高等学校试用教材

3

数学分析

北京大学数学系 廖可人 李正元 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

数学分析

第三册

北京大学数学系

廖可人 李正元 编

高等教育出版社

本书是北京大学数学系编《数学分析》一书的第三册（全书共三册，另配备习题集一册）。内容包括多元函数微分学，积分学，含参变量积分及场论。微分形式和斯托克斯公式作为附录。

对多元函数微积分，本书较传统讲法有较多改变。直接讲$m(m\geqslant 2)$元情形，将向量函数的应用贯穿于全书，加强了与线性代数的联系.本书内容丰富，理论严谨，既重视加强多元微积分的基本理论，又重视其计算能力的培养.

本书经欧阳光中副教授、董延闿教授审查，可作综合大学、师范院校数学系学生的试用教材或教学参考书.

高等学校试用教材

数 学 分 析

第 三 册

北京大学数学系 廖可人 李正元 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张14.125 字数341 000

1986年10月第1版 1988年1月第3次印刷

印数 9 731—20 730

ISBN7-04-001216-2/O·366

定价 2.35元

前　　言

北京大学数学系编的《数学分析》分三册出版. 第一册由方企勤副教授编写,第二册由沈燮昌教授编写,本书是第三册, 内容包括多元函数的微分学和积分学,还有含参变量的积分.

本书是我们在北京大学数学系多年讲授《数学分析》课的基础上编写成的. 我们力图使本书在微积分教学现代化方面有较充分而恰当的体现,使它既适应于现代科学技术和数学发展的需要,又切合我国的实际教学情况.

本套《数学分析》教材仍按原来的传统, 先讲一元函数微积分学(第一册和第二册),然后再讲多元函数微积分学,由浅入深, 便于学生掌握. 但是,对于多元函数, 我们没有按过去的习惯讲法, 从二元、三元讲起, 再过渡到 $m(m\geqslant4)$ 元, 而是直接讲 $m(m\geqslant2)$ 元. 不仅多元微分学是这样,多元积分学也是这样. 实践证明,只要对 $m(m\geqslant2)$ 维欧氏空间的完备性, 空间中点集的列紧性、紧致性和连通性等性质作了比较深入的阐述,使学生对 $m(m\geqslant2)$ 维与一维欧氏空间之间的异同有一个比较清楚的认识, 直接讲 $m(m\geqslant2)$ 元是可行的. 这不仅节省了教学时间, 更重要的是适应于发展的前景, 使读者更容易从欧氏空间过渡到度量空间以及更一般的拓扑空间中去.

本书对向量函数极为重视,不仅增加了这方面的内容,而且将其应用贯穿于全书之中. 在向量函数微分学这一章(第十七章)里,用线性变换定义向量函数的导数,这是古典微积分中导数概念的深化和发展, 有利于学生掌握导数概念的实质和应用. 在此基础上,我们用压缩映象原理证明反函数的存在和可微定理,并由此

推出隐函数的存在和可微定理. 显然，这一部分内容相对来说较为抽象，不够直观，难度稍大一些，初学者不容易掌握. 为此，在讲授这些内容之前，在第十六章里先讲了多元数值函数的微分学，还用几何直观较强的方法证明了由一个方程式确定的隐函数存在和可微定理，为学生学习向量函数微分学铺设阶梯和桥梁，循序渐进，逐步提高到预定的理论高度. 这样做，免不了有一些重复，但这不是简单重复，而是螺旋式地上升.

在多元积分学这一章(第二十章)里，我们简要地介绍了若当测度及其主要性质. 我们所以要增加这一部分的内容，一方面是由于我们直接讲 $m(m\geqslant2)$ 重积分，若当测度是不可少的；另一方面也是由于若当测度本身有许多可取之处. 若当测度是各种测度中最简单而直观的一种，容易为初学者接受和掌握. 应用若当测度，可以明确给出重积分中许多定理成立的条件，并简化定理的证明. 先在分析课中讲若当测度，在实变函数等后续课程再讲勒贝格测度和抽象测度，学生就有可能对各种测度之间进行分析对比，加深对测度概念实质的认识，了解各种积分之间差异的由来.

对于 $m(m\geqslant2)$ 重积分的变量替换公式，我们给出了公式成立的两个充分条件，并给予严格的证明. 这两个定理的证明是在向量函数微分学的基础上进行的. 我们先介绍正则变换及其性质，然后证明在最简单的正则变换下重积分的变量替换公式成立，再利用一般的正则变换可以局部地分解为最简单的正则变换的复合来证明一般的变量替换公式. 这样做，一方面通过运用可以巩固和加强向量函数微分学的基础；另一方面可以明确认识作变量替换时要满足的条件，灵活而又准确地运用公式计算m重积分. 显然，如果在讲授这两个变量替换定理之前，先介绍单位分解这一近代分析的重要概念，利用单位分解定理来证明这两个定理，不仅可以简化这两个定理的证明，而且更接近于流形上的积分的处理方

法，只是考虑到教学大纲的要求和学时的限制，我们没有这样做。

按照教学大纲的要求，我们不讲流形及流形上的微积分，仍按传统，只讲 R^3 中的曲线积分和曲面积分，但是场论在数学分析课中是十分重要的内容，需要加强. 我们在从物理意义引进场论的散度和旋度概念时作了比较深入细致的分析. 为了突出高斯公式和斯托克斯公式的物理意义，这两个公式都放在场论中讲授，都是先从直观引出，再作严格的证明. 考虑到 R^2 中格林公式的证明是比较典型的，这一公式又是斯托克斯公式证明的基础，我们在曲线积分这一章里(第二十一章)先讲这一公式，让学生预先熟悉这一公式的证明和应用。

本书在加强多元微积分理论的同时，对多元微积分的计算也给予高度的重视，选取了一定数量的例题，细致分析解题的典型方法和技巧，作为示范.

考虑到有一些不学流形上的微积分的读者阅读近代文献资料的需要，我们特编写了"微分形式和斯托克斯公式"作为附录.

使用本书进行教学时，可以根据学时和学生的水平灵活掌握要求，根据实际情况对内容进行删节和改变讲法. 例如，凡是有 * 的章节可以略去；对于隐函数存在定理的证明，可以重点讲用一个式子确定的隐函数；对于重积分变量替换定理，可以只讲二重积分替换公式的证明；对于重积分的计算，只限于二、三重积分等等.

本书的初稿，第十五章至第十九章由李正元编写，第二十章至第二十三章由廖可人编写. 附录的初稿由方企勤提供，廖可人改编和补充.

方企勤副教授除了提供附录的初稿之外，还对本书正文作过修改，沈燮昌教授具体负责本套书编写的组织和审定工作，对本书提过不少宝贵意见，欧阳光中副教授和董延闿教授在审阅本书时也提出许多宝贵意见，高教出版社的责任编辑文小西同志为本书

的出版做了许多深入细致的工作．我们在此谨向他们致以衷心的谢意．

由于编者水平所限，书中难免有不妥或错误之处，敬请读者赐教指正。

编　　者

1985年9月于北京大学数学系

目　录

第十五章　欧氏空间与多元函数

至今我们只讨论过一元函数 $y=f(x)$，就是说函数关系中只包含一个自变量和一个因变量. 在客观世界中，事物的变化是复杂的，是由各方面的因素决定的，只是在某些特定情况下不需要考虑多种事物和多种因素的联系，而只注意一个事物和某一因素的联系. 这时，事物的运动和变化规律才可表成一元函数. 但在实际中，我们经常要考虑多种事物与多种因素的联系，因此有必要把函数概念从一个自变量与一个因变量的情形推广到多个自变量与多个因变量的情形，这就是多元函数.

从这章起我们开始讨论多元函数. 多元函数的定义域与值域是欧氏空间中的点集，为了讨论多元函数，我们必须先了解欧氏空间的基本概念与性质.

§1　m 维欧氏空间

1.1　m 维向量空间

m 个有顺序的实数组 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 称为一个 m 维点，记作

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_m) \text{ 或 } x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

m 维点的全体构成的集合称为 m 维点空间，简称为 m 维空间.

m 维空间中的一个点又可称为一个 m 维向量，$x_i(i=1,2,\cdots,m)$ 称为向量 x 的分量. 对 m 维向量的全体组成的集合可以引进加法和数量乘法而成为 m 维线性空间，称为**m 维向量空间**，记作

R^m.

为了矩阵运算方便，我们用一列m行矩阵表示m维向量，即

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}.$$

例如，$A=(a_{ij})$是$m\times m$矩阵，则

$$Ax=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}.$$

以后我们常常用一个字母表示m维向量，而相应的带下标的字母表示它的分量．如

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}.$$

有时我们也用带一个下标的字母表示m维向量，那么相应的带两个下标的字母就表示它的分量．如

$$x_0=\begin{pmatrix}x_{0,1}\\x_{0,2}\\\vdots\\x_{0,m}\end{pmatrix},\qquad x_n=\begin{pmatrix}x_{n,1}\\x_{n,2}\\\vdots\\x_{n,m}\end{pmatrix}.$$

也可以用不同的字母表示向量的分量．如

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

等．

如果我们只是称呼一个向量而又必须指明它的分量时，常常将它横写为

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m),\quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_m),$$

这样在书写上就省了很多篇幅.

元素 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in R^m$，一方面 x 可以看作是以 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为分量的向量，另一方面 x 又可以看作是以 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为坐标的点.

R^m 空间中常用的一组基是:

$$e_1=(1,0,0,\cdots,0),e_2=(0,1,0,\cdots,0)\cdots$$

$$e_m=(0,\cdots,0,1).$$

即 $e_i\in R^m$，它仅第 i 个分量为 1，其余分量均为零. 任意 $x=(x_1,\cdots,x_m)\in R^m$ 可表为 $x=\sum\limits_{i=1}^{m}x_ie_i$.

我们用 θ 表示 R^m 中的零向量.

1.2　m 维欧氏空间

在 R^m 中可以引进向量的内积.

定义 1　对于 R^m 中的任意两个向量

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m),\quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_m),$$

我们称 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_iy_i$ 为 x 与 y 的**内积**，记为 (x,y) 或 $x\cdot y$.

由定义知，上述定义的内积有以下基本性质:

1°　$(x,y)=(y,x)$;

2°　$(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$;

3°　$(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;

4°　$(x,x)\geqslant 0$, $(x,x)=0$ 的充要条件是: $x=\theta$.

内积的其它性质可由它们推出.

由内积的定义，可得重要不等式(哥西不等式):

$$(x,y)^2 \leqslant (x,x)(y,y). \tag{1}$$

事实上，因

$$(x+ty,x+ty)=(x,x)+2t(x,y)+t^2(y,y)\geqslant 0,$$

其判别式非正：

$$(x,y)^2-(x,x)(y,y)\leqslant 0.$$

若在 m 维向量空间中又定义了内积，则称这空间为 m **维欧氏空间**，仍记为 R^m.

有了内积还可引进向量的长度与角度.

定义 2 对于任意 $x=(x_1,\cdots,x_m)\in R^m$，称

$$|x|=(x,x)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_1^m x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

为 x 的**范数(长度)**.

易知，上述范数满足：

1° $|x|\geqslant 0$，$|x|=0$ 的充要条件是 $x=0$；

2° $|\alpha x|=|\alpha||x|$，α 为任意实数； (2)

3° 对任意 $x,y\in R^m$，$|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

证明 3°. 由范数的定义及哥西不等式得

$$\begin{aligned}|x+y|^2&=(x+y,x+y)\\&=(x,x)+2(x,y)+(y,y)\\&\leqslant|x|^2+2|x||y|+|y|^2\\&=(|x|+|y|)^2,\end{aligned}$$

于是 $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

引进范数后哥西不等式(1)可表为

$$|(x,y)|\leqslant|x||y|,$$

于是 $\frac{|(x,y)|}{|x||y|}\leqslant 1$. 我们定义

$$\langle x,y\rangle=\arccos\frac{(x,y)}{|x||y|}$$

为 x,y 的**夹角**. 若 $(x,y)=0$,称 x, y 为**正交的**. 因此, $e_1,e_2,\cdots,e_m$ 是两两正交的单位向量,它是 R^m 中的**单位正交基**.

有了向量的长度,我们可用差向量 $x-y$ 的长度定义点 x,y 的距离.

定义 3 对于 R^m 中的任意两点 x,y,称

$$\rho(x,y)=|x-y|=\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

为点 x,y 的**距离**,其中 $x=(x_1,\cdots,x_m)$, $y=(y_1,\cdots,y_m)$.

容易验证 R^m 中点的距离有下列性质:

1° $\rho(x,y)\geqslant 0$, $\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$;

2° $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

3° $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

1.3 R^m 中点列的收敛性

在 R^m 中引进了点之间的距离,于是就可以谈点列的收敛性.

设在 R^m 中给了一串点

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

称之为**点的序列**,简称为**点列**,记为 $\{x_n\}$,简记为 x_n. 若存在常数 $M>0$,对任意自然数 n 有 $|x_n|\leqslant M$,则称 x_n 为**有界点列**.

定义 4 若存在 $a\in R^m$,使得

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(x_n,a)=\lim_{n\to+\infty}|x_n-a|=0,$$

则称点列 x_n 在 R^m 中**收敛**到 a, a 称为 x_n 的**极限**,记为

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=a.$$

容易证明, R^m 中的点列 x_n 的极限有以下性质:

1° 点列 x_n 的极限是唯一的.

证明 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, 又 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=b$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}|x_n-a|=\lim_{n\to+\infty}|x_n-b|=0.$$

又

$$|a-b|\leqslant|a-x_n|+|x_n-b|,$$

令 $n\to+\infty$ 得 $|a-b|=0$，即 $a=b$. 证毕.

2° 设 $x_n=(x_{n,1},\cdots,x_{n,m})$，$a=(a_1,\cdots,a_m)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ 的充要条件是：

$$\lim_{n\to+\infty}x_{n,i}=a_i\qquad(i=1,2,\cdots,m).$$

证明 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$，由

$$|x_{n,i}-a_i|\leqslant\rho(x_n,a)$$

得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n,i}=a_i$.

若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n,i}=a_i\,(i=1,2,\cdots,m)$，由 R^1 中序列极限运算法则知

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(x_n,a)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_{n,i}-a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=0,$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$. 证毕.

3° 若点列 x_n 有极限，则 x_n 有界.

4° 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=b$，$\alpha$ 为常数，则

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha x_n=\alpha a;\quad \lim_{n\to+\infty}(x_n+y_n)=a+b;$$

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n)=(a,b).$$

§2 欧氏空间中的点集

2.1 点与集合的关系

定义 1 设 $x_0\in R^m$，$\delta>0$，称集合

$$U(x_0;\delta)=\{x\,|\,x\in R^m,\ \rho(x,x_0)<\delta\}$$

为 x_0 的一个 δ 邻域，简称邻域. δ 为该邻域的半径. 称

$$U_0(x_0;\delta)=U(x_0;\delta)\setminus\{x_0\}$$

为 x_0 的空心邻域，若不需要知道邻域的半径时，分别用 $U(x_0)$ 与 $U_0(x_0)$ 表示 x_0 的邻域和空心邻域.

有了邻域的概念，我们可以借助它来描述点和集合的关系.

设 $x_0\in R^m$, $E\subset R^m$. 则点 x_0 与集合 E 的关系有下列三种情形（见图 15.1）：

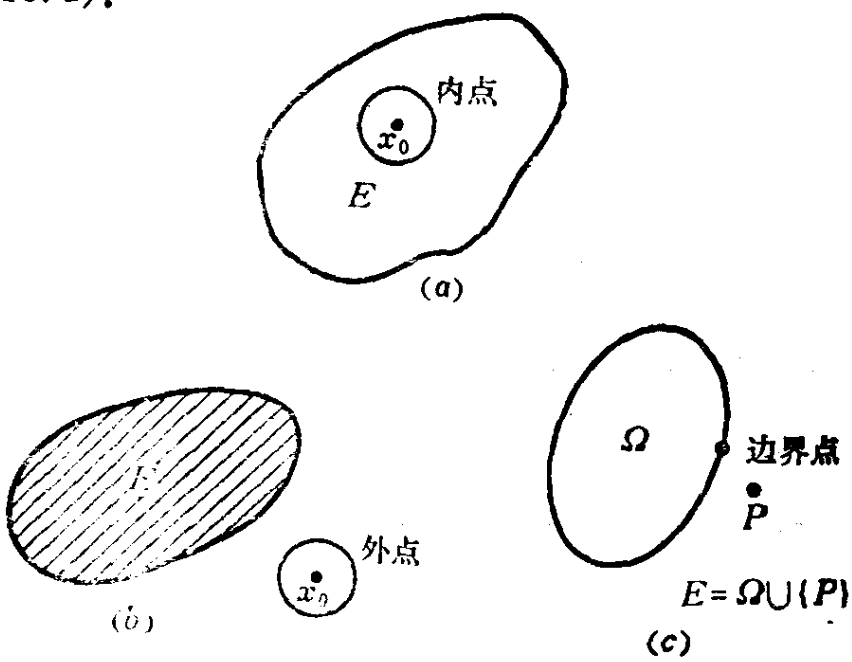

图 15.1

1° 若存在 x_0 的某邻域 $U(x_0;\delta)$ 使得

$$U(x_0;\delta)\subset E,$$

则称 x_0 是 E 的**内点**. E 的全部内点组成的集合称为 E 的**内集**或**内部**. 记为 E°;

2° 若存在 x_0 的某邻域 $U(x_0;\delta)$，使得

$$U(x_0;\delta)\cap E=\varnothing,$$

则称 x_0 是 E 的**外点**. E 的全部外点组成的集合称为 E 的**外部**;

3° 若 x_0 既不是 E 的内点，也不是 E 的外点，则称 x_0 为 E 之**边界点**，即 x_0 的每个邻域既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点. 也就是，对任给 $\delta>0$,