_{ij}的代数余子式A_{ij}仅与a_{ij}的位置有关，而与a_{ij}的大小无关。

(3) 转置行列式 行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为行列式D的转置行列式。

2．行列式性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等。

(2) 互换行列式的两行(列)，行列式变号。

(3) 行列式中某行(列)的公因子可以提到行列式符号外面来，亦即用一个数乘以该行列式等于用这个数乘以该行列式中的任意一行(列)。

(4) 若一个行列式中有一行(列)的元素全是零，或有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式为零。

(5) 若两个n阶行列式D_1、D_2除第i行(列)外，其余对应的行(列)完全相等，则D_1+D_2可表成一个n阶行列式，其第i行(列)为D_1与D_2的第i行(列)的和，而其余各行(列)则与D_1(D_2)的完全相同。

(6) 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数，然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变。

3．行列式按行(列)展开

n阶行列式D中的任意一行(列)的各元素a_{ij}与其对应的代数余子式A_{ij}的乘积之和等于D的值；而任意一行(列)的各元素与另一行(列)的代数余子式乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & i=j; \\ 0; & i\neq j. \end{cases} \tag{1}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & i=j; \\ 0, & i\neq j. \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j; \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

(1) 式称为按行展开，(2) 式称为按列展开。

4。克莱姆法则

若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则该方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \ \cdots, \ x_j = \frac{D_j}{D}, \ \cdots, \ x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中$D_j(j=1, 2, \cdots, n)$是将D中第j列元素换成$b_1, b_2, \cdots, b_n$所构成的行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

特别的，当$b_i=0(i=1,2,\cdots,n)$时，如果$D\neq 0$，则方程组(3)只有零解$x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$；反之如果方程组(3)当$b_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$有非零解时，则必须$D=0$。

5. 行列式计算

行列式的基本计算方法有以下几种：

(1) 定义法　即根据n阶行列式的定义直接来计算行列式值的方法.

用定义法易得下面常用的等式：

①对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

②三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots a_{2,n-1} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots a_{n,n-1} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}.$$

注：定义法一般用于理论推导，实际计算很少使用。

（2）目标行列式法　即把欲计算的行列式，利用行列式的性质转化为会求值的行列式(所谓的目标行列式)，从而求得其值。一般地常把三角行列式作为目标行列式。

（3）分裂法　根据行列式的性质，把要计算的行列式拆成若干个同阶行列式之和，然后求出各行列式的值，就可得到原行列式的值。

（4）降阶法　所谓降价法就是应用行列式按行（列）展开定理，把高阶行列式的计算转化为低阶行列式的计算。在具体计算时，总是先结合行列式的性质，把行列式的某行(列)的元素变换成尽可能多的零，然后再展开。这是计算行列式最常用最有效的方法。

（5）归纳法　即运用数学归纳法，归纳地求行列式值的方

法．此方法适用于带有参数的n阶行列式求值，也适合证明某类等式。

（6）析因子法　如果行列式D中有一些元素是变数x（或参变数）的多项式，那么，可以将行列式D当作一个多项式$f(x)$，然后直接地或对行列式施行某些变换，求出$f(x)$的互素线性因式（一次因式），使得$f(x)$与这些线性因式的乘积$g(x)$只相差一个常数k（即$f(x)=kg(x)$），再根据多项式恒等定义，比较$f(x)$与$g(x)$的某一项系数，求出待定常数k，从而获解。对于行列式中有些元素是n个变数的多项式，也可类似处理。

二、典例分析

例1．**计算下列行列式：**

$$(1)\ D=\begin{vmatrix}1&1&2&4\\1&2&0&2\\2&5&3&0\\0&1&1&7\end{vmatrix};\quad (2)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}.$$

解：

$$(1)\ D=\begin{vmatrix}1&1&2&4\\0&1&-2&-2\\0&0&5&-2\\0&0&3&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&4\\0&1&-2&-2\\0&0&1&20\\0&0&0&51\end{vmatrix}=51;$$

$$(2)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&-1&0&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&3\end{vmatrix}=-3.$$

评注：目标行列式法是计算数字行列式的一般方法，可以说用目标行列式法只要细心，总能求出行列式的值，但计算量不一定小。

例2．**计算**

$$D=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

解：此行列式的每一个元素均为两数之和，故可用分裂法来做。

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=b_2\cdots b_n\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{cases} 0, & n>2; \\ (a_1-a_2)(b_2-b_1), & n=2; \\ a_1+b_1, & n=1. \end{cases}$$

例3．计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}.$$

解：方法①归纳法

$n=1$时，$D_1=x+a_1$；

$n=2$时，$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$；

假设$n=k$时，$D_k=x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k$.

而

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{k+1} & a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{k+2}a_{k+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x(x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k)+(-1)^{k+2}(-1)^k a_{k+1}$$

$$=x^{k+1}+a_1x^k+\cdots+a_{k-1}x^2+a_kx+a_{k+1}$$

故 $D_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$。

方法② 降阶法 直接按第n行展开

$$D_n=(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}+(-1)^{n+2}a_{n-1}$$

$$\times\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{2n-1}a_2\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2n}(x+a_1)\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

方法③ 用目标行列式法 当 $x=0$ 时，显然 $D_n=a_n$。当 $x\neq 0$ 时，第1列乘 x^{-1} 加到第2列，然后第2列再乘以 x^{-1} 加到第3列，依次这样做下去，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ A_n & A_{n-1} & \cdots & A_2 & x+A_1 \end{vmatrix}$$

$$=x^{n-1}\left(x+a_1+\frac{a_2}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x_{n-1}}\right)$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

其中 $A_n=a_n$，$A_{n-1}=a_{n-1}+\dfrac{A_n}{x}$，$\cdots$，$A_2=a_2+\dfrac{A_3}{x}$，

$$A_1=a_1+\frac{A_2}{x}=a_1+\frac{a_2}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-1}}.$$

评注：在计算行列式时，注意分析题目的特点，既要学会综合运用已掌握的方法，又要善于在一题多解中择其最简捷的方法加以运用。当然本例还有别的解法，读者不妨想一想。

例4。计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

解：直接按第1列展开，于是有

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2},$$

由此可得下面两个关系式

$$\begin{aligned}D_n-\alpha D_{n-1}&=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}),\\ D_n-\beta D_{n-1}&=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2}).\end{aligned}\qquad(1)$$

在(1)中令n分别为$n-1$，$n-2$，…，3，则有

$$\begin{aligned}D_{n-1}-\alpha D_{n-2}&=\beta(D_{n-2}-\alpha D_{n-3}),\\ D_{n-1}-\beta D_{n-2}&=\alpha(D_{n-2}-\beta D_{n-3}).\end{aligned}\qquad(2)$$

……………………………………………

$$\begin{aligned}D_3-\alpha D_2&=\beta(D_2-\alpha D_1),\\ D_3-\beta D_2&=\alpha(D_2-\beta D_1).\end{aligned}\qquad(n-2)$$

把(2)，…，$(n-2)$公式依次代入(1)式，得

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)$$

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1)$$

又因为 $\qquad D_2-\alpha D_1=\beta^2,\ D_2-\beta D_1=\alpha^2,$

所以 $\qquad D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n,\ D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n,$

于是，若$\alpha\neq\beta$，则$D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$；

若$\alpha=\beta$，则$D_n=(n+1)\alpha^n$。

评注：在此例中，我们把n阶行列式D_n用同样形式的低阶行列式D_{n-1}和D_{n-2}表示出来，然后再用更低阶行列式来表示D_{n-1}与D_{n-2}，依此类推，便可求出D_n。此方法称为间接递推法．这是计算一些行列式的一种有效方法。

例5．计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}.$$

解：方法① 把2，3，…，n列都加到第1列上，然后第1列

提出公因子$x+(n-1)a$，再把第1行的每个元素都乘以-1，分别加到第2，3，…，n行上，便可化为上三角行列式。

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}。$$

方法② 若$x=a$，显然$D_n=0$；若$x\neq a$，将D_n添加一行和一列，构成$n+1$阶行列式，且保持D_n的值不变，即令

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}。$$

然后，将第1行-1倍分别加到第2，3，…，$n+1$行上去，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)^n\begin{vmatrix} 1 & \frac{a}{x-a} & \frac{a}{x-a} & \cdots & \frac{a}{x-a} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$
=(x-a)^n\begin{vmatrix} 1+\dfrac{na}{x-a} & \dfrac{a}{x-a} & \cdots & \dfrac{a}{x-a} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]。
$$

评注：此例中的方法②叫做加边法（或升阶法），即在原行列式的基础上，增添一行一列，使之既保持行列式的值不变，又易于计算。一般所取的"加边"元素是1，0或原行列式中某些适当的元素。需指出的是升阶法较难掌握，因此只有在用其他方法不易解决，或者明显地可用升阶法时才考虑使用。

例6．计算行列式

$$
D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}
$$

解：D的元素$2-x^2$，$9-x^2$是x的多项式，下面用析因子法求解。

令$D=f(x)$。因为$f(\pm 1)=f(\pm 2)=0$，所以$f(x)$有因式$(x\pm 1)$，$(x\pm 2)$且$f(x)$中含有x的最高次数是4，故

$$
f(x)=k(x-1)(x+1)(x-2)(x+2),
$$

其中k为待定常数。

又因为含x^4的项为$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$与$a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$，即$(2-x^2)(9-x^2)$与$-4(2-x^2)(9-x^2)$两项，从而得x^4的系数为-3，所以$k=-3$，故

$$
f(x)=-3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)。
$$

例7．计算n阶范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

解：把D_n看成关于x_1，x_2，…，x_n的多项式，由行列式性质易知：

当$x_n=x_1$，$x_n=x_2$，…，$x_n=x_{n-1}$时，$D_n=0$；

当$x_{n-1}=x_1$，$x_{n-1}=x_2$，…，$x_{n-1}=x_{n-2}$时，$D_n=0$；

一般地，当$x_i=x_j$，$1\leqslant j<i\leqslant n$时，$D_n=0$，故$x_1$，$x_2$，…，$x_n$所有可能的差$x_i-x_j$，$1\leqslant j<i\leqslant n$都是$D_n$的一次因式，另外由行列式的定义可知$D_n$是一个$1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$次齐次多项式，故$D_n$除上述所有一次因式外，不再有其他因式，所以

$$D_n=k\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),$$

其中k为待定常数，因为D_n中$x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}$的系数为1，所以$k=1$。从而

$$D_n=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

例8．证明

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b},$$

其中$f(x)=(x_1-x)(x_2-x)\cdots(x_n-x)$ $(a\neq b)$。

证：令