泛函分析引论

ANGUS E. TAYLOR

陕西人民教育出版社

泛函分析引论

(美)*Angus E. Taylor* 著

王永嘉　王光哲　译

叶彦润　校

陕西人民教育出版社

Angus E. Taylor

Introduction to FUNCTIONAL ANALYSIS

NEW YORK

1958

泛 函 分 析 引 论

(美)Angus E. Taylor 著

王永嘉 王光哲 译

叶 彦 润 校

陕西人民教育出版社出版

(西安和平门外标新街 2 号)

陕西省新华书店发行 西北电讯工程学院印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 17.75印张 440 千字

1986 年9月第 1 版 1986 年 9 月第 1 次印刷

印数：1—2,000

统一书号：7387·134 定价：3.50元

内 容 简 介

本书主要介绍了 Banach 空间及 Hilbert 空间的线性算子理论，并附有 Banach 代数理论，全书共七章及附录一章。

本书的特点是：按部就班地讲解线性泛函分析理论；并系统地应用到微分方程和积分方程理论上；给出了所用的代数和拓扑的知识；证明详细；有近 300 个习题。

它对于我国大学研究生和对泛函分析有兴趣的高年级大学生，是一部比较全面、系统的教科书；如果做完习题，便可为进一步研究打下一个坚实的基础。

序　　言

本书是作为研究生授课计划的一部分写成的．基本目的是帮助研究生学习有关线性空间和线性算子的基本概念和定理，以及使他们能领悟抽象线性空间观点的统一的力量和作用——在考察代数，古典分析，积分论，微分和积分方程等的问题时．尽管本书主要是给研究生讲课用的，然而对于需要了解线性空间、线性算子的基础理论的纯粹与应用数学家也希望有参考价值．

这本书的主题是赋范线性空间及把一个赋范线性空间映射到另一个赋范线性空间的线性算子的理论．完备的赋范线性空间叫Banach 空间．线性空间理论的许多最重要的结果依赖于完备性，为了得出这些结果，我们介绍了 Banach 空间．然而，除非对于某些有用的结论需作此假设外，通常完备性的假设是没有引进的．在介绍赋范线性空间时，一并引进了更专门的内积空间理论（完备的无穷维的内积空间叫Hilbert 空间）．这理论依赖于赋范线性空间的一般理论，但基于其自身特点所带来的特有的发展进程给出了具有显著特色的诸多结果．

虽然重点是放在赋范线性空间上，而更一般的拓扑线性空间的观念也发展到一定的范围，因为这些知识与赋范线性空间的理论在许多地方是相关的，特别，涉及到这些空间及其共轭空间的弱拓扑时．第三章简短地介绍了拓扑线性空间，间或带有局部凸的假设．在拓扑线性空间内引进了凸集和线性簇(特别的超平面)的几何．

书中给出了许多抽象概念和方法的例释与应用．大量的问题不仅在于培养训练学生去补充书中省略掉的某些细节，而且还在于解释和推广这些理论．为尽可能减少分析技巧上的困难，许多

说明和问题采用序列空间 l^p. 书中还给出了在微分方程、积分方程、解析函数古典理论上的应用.

第五章强调了复围道积分和残数计算在线性算子谱论中的重要性. 这个方法适用于一切有界或无界的闭线性算子. 这一章也包含了著名的紧（全连续）算子的 Riesz 理论——被后来的研究者推广了并改善了的——以及应用它去得到第二类 Fredholm 积分方程的避免了行列式的经典定理.

第六章介绍 Hilbert 空间的自伴算子、正规算子和酉算子的基本理论. 也讨论了对于微分方程和积分方程的应用来说是非常重要的紧对称算子和具有紧预解式的对称算子的理论. 这个讨论不要求内积空间具有完备性. 借助于连续函数空间上的线性泛函的 Riesz 表示定理进行了自伴算子的谱分析. 内容的处理保持尽可能地接近于古典分析的骨架. 学生熟识这些情况就能最有成效地继续学习B*——代数,以及学习作为可交换B*——代数的 Gelfand——Neumark 定理的一个结果之正规或自伴算子的谱定理. 第七章是为进一步了解这些分支的发展情况准备的. 由于篇幅所限，没有讨论 Banach 代数.

本书是一本入门书，不是专著. 就是说把学生引进门并且为了帮助他达到近代数学前沿（如果他希望),获得对经典数学构造的更加清晰的认识，而给以准备知识和理解能力.

A.E.Taylor

1957 年 8 月于洛杉矶

目　录

第五章　线性算子的谱分析

第六章　Hilbert 空间内的谱分析

第七章　积分与线性泛函

引　　言

这个引言的目的是解释遍及全书的术语和符号.

集

设 X 是一个给定的集，若 x 属于 X，则记作

$$x\in X.$$

若 x 不属于X，则记作

$$x\notin X.$$

若 $x\in E$，必有 $x\in X$，则称集 E 是 X 的子集.特别，X 是其自身的子集.不是由 X 的全体元素组成的子集叫 X 的真子集."E 是 X的子集" 一语用符号

$$E\subset X \quad 或 \quad X\supset E$$

表示.两个集 E 与 F 说是相等的，当且仅当 $E\subset F$ 且$F\subset E$.

不含有任何元素的集称为空集.空集可视为任何集的子集.空集用记号 ϕ 表示.

设 X 是一集，x 是 X 中的任何一元素.对于每一个x，用 $p(x)$ 表示关于 x 的一个命题. 用记号

$$\{x : P(x)\}$$

表示满足命题$P(x)$的一切$x\in X$组成的集. 显而易见，这个表示方法可以推广到多个命题上去.例如，若$P_1(x)$，$P_2(x)\cdots$，是一些命题，则$\{x : P_n(x), n=1,2,\cdots\}$表示对于每一个 $n=1,2,\cdots$，命题$P_n(x)$都成立的那些 x 的全体组成的集.

例 1. 设X是区间$0\leqslant s\leqslant 1$上所有s的连续实函数集，E 是 X 中适合$x(0)=x(1)$的函数 x组成的子集，则

$$E=\{x : x(0)=x(1)\}.$$

例2. 设X是对一切实数 s 有定义的并且有一切阶导数的实

值函数集，令E是当$s=0$时各阶导数皆取零值的函数组成的子集，则

$$E=\{x: x^{(n)}(0),\ n=1,2,\cdots\}。$$

给定集的一些子集可以用两种方法组合：构造**并**与**交**。若E_1，…，E_n是X的子集，E_1，…，E_n的**并**定义作那样的一些元素x的集，x至少属于E_1，…，E_n中的某一个。这个并记作

$$E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n，或\bigcup_{i=1}^{n}E_i。$$

这个定义和表示方法可以推广到X的子集的任意多个并上去：假设$\mathscr{E}$是X的一些子集组成的集·集

$$\bigcup_{E\in\mathscr{E}}E$$

表示X中的那样的x的全体：至少存在一个$E\in\mathscr{E}$，使得$x\in E$，且称其为$\mathscr{E}$中集的并。当$\mathscr{E}$为可数集时，即$\mathscr{E}$的全部成员为E_1，E_2，…时，记这个并为

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

若$\mathscr{E}$中的成员具有某种附标，例如E_α，其中α取值于集A上，则这个并记作

$$\bigcup_{\alpha\in A}E_\alpha.$$

集

$$\bigcap_{E\in\mathscr{E}}E$$

表示X中的那样的x的全体，对于每一个$E\in\mathscr{E}$都有$x\in E$，且称其为$\mathscr{E}$中集的**交**。若$\mathscr{E}$的成员具有附标，则交在符号表示上有类似于并的方式，只须用

$$\bigcap\ 代替\ \bigcup.$$

有限个集E_1，E_2，…，E_n的交也可以记作

$$E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_n.$$

若$E\subset X$，E相对于X的余定义作那样的一些x组成的集，$x\in X$，而$x\notin E$.E的余记作E'，或者有时不方便，用$C(E)$记.以下事实成立

$$(E')'=E,$$

并且，若$E\subset F$，则$F'\subset E'$.

在余，并，交之间有一个重要关系，即若$\mathscr{E}$是X的一些子集组成的集，则$\mathscr{E}$中所有成员的并的余等于$\mathscr{E}$中所有成员的余的交，即

$$\left(\bigcup_{E\in\mathscr{E}} E\right)'=\bigcap_{E\in\mathscr{E}} E'$$

对于有限个集的情况，这个事实可以记作

$$(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n)'=E_1'\cap E_2'\cap\cdots\cap E_n'.$$

若在上述等式中用E_i'代替E_i，然后在等式两边取余，则得到等价的关系式

$$(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_n)'=E_1'\cup E_2'\cup\cdots\cup E_n'.$$

它的一般形式是

$$\left(\bigcap_{E\in\mathscr{E}} E\right)'=\bigcup_{E\in\mathscr{E}} E'.$$

若E和F都是X的子集，则差$E-F$定义为X中的那样一些x组成的集，其中$x\in E$，而$x\notin F$，换句话说

$$E-F=E\cap F'.$$

函数

在本书中，除去特别的地方之外，我们总是用“函数”这个词表示单值函数，今后我们常遇到的函数的自变量和函数值不一定是实数或复数，而可以是任意集的元素.这里，我们公开地给出函数的一般定义，

设 X、Y 都是任意的非空集．假定有某一个法则，对于每一个元素 $x\in X$，对应一个唯一确定的元素 $y\in Y$．考虑由一切有序对(x, y)组成的集，其中 $x\in X$，而 y 是 Y 中与之对应的元素．这个有序对组成的集称之为一个函数．集 X 叫做函数的定义域，与 x 对应的 y 生成的集可能等于 Y，也可能不等于 Y，不论是哪一种情况，y 生成的集都叫做函数的值域．

由这个定义看出，具有定义域 X 和值域包含在 Y 内的函数是一切有序对(x, y)组成的集的子集，其中 $x\in X$，$y\in Y$．由 X 和 Y 中元素生成的一切有序对组成的集记作 $X\times Y$，并且称之为 X 和 Y 的笛卡儿乘积(或就叫乘积)．于是，定义域是 X 和值域在 Y 内的函数是乘积 $X\times Y$ 的一个特别的子集．与 $X\times Y$ 的其他子集相比较，区分一个函数的性质在于构成这个函数的那些特有元素对(x, y)中每个 x 恰出现一次，$x\in X$．因此，设 F 是 $X\times Y$ 的一个子集，则 F 是以 X 为定义域且值域在 Y 内的函数，当且仅当满足以下两个条件：

1． 对于每一个 $x\in X$ 都对应某个 $y\in Y$，使得$(x, y)\in F$．

2． 若(x_1, y_1)和(x_2, y_2)都在 F 中，$y_1\neq y_2$，则$x_1\neq x_2$．

有时，有必要去考虑非空集 X、Y 和定义域是 X 的真子集而值域含在 Y 内的函数．在这种情况下，函数是 $X\times Y$ 的子集，且满足上述两个条件中的第二个，不满足第一个．

若 F 是一个函数，$(x, y)\in F$，记作 $y=F(x)$，这是通常的函数符号．一般地说，用单个字母 F 表示函数，$F(x)$表示对应于 x 的函数值．然而，有时用另外的表示方法是方便的．例如，在提到指数函数时，可以引用函数 e^x，或函数 $y=e^x$ 代替冗长的用语“由一切对(x, y)组成的函数，其中 $y=e^x$，x 取所有实数”．

反函数

假定 F 是具有定义域为 D 值域为 R 的一个函数，其中$D\subset X$．$R\subset Y$．考虑反序的笛卡儿乘积 $Y\times X$．考虑那些使得$(x, y)\in F$ 的

(y, x) 组成的 $Y \times X$ 的子集. $Y \times X$ 的这个子集不一定是一个函数(定义域在 Y 内，值域在 X 内的)，若是一个函数，则称其为 F 的反函数（或逆），记作 F^{-1}. 这时，F^{-1} 的定义域是 R，值域是 D.

注意，F 存在反函数当且仅当 x 与 $F(x)$ 之间的对应关系，当 x 在 D 上变化时，D 与 R 之间的元素是一一对应的. 换句话说，F 存在逆当且仅当若 $F(x_1)=F(x_2)$，则 $x_1=x_2$.

还要注意，当 F 有逆时，$y=F(x)$ 等价于 $x=F^{-1}(y)$. 最后，若 F 有逆，则 F^{-1} 也有逆，且 F^{-1} 的逆就是 F.

关于实数的用法

实数集 S 的最小上界（若它存在）记作 $\sup S$. S 的最大下界记作 $\inf S$. 符号 sup 和 inf 也在别的适当的地方使用，例如，若 f 是定义域包含集 E 的实值函数，对应于 E 中 x 的所有 $f(x)$ 组成的集的最小上界记作

$$\sup_{x \in E} f(x).$$

关于实数系统的符号 $+\infty$，$-\infty$，我们遵循标准用法.

不等式

在本书的许多地方，用到一些关于和与积分的不等式. 这里，我们列出一些最常用的不等式. 不等式的标准参考书是 Hardy, Littlewood 和 Pólya 著不等式一书. 以下用 H, L, P 表示此书，而用数字表示提到的不等式在该书中节数. 不等式中的量均指实数或复数. 和是从 1 到 n 取的，或是从 1 到无穷取的，在后一种情况，显然，假定和是收敛的. 简单积分不等式中的函数是定义在实轴上有穷或无穷区间上的. 这些不等式对于积分扩展到一般集上也是正确的.

关于和的 Hölder 不等式（H, L, P, §2.8）：若 $1<p<\infty$，$p'=\dfrac{p}{p-1}$，则

$$\sum|a_i b_i|\leqslant\left(\sum|a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum|b_i|^{p'}\right)^{1/p'}.$$

特别，当 $p=p'=2$ 时称为 Cauchy 不等式(H，L，P，§2.4)。

关于和的 Minkowski 不等式 (H，L，P，§2.11)：若 $1\leqslant p<\infty$，则

$$\left(\sum|a_i+b_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum|a_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum|b_i|^p\right)^{1/p}.$$

Jensen 不等式 (H，L，P，§2.10)：若 $0<p<q$，则

$$\left(\sum|a_i|^q\right)^{1/q}\leqslant\left(\sum|a_i|^p\right)^{1/p}$$

关于积分的 Hölder 不等式 (H,L,P,§6.9)：若 $1<p<\infty$，$p'=\dfrac{p}{p-1}$，则

$$\int|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int|g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{1/p'}.$$

特别，当 $p=p'=2$ 时称为 Schwarz 不等式 (H，L,P，§6.5)。

关于积分的 Minkowski 不等式 (H，L，P，§6.13)：若 $1\leqslant p<\infty$，则

$$\left(\int|f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\left(\int|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Kronecker δ

符号 δ_{ij} 表示，当 $i=j$ 时等于 1，当 $i\neq j$ 时等于 0，其中 i，j 都是正整数.