陶增乐　黄馥林　陈强璋　编

离散数学

（修订版）

LI SAN SHU XUE

LI

SAN SHUXUE

华东师范大学出版社

离散数学

（修订版）

陶增乐　黄馥林　陈强璋　编

华东师范大学出版社

封面设计　高　山

离散数学

（修订本）

陶增乐　黄馥林　陈强璋编

华东师范大学出版社出版发行
（上海中山北路 3663 号　邮政编码 200062）
新华书店上海发行所经销
江苏省句容市排印厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 7　字数 170 千字
1997 年 12 月第 2 版　1997 年 12 月第 1 次印刷
印数 001—2 000 本

ISBN7-5617-0597-2/N·042

定价：10.00 元

内 容 提 要

本书是 1985 年版的原书的修订版。在保持原有特色的基础上，对部分内容作了增删和修改。

全书共七章，介绍了离散数学中关于集合论、代数结构、数理逻辑和图论四个方面的初步知识，选材恰当，叙述严谨，推演完整，举例丰富。每章均配有习题。

本书可作为理工和师范类大专院校计算机专业的离散数学教材，也可供从事计算机或相关专业工作的工程技术人员作为参考用书。

前　　言

离散数学是以离散量作为研究对象的那些数学分支的总称，它并不是数学中的一个独立分支。只是因为计算机科学技术的飞速发展，才使离散数学日益显示出它的重要地位。从计算机科学理论、计算机系统结构、计算机软件、到计算机应用，无一不以离散数学作为理论基础和数学工具。正因如此，离散数学已成为计算机专业的主干课程之一。

本教材是作者根据 1985 年版原教材重新编写而成。在重写过程中，我们力求保持原书叙述严谨的风格，以帮助学生提高抽象思维能力和逻辑推理能力，为他们进一步学习计算机学科的专业课打下坚实的数学理论基础，也为他们迎接未来计算机科学技术的挑战作些必要的理论储备。同时，我们也根据采用过原书的同行意见，对部分内容作了压缩，对有的章节进行了重新组织。全书共分七章，基本内容为集合论、代数结构、数理逻辑和图论四大部分，全部讲授约需 72 学时。每章均配有难度不等的习题，供学生课后练习巩固之用。由于学时数所限，那些重要而没有包括在本书中的内容(如组合学)建议另设选修课继续讲授。

由于我们水平所限，错误和不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　　者

1996 年

目　　录

第一章　集合论……………………………………1
§1　基本概念……………………………………1
§2　集合的运算……………………………………4
§3　幂集……………………………………10
§4　n元组和笛卡尔乘积……………………………………12
§5　一一对应……………………………………13
§6　可列集……………………………………16
§7　无限集……………………………………22
第二章　关系和映射……………………………………33
§1　关系和映射……………………………………33
§2　关系的运算……………………………………37
§3　具有某些特殊性质的关系……………………………………43
§4　等价关系……………………………………45
§5　部分序关系……………………………………48
第三章　格和布尔代数……………………………………59
§1　代数系统及其同构……………………………………59
§2　格……………………………………65
§3　作为代数系统的格……………………………………72
§4　有界格、有补格、分配格和模格……………………………………75
§5　布尔代数……………………………………82
第四章　半群与群……………………………………99
§1　半群与单元半群……………………………………99
§2　群的定义及其基本性质……………………………………102
§3　子群……………………………………105

§4 循环群………………………………………… 107
§5 变换群………………………………………… 111
第五章 商群 …………………………………… 116
§1 同余关系和商代数………………………… 116
§2 陪集和拉格朗日定理……………………… 120
§3 正规子群和商群…………………………… 123
第六章 数理逻辑 ……………………………… 130
§1 命题演算…………………………………… 130
§2 命题演算的推理理论……………………… 139
§3 定理的自动证明…………………………… 146
§4 谓词演算…………………………………… 154
§5 谓词演算的推理理论……………………… 163
第七章 图论 …………………………………… 173
§1 引论………………………………………… 173
§2 基本概念…………………………………… 176
§3 路径问题…………………………………… 189
§4 树…………………………………………… 197
§5 平面图……………………………………… 204

第一章　集　合　论

集合是数学中的一个重要概念，有关集合论的最早文献是康托尔(G·Cantor)在十九世纪末叶发表的. 很多数学家认为，所有的数学都可以用集合论中的术语来描述. 我们对集合论感兴趣，除了它在现代数学中的重要作用外，还因为它在为计算机科学某些领域中的问题建立数学模型及进行深入探讨时，集合论是十分有用的工具.

§1　基本概念

集合是一个原始的数学概念，它的严谨定义属于数学的一个分支——公理集合论的研究范围，这里只给出集合的一种描述. 我们把在某种特定的场合下考察研究的所有对象视为一个整体，这个整体称为**集合**. 考察的对象(又称个体)称为该集合的**元素**. 集合有时简称为**集**.

例如，某校学生组成的集合，平面上所有直角三角形组成的集合以及1、2、3、4和5五个自然数组成的集合. 还有大家熟悉的自然数集、整数集、有理数集和实数集等等.

今后用大写的带下标或不带下标的英文字母表示集合，用小写的带下标或不带下标的英文字母表示个体. 并且约定N、I、Q和R分别表示自然数集、整数集、有理数集和实数集.

若x是集合A的元素，那么称**x属于A**，记为$x\in A$. 反之，若x不是A的元素，称**x不属于A**，记为$x\bar{\in}A$. 例如，$3\in N$，$0\bar{\in}N$，$\sqrt{2}\bar{\in}Q$，$\sqrt{2}\in R$.

设 n 为某个自然数，由 n 个个体$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合称为**有限集**，记为$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. 这种表示有限集的方法称为枚举法. 不是有限集的集合称为**无限集**. 也可以使用在花括号内列举其元素的方法表示某些无限集. 例如，自然数集可以表示为$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$，偶数集可以表示为$\{2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$.

一般，通过指出集合中的元素所具有的性质来表示集合. 如果集合 A 中的元素具有性质p，不是集合中的元素都不具有性质p，也就是说 A 是所有具有性质 p 的元素组成的集合，这时，将 A 表示为

$$\{x | p(x)\}$$ *).

例如，

$$\{x | x \in \mathrm{R} \text{ 且 } 0 < x < 1\}$$

表示开区间$(0,1)$上的一切实数组成的集合.

$$\{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n | n \in \mathrm{N}, \text{当 } 0 \leqslant i \leqslant n \text{ 时}, a_i \in \mathrm{I}\}$$

表示所有整系数多项式组成的集合. 对于某个自然数n，

$$\{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n | \text{ 当 } 0 \leqslant i \leqslant n \text{ 时 } a_i \in \mathrm{I}\}$$

表示次数不大于 n 的整系数多项式组成的集合. 而

$$\{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n | \text{ 当 } 0 \leqslant i \leqslant n \text{ 时 } a_i \in \mathrm{I} \text{ 且 } a_0 \neq 0\}$$

表示 n 次整系数多项式组成的集合. 不难看出

$$\{x | x \in \mathrm{R} \text{ 且 } x^2 + 1 = 0\}$$

不含任何元素. 不含任何元素的集合称为**空集**，空集记为$\varnothing$. 而所谓**全称集合**是由考察的全体对象组成的集合，今后，用E表示全称集合.

定义 1.1 若集合 A 和 B 包含相同的元素，则称 A 和 B **相等**，记为 $A = B$. □

例如，

$$\{3, 4, 5\} = \{5, 4, 3\},$$

---

*) $p(x)$称为**谓词**，对于任意的元素 x，必有 $p(x)$成立或不成立. 这种表示集合的方法称为**谓词表示法**.

$$\{x|x^2-1=0\}=\{-1,1\},$$
$$\{x|\sin x=0\}=\{n\pi|n\in \mathrm{I}\}$$
$$=\{0,\pi,-\pi,2\pi,-2\pi,\cdots,n\pi,-n\pi,\cdots\}.$$

定义 1.2 若集合 A 中的元素均属于集合 B，则称 A 是 B 的**子集**或称 B **包含** A，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$。

若 A 是 B 的子集且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**，记为 $A\subset B$。 □

例如，因为每个自然数都是整数，而有些整数不是自然数，所以，N 是 I 的子集，而且 N 是 I 的真子集，亦即 $\mathrm{N}\subset\mathrm{I}$。

我们规定，空集是任何集合的子集。而集合 A 是全称集合 E 的子集，即

$$\varnothing\subseteq A\subseteq E.$$

$\varnothing$ 和 A 称为 A 的两个平凡子集。

图 1-1 和 1-2 表示 $A\subseteq B$ 和 $A\nsubseteq B$，其中的矩形代表全称集合 E，圆周内点的全体表示所指定的集合。这种图形称为**文氏图**。

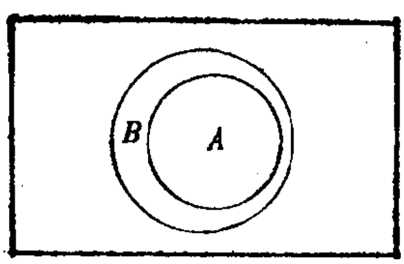

图 1-1

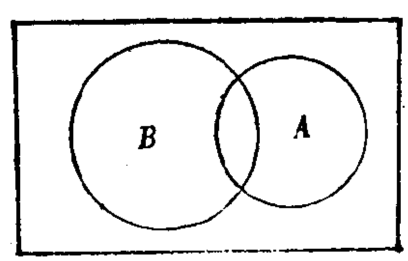

图 1-2

定理 1.1 集合之间的包含关系具有下列性质：

(i) $A\subseteq A$（自反性）；

(ii) 若 $A\subseteq B$、$B\subseteq A$，则 $A=B$（反对称性）；

(iii) 若 $A\subseteq B$、$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$（传递性）。

这里，A、B、C 是任意的集合。

证明留作练习，其中的反对称性是证明两个集合相等的重要方法。

值得注意的是，一个集合可以是另一个集合的元素，例如，$\{a,\{b\}\}$包含两个元素，其中一个元素是以 b 为元素的集合$\{b\}$，$\{\varnothing\}$是以空集$\varnothing$为元素的单元素集．不难看出，

$$\{a,\{b\}\}\neq\{a,b\},$$

$$\{a,\{b\}\}\subset\{a,b,\{b\}\},$$

$$\{\varnothing\}\neq\varnothing,$$

$$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}.$$

特别，一个集合的所有元素可以都是集合．为了避免过多地使用集合这个词，把由一些集合组成的集合称为**集合族**．

例如，对任意的自然数 n，$A_n=\{x|0<x<1+\frac{1}{n}\}$．则

$$\{A_n|n\in \mathrm{N}\}$$

是以自然数集 N 为下标集，以 A_n 为元素的集合族．对任意 $x\in(0,1)$，令 $A_x=\{x\}$，则

$$\{A_x|x\in(0,1)\}$$

是以集合$(0,1)$为下标集，以 A_x 为元素的集合族．

特别，当 $A_1=\{1\}$，$A_2=\{2\}$时，$\{A_1,A_2\}$视为以$\{1, 2\}$为下标集，以 A_1、A_2 为元素的集合族．

一般讲，若 $\beta\in B$ 时，A_β 是一个集合，那么称

$$\{A_\beta|\beta\in B\}$$

是一个以 B 为下标集的集合族．值得注意的是，当 $\beta_1\neq\beta_2$ 时，允许 $A_{\beta_1}=A_{\beta_2}$．

§2 集合的运算

定义 2.1 由两个集合 A 与 B 的所有元素组成的集合称为 A、B 的**和集**，记为 $A\cup B$；由 A 和 B 的公共元素组成的集合称为 A、B 的**交集**，记为 $A\cap B$；属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 关于 B 的**差集**，记为 $A-B$．特别，称 $E-A$ 为 A 的**补集**，

记为 $\bar{A}$。也就是说，

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$
$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$
$$A-B=\{x|x\in A \text{ 但 } x\,\bar{\in}\,B\};$$
$$\bar{A}=\{x|x\,\bar{\in}\,A\}.$$ □

图 1-3 和 1-4 中阴影区域分别是 $A\cup B$、 $A\cap B$ 的文氏图表示，图 1-5 和 1-6分别是 $A-B$ 和 $\bar{A}$ 的文氏图表示。

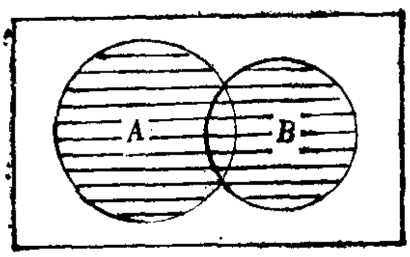

图 1-3

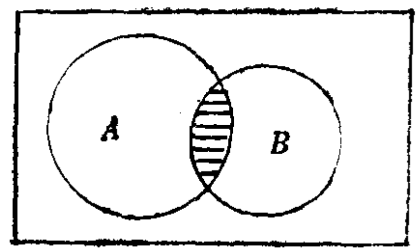

图 1-4

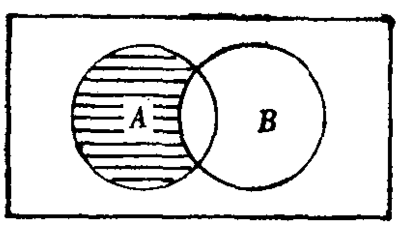

图 1-5

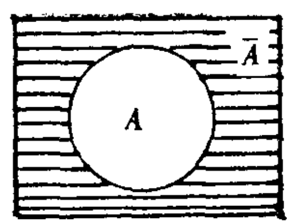

图 1-6

例 1

$$\{1,2\}\cup\{5,6\}=\{1,2,5,6\},$$
$$\{1,2\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\},$$
$$\{1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\},$$
$$\{1,2\}\cap\{5,6\}=\varnothing,$$
$$\{1,2\}-\{2,3\}=\{1\},$$
$$\{1,2\}-\{5,6\}=\{1,2\},$$
$$\{1,2\}-\{1,2,3\}=\varnothing.$$

若 E 为 $\mathbf{N}$，则

$$\overline{\{1,2\}}=\mathbf{N}-\{1,2\}=\{3,4,5,6,\cdots\}.$$

通常，当 $A\cap B=\varnothing$ 时，称 A 与 B 不相交。

定理 2.1 若 $A\subseteq B$，则 $A\cup C\subseteq B\cup C$，$A\cap C\subseteq B\cap C$。

定理 2.1 的证明留作练习。

定理 2.2 集合的和、交运算具有下列性质：

(i) $A\cup A=A$ （和的幂等律），

$A\cap A=A$ （交的幂等律）；

(ii) $A\cup B=B\cup A$ （和的交换律），

$A\cap B=B\cap A$ （交的交换律）；

(iii) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ （和的结合律），

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ （交的结合律）；

(iv) $A\cup(A\cap B)=A$ （和的吸收律），

$A\cap(A\cup B)=A$ （交的吸收律）；

(v) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ （和关于交的分配律），

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ （交关于和的分配律）。

证 幂等律与交换律可以从和、交运算的定义直接推出。下面证明求和运算的另外三种性质。其余的证明留作练习。

首先证明和的结合律。

如果 $x\in A\cup(B\cup C)$，那么 $x\in A$ 或 $x\in B\cup C$，而 $x\in B\cup C$ 表示 $x\in B$ 或 $x\in C$。所以，若 $x\in A\cup(B\cup C)$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$ 或 $x\in C$，亦即 $x\in A\cup B$ 或 $x\in C$，从而 $x\in(A\cup B)\cup C$，于是证得

$$A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C.$$

同理可证

$$A\cup(B\cup C)\supseteq(A\cup B)\cup C.$$

所以，由集合间包含关系的反对称性证得

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C.$$

现在证明和的吸收律：

若 $x\in A\cup(A\cap B)$，则 $x\in A$ 或 $x\in A\cap B$，从而 $x\in A$，所以

$$A\cup(A\cap B)\subseteq A,$$

由和集的定义

$$A\subseteq A\cup(A\cap B),$$

所以 $$A\cup(A\cap B)=A.$$

最后证明和关于交的分配律：

若 $x\in A\cup(B\cap C)$，则 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$.

当 $x\in A$ 时，$x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$，从而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

当 $x\in B\cap C$ 时，$x\in B$ 且 $x\in C$，于是 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$，从而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

综上所述，当 $x\in A\cup(B\cap C)$ 时，有 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，亦即

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

反之，若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$. 这样，当 $x\notin A$ 时，$x\in B$ 且 $x\in C$，所以 $x\in A\cup(B\cap C)$. 于是

$$A\cup(B\cap C)\supseteq(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

从而证得

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$ □

定理 2.3 对任意一个集合 A，恒有：

(i) $A\cup\overline{A}=E$;

(ii) $A\cap\overline{A}=\varnothing$;

(iii) $\overline{(\overline{A})}=A$.

证明留作练习.

定理 2.4 对任意的集合 A、B，恒有：

(i) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;

(ii) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证 (i)若 $x\in\overline{A\cup B}$，则 $x\notin A\cup B$，亦即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，也就是说，$x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$，从而 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$，于是证得

$$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}.$$

反之，若 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$，则 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$，亦即 $x\notin A$，$x\notin B$，也就

是说，$x\overline{\in} A\cup B$，从而 $x\in\overline{A\cup B}$，于是证得

$$\overline{A\cup B}\supseteq\overline{A}\cap\overline{B}.$$

所以

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

(ii) 若 $x\in\overline{A\cap B}$，则 $x\overline{\in} A\cap B$，这时 $x\overline{\in} A$ 或 $x\overline{\in} B$，亦即 $x\in\overline{A}$ 或 $x\in\overline{B}$，也就是说，$x\in\overline{A}\cup\overline{B}$。因此

$$\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}.$$

反之，若 $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$，则 $x\in\overline{A}$ 或 $x\in\overline{B}$，也就是说，$x\overline{\in} A\cap B$，从而 $x\in\overline{A\cap B}$。因此，

$$\overline{A\cap B}\supseteq\overline{A}\cup\overline{B}.$$

从而证得 $$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$ □

定理 2.4 所述的性质称为取补运算的 德·摩 根(De·Morgan)定律。

上述定理 2.2～2.4 利用恒等式描述了集合运算的性质，利用它们可以进一步得到集合运算的其它一些性质。

例 2 对任意三个集合 A、B 和 C，有

$$A\cup((A\cap B)\cap(A\cup C))=A.$$

证 左式 $=(A\cup(A\cap B))\cap(A\cup(A\cup C))$ （$\cup$ 关于 $\cap$ 的分配律）

$=A\cap(A\cup(A\cup C))$ （$\cup$ 的吸收律）

$=A$（右式）。 （$\cap$ 的吸收律） □

例 3 对任意三个集合 A、B 和 C，有

$$A\cap((A\cup B)\cup(A\cap C))=A.$$

证 左式 $=(A\cap(A\cup B))\cup(A\cap(A\cap C))$ （$\cap$ 关于 $\cup$ 的分配律）

$=A\cup(A\cap(A\cap C))$ （$\cap$ 的吸收律）

$=A$（右式）。 （$\cup$ 的吸收律） □

例 2 是依次利用了 $\cup$ 关于 $\cap$ 的分配律、$\cup$ 的吸收律和 $\cap$ 的吸收律证明了所述的等式，而例 3 依次是利用了 $\cap$ 关于 $\cup$ 的分配律、

$\cap$ 的吸收律和 $\cup$ 的吸收律证明了所述的等式. 而且在例 2 和例 3 所述的等式中将其中的 $\cup$、$\cap$ 分别替换成 $\cap$、$\cup$ 之后就转化成另一个等式. 另外, 定理 2.2~2.4 中所述的十五个等式除 $\overline{\overline{A}}=A$ 之外, 都是成对出现的. 在这样的一对等式中, 将 $\cup$、$\cap$、$\varnothing$ 和 E 分别替换为 $\cap$、$\cup$、E 和 $\varnothing$, 则从一个等式转化为另一个等式. 注意到上述的事实, 我们可以得到《集合运算的对偶原理》.

若 P 是至多包含和、交和取补三种集合运算[*] 的命题, P^* 是将 P 中的 $\cup$、$\cap$、$\varnothing$ 和 E 分别替换为 $\cap$、$\cup$、E 和 $\varnothing$ 而得到的命题, 则称 P 与 P^* 是互为对偶的命题. 集合运算的对偶原理是指: P 为真当且仅当 P^* 为真. 若 $P=P^*$, 则称 P 为**自对偶命题**.

读者不难找出定理2.2和定理2.3中所列出的互为对偶命题与自对偶命题.

下面引入集合族上的和、交运算的定义.

定义 2.2 由集合族 $\{A_\beta|\beta\in B\}$ 中每个集合的元素组成的集合称为此集合族的**和集**, 记为 $\bigcup\limits_{\beta\in B}A_\beta$. 属于集合族中每个集合的元素组成的集合称为此集合族的**交集**, 记为 $\bigcap\limits_{\beta\in B}A_\beta$. 也就是说

$$\bigcup_{\beta\in B}A_\beta=\{x|\text{存在 }\beta\in B\text{ 使 }x\in A_\beta\};$$

$$\bigcap_{\beta\in B}A_\beta=\{x|\text{对任意 }\beta\in B, x\in A_\beta\}. \qquad \square$$

例 4 当 $n\in \mathrm{N}$ 时, $A_n=\left\{x|0<x<1+\frac{1}{n}\right\}$, 那么

$$\bigcup_{n\in \mathrm{N}}A_n=\{x|0<x<2\};$$

$$\bigcap_{n\in \mathrm{N}}A_n=\{x|0<x\leqslant 1\}.$$

例 5 当 $\beta\in B$ 时, $A_\beta=\{\beta\}$, 那么

$$\bigcup_{\beta\in B}A_\beta=B,$$

---

*) 由于 $A-B=A\cap\overline{B}$, 所以可利用求交和取补运算来表示差运算.

$$\bigcap_{\beta\in B} A_\beta=\begin{cases} B, & B\text{ 为单元素集,}\\ \varnothing, & B\text{ 非单元素集.}\end{cases}$$

有时，$\bigcup_{n\in\mathrm{N}} A_n$ 和 $\bigcap_{n\in\mathrm{N}} A_n$ 分别记为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 和 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$。

§3 幂 集

定义 3.1 由集合 V 的所有子集组成的集合称为 V 的幂集，记为 $P(V)$。也就是说，

$$P(V)=\{A\,|\,A\subseteq V\}. \qquad \square$$

由定义可知：$\varnothing\in P(V)$，$V\in P(V)$。而且 $A\in P(V)$ 当且仅当 $A\subseteq V$。

例 6 $P(\mathrm{N})$ 表示自然数集 N 的幂集，那么

$$\{1\}\in P(\mathrm{N}),$$
$$\{2,4\}\in P(\mathrm{N}),$$
$$\{1,3,5,7,\cdots,2n-1,\cdots\}\in P(\mathrm{N}),$$
$$\{\{1\},\{2,4\},\{1,3,5,7,\cdots\}\}\subseteq P(\mathrm{N}).$$

例 7

$$P(\varnothing)=\{\varnothing\},$$
$$P(\{a\})=\{\varnothing,\{a\}\},$$
$$P(\{a,b\})=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}.$$

一般，若 V 是 n 个元素组成的有限集，那么 $P(V)$ 由 2^n 个元素组成(见定理 3.2)。

引理 3.1 若 $a\notin W$，$V=W\cup\{a\}$，则

$$P(V)=P(W)\cup\{A\cup\{a\}\,|\,A\in P(W)\}.$$

证 令

$$T=\{A\cup\{a\}\,|\,A\in P(W)\},$$

也就是说，T 是将 W 的每一个子集添加元素 a 之后得到的集族。因此，