

天体力学

赵进义编著 易照华修订

上海科学技术出版社

52
70

天 体 力 学

赵 进 义 编 著
易 照 华 修 订

上 海 科 学 技 术 出 版 社

天体力学

赵进义 编著

易照华 修订

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金一里450号)

发行所：上海发行所发行 上海东方印刷厂印刷

开本 787/1092 51/32 印张 25.25 字数 269,000

1983年2月第1版 1983年7月第1次印刷

印数 1,500

书号：13119·1059 定价：(科五) 1.40元

序

赵进义教授是我国当代的一位知名的数学家。早岁赴法国求学，专攻数学，以一篇为人称道的有关“正规函数族”论文，获得里昂大学的博士学位。毕业后复在里昂天文台作研究实习员一载，与该台台长马斯嘉 (Jean Mascart) 讨论天体力学问题，并从事天文观测。1930年回国，先后在广州中山大学、北京师范大学、西北大学、四川大学、北京工业学院等高等学府担任数学课程，历时四十年之久。赵教授治学谨严，讲课时娓娓动听，剖析入微，至今其及门弟子犹乐道之。

赵教授甫满六十即患高血压心脏病，本应休息调养，恢复健康。但因鉴于当时大学生缺乏参考书籍，而他本人的讲义手稿亟应整理出版，因而带病写作，在“四人帮”的迫害下，夜以继日，无论寒暑，挥毫运算迄不稍休。计写成“复变数函数论”、“椭圆函数论”、“反函数论”、“理论力学”、“天体力学”与“分析数学习题集”及“理论力学习题集”七种之多。手泽虽留传于后世，遗爱虽嘉惠于士林，然先生精尽力竭，呕心沥血，未届古稀之年已捐馆舍。此种以身殉学之精神，其友人与门生皆为之哀悼感佩不已。

赵教授不仅为我国数学界培养了大批人材，亦是中国天文学会会员，长期担任该会理事以及北京市天文学会理事长，为我国天文事业的发展作出重要的贡献。

本书是作者逝世前写成，付印前复经过其高足弟子、南京大学天文系天体力学教研室主任易照华同志，本其教学著述

的丰富经验,加以修订。原稿共十章,为了跟上现今的发展,而合读者的使用,易同志作了较大的改动;将其原稿压缩为八章,但保留其基本内容,简化其浅易部分,而补充以新颖材料;文字亦重新编写使全书自成系统,而不与易同志最近出版的“天体力学引论”重复,使这两部著作互相补充,合在一起更能反映天体力学这门学科的全貌。

本书内容可大致介绍如下:第一章讲述分析动力学的原理。第二章讨论吸引问题,着重介绍不同形状天体的引力特性。第三章介绍天体力学中最基本的、也是解决最完美的课题——两体问题。第四章介绍天体力学中研究时间最长的理论——摄动理论,这是经典天体力学的主要内容,在本书中只讲述各种型态方程的建立和分析解法的原理。第五章介绍天体力学一个著名的老大难问题——三体问题。第六章介绍另一个难题——月球运动理论,除一般结果外,特别叙述其中有一定特色的希耳(Hill)的方法原理。最后两章介绍天体的形状和自转理论,这里着重讨论地球的形状和自转,而且只涉及本问题有关天体力学方面的研究。总之,本书内容不独是天文工作者,特别是天体力学工作者,应掌握的知识,亦可供地球物理学、应用数学和空间科学工作者的参考。

李 珩

中国科学院上海天文台
1979年国际劳动节

目 录

序

第一章 正则方程组

- § 1-1 哈密顿正则方程1
- § 1-2 不显含时间 t 的情况4
- § 1-3 雅哥比定理6
- § 1-4 特殊情况10
- § 1-5 雅哥比公式12
- § 1-6 n 个自由质点的情况15
- § 1-7 正则方程组的初积分16
- § 1-8 常数变易法19
- § 1-9 接触变换22

第二章 吸引问题和位函数

- § 2-1 有心力30
- § 2-2 万有引力定律33
- § 2-3 质点组对另外一质点的吸引36
- § 2-4 质点组吸引的高斯定理39
- § 2-5 一连续体对外面一质点的吸引43
- § 2-6 连续体对其内部一质点的吸引49
- § 2-7 均匀椭球体对其内部一质点的吸引56
- § 2-8 均匀椭球体对外面一质点的吸引60
- § 2-9 均匀扁球体对内部一质点的吸引66
- § 2-10 均匀扁球体对外面一质点的吸引67
- § 2-11 两个连续体之间的吸引69

第三章 二体问题

- § 3-1 天体质量中心的运动方程和它们的积分74

§ 3-2	行星相对太阳的运动方程	78
§ 3-3	二体问题的运动方程	81
§ 3-4	拉普拉斯积分	83
§ 3-5	二体问题的轨道曲线	85
§ 3-6	天体在椭圆轨道上的运动	87
§ 3-7	开普勒方程的解法	91
§ 3-8	椭圆运动的级数展开式	95
§ 3-9	中心差	103
§ 3-10	椭圆轨道的根数	105
§ 3-11	轨道根数同初始条件的关系	108
§ 3-12	朗伯尔方程	111
§ 3-13	椭圆轨道的正则根数	114
§ 3-14	双曲线轨道	121
§ 3-15	抛物线轨道	124
§ 3-16	星历表计算公式	127

第四章 摄 动

§ 4-1	摄动的定义	135
§ 4-2	拉格朗日行星运动方程	137
§ 4-3	小偏心率和小倾角的情况	146
§ 4-4	正则形式的受摄运动方程	149
§ 4-5	用拉格朗日方法求出受摄运动方程	154
§ 4-6	牛顿方程, 瞬时轨道	161
§ 4-7	牛顿方程的特殊情况	174
§ 4-8	受摄运动方程的解法	179
§ 4-9	摄动函数展开式的基本形式	189
§ 4-10	长期摄动, 周期摄动和长周期摄动	197

第五章 三体问题

§ 5-1	运动方程的主要形式	202
§ 5-2	雅哥比变换	207
§ 5-3	邦加雷变换	219
§ 5-4	平面三体问题的降阶方法	226
§ 5-5	限制性三体问题	230

§ 5-6	圆型限制性三体问题, 平动解	234
§ 5-7	零速度面(希耳曲面)	242
第六章 月球的运动		
§ 6-1	运动方程和摄动函数	249
§ 6-2	摄动函数的展开形式	252
§ 6-3	一阶主要摄动	258
§ 6-4	卫星轨道的开普勒第三定律	266
§ 6-5	更精确的近似解	268
§ 6-6	希耳的月球运动方程	270
§ 6-7	中间轨道	275
§ 6-8	进一步的近似解	284
§ 6-9	函数 Θ 的展开	289
§ 6-10	近地点的运动	295
§ 6-11	月球轨道的交点运动	304
§ 6-12	勃朗的微分改正法	308
§ 6-13	勃朗的月球运动理论	310
第七章 地球的自转运动		
§ 7-1	地球自转的运动学方程	313
§ 7-2	地球自转的动力学方程	315
§ 7-3	地球自转轴在地球体内的变化, 地极移动	320
§ 7-4	力函数 U 的展开式	324
§ 7-5	动力学方程的积分	330
§ 7-6	岁差章动常数和有关问题	335
第八章 天体的形状		
§ 8-1	旋转流体平衡形状的基本性质	342
§ 8-2	旋转椭球体的情形, 马克洛林理论	349
§ 8-3	三轴椭球体的情形, 雅哥比理论	354
§ 8-4	均匀流体在引力变形时的平衡形状, 骆熙极限	360
§ 8-5	不均匀流体的平衡形状问题, 克雷诺理论	367
§ 8-6	地球模型	369

第一章 正则方程组

§ 1-1 哈密顿(Hamilton)正则方程

质点在自由状态下,或在各种约束条件下的运动方程,可以统一表示为拉格朗日(Lagrange)方程。为说明方便起见,有时只讨论一个质点的运动。对于多质点情况,可以直接推广。

一个质点在自由状态下,要用三个相互独立的坐标(空间坐标)表示它的位置,这说明它的自由度的数目为3,或叫做有3个自由度。如存在约束,自由度的数目就要减少。例如一个质点在某平面或曲面上运动,只需要二个相互独立的坐标表示它的位置,故只有两个自由度。同理,如一个质点在某直线或曲线上运动,则只有一个自由度。在天体力学中,约束情况都很简单,故不再详细讨论。

若质点的自由度数目为 m ,用 m 个相互独立的变量 $q_r(r=1, 2, \dots, m)$ 可以表示质点的坐标;不管 q_r 的具体意义,就把 q_r 叫做质点的广义坐标。质点的空间直角坐标 x, y, z 应为 q_r 的函数。质点运动的拉格朗日方程,就是用广义坐标 q_r 来统一表示。若质点所受到的力为有势力,存在力函数 U ,则运动方程为:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_r} \quad (r=1, 2, \dots, m). \quad (1.1)$$

其中 \dot{q}_r 表示 q_r 对时间 t 的微商; L 叫做拉格朗日函数,定义为:

$$L = T + U. \quad (1.2)$$

式中 T 表示质点的动能, 为速度分量 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 的二次齐次函数, 因而也是 \dot{q}_r 的二次函数。

在分析动力学中, (1.1) 式又叫做第二类拉格朗日运动方程。如果作用力不是有势力, 不存在力函数 U , 则运动方程应为:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_r} + Q_r. \quad (1.1')$$

其中 Q_r 为作用力在广义坐标 q_r 上的分量, 又叫做广义力。

(1.1) 式的每个方程为变量 q_r 的二阶常微分方程, 整个是 $2m$ 阶的常微分方程组。这种形式的方程组在理论上讨论时并不方便。故先由柏松(Poisson), 后由哈密顿引入一组新变量后, 化为形式对称、便于理论上讨论的方程组。

他们定义变量 p_r 为:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}. \quad (1.3)$$

因为 T 是 \dot{q}_r 的二次函数, 故 p_r 为 \dot{q}_r 的线性函数。并容易解出 \dot{q}_r 为:

$$\dot{q}_r = f_r(q_1, q_2, \dots, q_m; p_1, p_2, \dots, p_m). \quad (1.4)$$

显然 \dot{q}_r 也是 p_r 的线性函数。

由于力函数 U 不含 \dot{q}_r (也就不含 p_r), 故(1.1)式右端就是 \dot{p}_r 。下面用虚位移来推导有关方程。

因动能 T 为 q_r, \dot{q}_r, t 的函数, 当 q_r, \dot{q}_r 有与时间 t 无关的微小增量 $\delta q_r, \delta \dot{q}_r$ 时, T 有相应的增量 δT 。关系为:

$$\delta T = \sum_{r=1}^m \left(\frac{\partial T}{\partial q_r} \delta q_r + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r \right).$$

用(1.3)式代入得:

$$\delta T = \sum_{r=1}^m \left(\frac{\partial T}{\partial q_r} \delta q_r + p_r \delta \dot{q}_r \right), \quad (1.5)$$

为简便起见,定义:

$$K = \sum_{r=1}^m p_r \dot{q}_r - T, \quad (1.6)$$

则
$$\delta K = \sum_{r=1}^m (p_r \delta \dot{q}_r + \dot{q}_r \delta p_r) - \delta T,$$

用(1.5)式代入得:

$$\delta K = \sum_{r=1}^m \dot{q}_r \delta p_r - \sum_{r=1}^m \frac{\partial T}{\partial q_r} \delta q_r. \quad (1.7)$$

其中 δp_r 可由(1.3)式求出,用 $\delta q_r, \delta \dot{q}_r$ 表示。反之, $\delta \dot{q}_r$ 也可以用 δp_r 和 δq_r 表示,因而可以认为 $\delta p_r, \delta q_r$ 为两组相互独立的增量。(1.7)式即为用这两组增量表示的 δK 。

但用(1.4)式代入(1.6)中,可以直接把 K 表示成为 $p_r, q_r (r=1, 2, \dots, m)$ 和时间 t 的函数,故相应地有:

$$\delta K = \sum_{r=1}^m \frac{\partial K}{\partial p_r} \delta p_r + \sum_{r=1}^m \frac{\partial K}{\partial q_r} \delta q_r.$$

此式应与(1.7)式恒等,故比较 $\delta p_r, \delta q_r$ 的系数可得:

$$\dot{q}_r = \frac{\partial K}{\partial p_r}, \quad -\frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{\partial K}{\partial q_r} \quad (r=1, 2, \dots, m). \quad (1.8)$$

注意,在后面的式子中, T 应作为 $q_r, \dot{q}_r (r=1, 2, \dots, m)$ 和 t 的函数,而 K 为 $p_r, q_r (r=1, 2, \dots, m)$ 和 t 的函数。因此(1.1)式可写为:

$$\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial q_r} = \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = -\frac{\partial K}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r}.$$

哈密顿定义:

$$H = K - U. \quad (1.9)$$

则上式成为:

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r},$$

同时,因 U 不含 p_r ,故由(1.8)的第一式可得:

$$\dot{q}_r = \frac{\partial K}{\partial p_r} = \frac{\partial H}{\partial p_r}.$$

与上式联立即成为 $2m$ 阶的方程组:

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad (r=1, 2, \dots, m). \quad (1.10)$$

这就是哈密顿正则方程组,其中函数 H 由(1.9)式定义,应为 $p_r, q_r (r=1, 2, \dots, m)$ 和时间 t 的函数,叫做哈密顿函数。这两组变量 $p_r, q_r (r=1, 2, \dots, m)$ 就互相叫做正则共轭变量。如按照(1.10)式解出 p_r, q_r 为时间 t 的函数,则问题解决。这种正则方程组由于形式对称,并存在一些原则解法,在天体力学中经常用到。

§ 1-2 不显含时间 t 的情况

当质点的直角坐标表示为广义坐标的函数关系中,如不显含时间 t (即只含广义坐标 q_r),则速度分量应为 \dot{q}_r 的线性齐次函数。动能 T 则为 \dot{q}_r 的二次齐次函数。根据齐次函数的性质,则有关系:

$$\sum_{r=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r = 2T,$$

用(1.3)式即得

$$\sum_{r=1}^m p_r \dot{q}_r = 2T.$$

代入(1.6)式得:

$$K = T.$$

于是(1.9)式成为:

$$H = T - U. \quad (1.9')$$

此时, T 已不显含时间 t ;如果力函数 U 也不显含时间 t ,也就是说,质点所受到的力为保守力,则 H 也不显含时间 t 。对

时间求微商得：

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{r=1}^m \left(\frac{\partial H}{\partial p_r} \dot{p}_r + \frac{\partial H}{\partial q_r} \dot{q}_r \right).$$

以运动方程(1.10)式代入得：

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{r=1}^m (-\dot{q}_r \dot{p}_r + \dot{p}_r \dot{q}_r) = 0.$$

积分为

$$H = T - U = h. \quad (1.11)$$

其中 h 为积分常数。(1.11)式就是总机械能为常量，是保守系统的自然结论。在天体力学中常遇到这种情况。

例 设一质点受到有心力的作用，力的大小是质点到力心距离的函数，并存在力函数，试用正则方程来研究质点的运动。

解 设力心为坐标原点。在初始时刻，质点运动速度的向量同质点向径所决定的平面，就是质点运动的平面。即质点在一个平面内运动，只有二个自由度。采用力心为原点的极坐标系，以质点的向径 r 和极角 θ 为质点的广义坐标。为简单起见，设质点的质量为 1。则动能为：

$$T = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2).$$

设 $\psi(r)$ 为质点所受力的力函数，则因 T 为 \dot{q}_r 的二次齐次函数，故有：

$$H = T - U = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \psi(r).$$

相应的正则共轭变量为：

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta}.$$

故 H 表为 p_1, p_2, r, θ 的函数为：

$$H = \frac{1}{2} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} \right) - \psi(r).$$

因此,质点运动的正则方程组为:

$$\dot{r} = p_1, \quad \dot{\theta} = \frac{p_2}{r^2},$$

$$\dot{p}_1 = \frac{p_2^2}{r^3} + \psi'(r), \quad \dot{p}_2 = 0.$$

其中 $\psi'(r)$ 为 $\psi(r)$ 对 r 的导数。

由第四式积分得 $p_2 = C$ (常数), 代入第二式得:

$$r^2 \dot{\theta} = C.$$

这就是面积速度为常数。再由第一、三式可得:

$$\ddot{r} = \frac{C^2}{r^3} + \psi'(r).$$

只要解出这个方程,这个力学问题就能解决。另外,由于 H 不显含时间 t , 故有能量积分

$$H = \frac{1}{2} \left(p_1^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) - \psi(r) = h.$$

h 也是积分常数。

§ 1-8 雅哥比(Jacobi)定理

采用哈密顿正则方程组的形式后,优点之一就是有几种原则解法。本节所讲的就是一种原则解法。

哈密顿函数 H 的定义为(1.9)式,它应为 q, p, t 的函数,记为:

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_m; p_1, p_2, \dots, p_m, t).$$

由前面讨论可知,最高只含有 p_r 的二次多项式。雅哥比建立了一个以 q_1, q_2, \dots, q_m 和时间 t 为自变量的偏微分方程:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(q_1, q_2, \dots, q_m; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_m}, t \right) = 0. \quad (1.12)$$

原来在 H 中出现 p_r 处,都用未知函数 S 对 q_r 的偏导数来代

替。偏微分方程(1.12)又叫做哈密顿-雅哥比方程,或简记为H-J方程。正则方程组(1.10)实际上就是(1.12)式的特微方程。从微分方程理论可知,求偏微分方程(1.12)式的全积分与求(1.10)方程组的初积分是一致的。下面就讲述求解正则方程组(1.10)的雅哥比定理。

雅哥比定理:如果函数

$$S = S(q_1, q_2, \dots, q_m, t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) + \alpha \quad (1.13)$$

是偏微分方程(1.12)的任一个全积分($\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 为任意相互独立的常数),则由关系式:

$$\frac{\partial S}{\partial q_r} = p_r, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = \beta_r \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (1.14)$$

所确定的函数

$$\left. \begin{aligned} q_r &= q_r(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m), \\ p_r &= p_r(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

为正则方程组(1.10)的解(其中 β_r 也是相互独立的任意常数)。

证:先说明一种情况。因偏微分方程(1.12)式有 $m+1$ 个自变量 q_1, q_2, \dots, q_m, t ,故它的全积分应包含 $m+1$ 个相互独立的积分常数。但因在(1.12)式中,只出现 S 的偏导数,不出现 S 本身。故若 S 为全积分时, $S+\alpha$ 也是全积分, α 为任一常数。因此把全积分写为(1.13)的形式,表明 α 为一个可加常数,而 S 中只要有 m 个相互独立的任意常数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 就行了。

现在来证明定理本身。因(1.13)式为(1.12)式的全积分,故用(1.13)代入(1.12)式后,应该满足。这里需要假定(1.13)式的函数 S 对其所含的各变元有二阶连续的偏导数,否则无法讨论。只要能证明由(1.13)式所定义的 S ,并由它

所满足的(1.12), (1.14)式可推导出正则方程组(1.10)就够了。把 S 中的常数 α_r 看作参数; 在 H 里, α_r 只出现在 $p_r = \partial S / \partial q_r$ 中 ($r = 1, 2, \dots, m$), 故(1.12)式对 α_r 取偏导数应为:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_r \partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} = 0. \quad (1.16)$$

另外, 在(1.14)式的 $\partial S / \partial \alpha_r = \beta_r$ 对时间 t 求微商。由于 S 中只有 q_r 是时间的函数, 故得:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_r} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_r} \dot{q}_i = 0.$$

但已假设 S 对 α_r, q_r, t 存在二阶连续偏导数, 故微商次序可以交换。上式成为:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_r \partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = 0,$$

即

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_r \partial t} + \sum_{i=1}^m \dot{q}_i \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} = 0. \quad (1.17)$$

上式减去(1.16)式得:

$$\sum_{i=1}^m \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} = 0.$$

如定义

$$x_l = \dot{q}_l - \frac{\partial H}{\partial p_l} \quad (l = 1, 2, \dots, m), \quad (1.18)$$

则上式为:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} x_i = 0. \quad (1.19)$$

由于 $r = 1, 2, \dots, m$ 。故(1.19)式为 m 个 $x_l (l = 1, 2, \dots, m)$ 的 m 个线性齐次方程组。如全部写出则为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} x_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} x_2 + \dots + \frac{\partial p_m}{\partial \alpha_1} x_m &= 0, \\ \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_2} x_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} x_2 + \dots + \frac{\partial p_m}{\partial \alpha_2} x_m &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_m} x_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_m} x_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial \alpha_m} x_m = 0.$$

此齐次方程组的系数行列式即为 (p_1, p_2, \dots, p_m) 对于参数 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 的雅哥比行列式:

$$\frac{\partial(p_1, p_2, \dots, p_m)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)}.$$

但因 $p_1, p_2, \dots, p_m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是相互独立的函数和参数, 故上面的雅哥比行列式不恒为零, 因而上述线性齐次方程组只有零解, 即 $x_l = 0$ ($l = 1, 2, \dots, m$). 也就是有

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \quad (l = 1, 2, \dots, m). \quad (1.20)$$

另外, 在(1.14)式第一式对 t 取微商得

$$\dot{p}_r = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_r} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_r} \dot{q}_i, \quad (1.21)$$

再把(1.12)式对 q_r 取偏微商得:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_r \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_r} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S}{\partial q_r \partial q_i} = 0.$$

利用(1.20)式, 并交换二阶微商的次序得:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_r} + \frac{\partial H}{\partial q_r} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_r} \dot{q}_i = 0.$$

与(1.21)式比较即得:

$$\dot{p}_r = - \frac{\partial H}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \dots, m). \quad (1.22)$$

此式和(1.20)一起就是原来的正则方程(1.10), 即(1.14)所确定的 q_r 和 p_r ($r = 1, 2, \dots, m$) 为(1.10)式的解, 故定理得证。

上面证明虽然是只表明(1.13)确定的 q_r, p_r 为(1.10)式的解, 但由于它们已包含相互独立的 $2m$ 个任意常数, 故为(1.10)式方程组的通解。根据这个定理, 解正则方程组(1.10)