天体力学

赵进义编著　易照华修订

上海科学技术出版社

天 体 力 学

赵 进 义 编著
易 照 华 修订

上 海 科 学 技 术 出 版 社

天 体 力 学

赵进义　编著

易照华　修订

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行　上海东方印刷厂印刷

开本787×1092 1/32　印张[illegible].25　字数269,000

1983年2月第1版　1983年7月第1次印刷

印数1—4,500

书号：13119·1059　定价：(科五)1.40元

序

赵进义教授是我国当代的一位知名的数学家。早岁赴法国求学，专攻数学，以一篇为人称道的有关“正规函数族”论文，获得里昂大学的博士学位。毕业后复在里昂天文台作研究实习员一载，与该台台长马斯嘉(Jean Mascart)讨论天体力学问题，并从事天文观测。1930年回国，先后在广州中山大学、北京师范大学、西北大学、四川大学、北京工业学院等高等学府担任数学课程，历时四十年之久。赵教授治学谨严，讲课时娓娓动听，剖析入微，至今其及门弟子犹乐道之。

赵教授甫满六十即患高血压心脏病，本应休息调养，恢复健康。但因鉴于当时大学生缺乏参考书籍，而他本人的讲义手稿亟应整理出版，因而带病写作，在“四人帮”的迫害下，夜以继日，无论寒暑，挥毫运算迄不稍休。计写成“复变数函数论”、“椭圆函数论”、“反函数论”、“理论力学”、“天体力学”与“分析数学习题集”及“理论力学习题集”七种之多。手泽虽留传于后世，遗爱虽嘉惠于士林，然先生精尽力竭，呕心沥血，未届古稀之年已捐馆舍。此种以身殉学之精神，其友人与门生皆为之哀悼感佩不已。

赵教授不仅为我国数学界培养了大批人材，亦是中国天文学会会员，长期担任该会理事以及北京市天文学会理事长，为我国天文事业的发展作出重要的贡献。

本书是作者逝世前写成，付印前复经过其高足弟子、南京大学天文系天体力学教研室主任易照华同志，本其教学著述

的丰富经验，加以修订。原稿共十章，为了跟上现今的发展，而合读者的使用，易同志作了较大的改动；将其原稿压缩为八章，但保留其基本内容，简化其浅易部分，而补充以新颖材料；文字亦重新编写使全书自成系统，而不与易同志最近出版的“天体力学引论”重复，使这两部著作互相补充，合在一起更能反映天体力学这门学科的全貌。

本书内容可大致介绍如下：第一章讲述分析动力学的原理。第二章讨论吸引问题，着重介绍不同形状天体的引力特性。第三章介绍天体力学中最基本的、也是解决最完美的课题——两体问题。第四章介绍天体力学中研究时间最长的理论——摄动理论，这是经典天体力学的主要内容，在本书中只讲述各种型态方程的建立和分析解法的原理。第五章介绍天体力学一个著名的老大难问题——三体问题。第六章介绍另一个难题——月球运动理论，除一般结果外，特别叙述其中有一定特色的希耳 (Hill) 的方法原理。最后两章介绍天体的形状和自转理论，这里着重讨论地球的形状和自转，而且只涉及本问题有关天体力学方面的研究。总之，本书内容不独是天文工作者，特别是天体力学工作者，应掌握的知识，亦可供地球物理学、应用数学和空间科学工作者的参考。

李　珩

中国科学院上海天文台

1979 年国际劳动节

目　　录

第一章　正则方程组

§1-1　哈密顿(Hamilton)正则方程

质点在自由状态下，或在各种约束条件下的运动方程，可以统一表示为拉格朗日 (Lagrange) 方程。为说明方便起见，有时只讨论一个质点的运动。对于多质点情况，可以直接推广。

一个质点在自由状态下，要用三个相互独立的坐标(空间坐标)表示它的位置，这说明它的自由度的数目为 3，或叫做有 3 个自由度。如存在约束，自由度的数目就要减少。例如一个质点在某平面或曲面上运动，只需要二个相互独立的坐标表示它的位置，故只有两个自由度。同理，如一个质点在某直线或曲线上运动，则只有一个自由度。在天体力学中，约束情况都很简单，故不再详细讨论。

若质点的自由度数目为 m，用 m 个相互独立的变量 $q_r(r=1, 2, \cdots, m)$ 可以表示质点的坐标；不管 q_r 的具体意义，就把 q_r 叫做质点的广义坐标。质点的空间直角坐标 x，y，z 应为 q_r 的函数。质点运动的拉格朗日方程，就是用广义坐标 q_r 来统一表示。若质点所受到的力为有势力，存在力函数 U，则运动方程为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_r} \quad (r=1, 2, \cdots, m). \tag{1·1}$$

其中 $\dot{q}_r$ 表示 q_r 对时间 t 的微商；L 叫做拉格朗日函数，定义为：

$$L=T+U。\tag{1·2}$$

式中 T 表示质点的动能，为速度分量 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 的二次齐次函数，因而也是 $\dot{q}_r$ 的二次函数。

在分析动力学中，(1·1)式又叫做第二类拉格朗日运动方程。如果作用力不是有势力，不存在力函数 U，则运动方程应为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)=\frac{\partial T}{\partial q_r}+Q_r。\tag{1·1'}$$

其中 Q_r 为作用力在广义坐标 q_r 上的分量，又叫做广义力。

(1·1)式的每个方程为变量 q_r 的二阶常微分方程，整个是 $2m$ 阶的常微分方程组。这种形式的方程组在理论上讨论时并不方便。故先由柏松(Poisson)，后由哈密顿引入一组新变量后，化为形式对称、便于理论上讨论的方程组。

他们定义变量 p_r 为：

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}。\tag{1·3}$$

因为 T 是 $\dot{q}_r$ 的二次函数，故 p_r 为 $\dot{q}_r$ 的线性函数。并容易解出 $\dot{q}_r$ 为：

$$\dot{q}_r=f_r(q_1, q_2, \cdots, q_m; p_1, p_2, \cdots, p_m)。\tag{1·4}$$

显然 $\dot{q}_r$ 也是 p_r 的线性函数。

由于力函数 U 不含 $\dot{q}_r$（也就不含 p_r），故(1·1)式右端就是 $\dot{p}_r$。下面用虚位移来推导有关方程。

因动能 T 为 $q_r, \dot{q}_r, t$ 的函数，当 $q_r, \dot{q}_r$ 有与时间 t 无关的微小增量 $\delta q_r, \delta\dot{q}_r$ 时，T 有相应的增量 δT。关系为：

$$\delta T=\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\partial T}{\partial q_r}\delta q_r+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\delta\dot{q}_r\right)。$$

用(1·3)式代入得：

$$\delta T=\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\partial T}{\partial q_r}\delta q_r+p_r\delta\dot{q}_r\right). \tag{1·5}$$

为简便起见，定义：

$$K=\sum_{r=1}^{m}p_r\dot{q}_r-T, \tag{1·6}$$

则
$$\delta K=\sum_{r=1}^{m}(p_r\delta\dot{q}_r+\dot{q}_r\delta p_r)-\delta T,$$

用(1·5)式代入得：

$$\delta K=\sum_{r=1}^{m}\dot{q}_r\delta p_r-\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial q_r}\delta q_r. \tag{1·7}$$

其中 δp_r 可由(1·3)式求出，用 δq_r, $\delta\dot{q}_r$ 表示。反之，$\delta\dot{q}_r$ 也可以用 δp_r 和 δq_r 表示，因而可以认为 δp_r, δq_r 为两组相互独立的增量。(1·7)式即为用这两组增量表示的 δK。

但用(1·4)式代入(1·6)中，可以直接把 K 表示成为 p_r, $q_r(r=1, 2, \cdots, m)$ 和时间 t 的函数，故相应地有：

$$\delta K=\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial K}{\partial p_r}\delta p_r+\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial K}{\partial q_r}\delta q_r.$$

此式应与(1·7)式恒等，故比较 δp_r, δq_r 的系数可得：

$$\dot{q}_r=\frac{\partial K}{\partial p_r},\quad -\frac{\partial T}{\partial q_r}=\frac{\partial K}{\partial q_r}\quad (r=1, 2, \cdots, m). \tag{1·8}$$

注意，在后面的式子中，T 应作为 q_r, $\dot{q}_r$ $(r=1, 2, \cdots, m)$ 和 t 的函数，而 K 为 p_r, $q_r(r=1, 2, \cdots, m)$ 和 t 的函数。因此(1·1)式可写为：

$$\dot{p}_r=\frac{\partial L}{\partial q_r}=\frac{\partial T}{\partial q_r}+\frac{\partial U}{\partial q_r}=-\frac{\partial K}{\partial q_r}+\frac{\partial U}{\partial q_r}.$$

哈密顿定义：

$$H=K-U. \tag{1·9}$$

则上式成为：

$$\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial q_r},$$

同时，因U不含p_r，故由(1·8)的第一式可得：

$$\dot{q}_r=\frac{\partial K}{\partial p_r}=\frac{\partial H}{\partial p_r}.$$

与上式联立即成为$2m$阶的方程组：

$$\dot{q}_r=\frac{\partial H}{\partial p_r},\quad \dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial q_r}\quad (r=1,2,\cdots,m). \tag{1·10}$$

这就是哈密顿正则方程组，其中函数H由(1·9)式定义，应为p_r，$q_r(r=1,2,\cdots,m)$和时间t的函数，叫做哈密顿函数。这两组变量p_r，$q_r(r=1,2,\cdots,m)$就互相叫做正则共轭变量。如按照(1·10)式解出p_r，q_r为时间t的函数，则问题解决。这种正则方程组由于形式对称，并存在一些原则解法，在天体力学中经常用到。

§1-2 不显含时间t的情况

当质点的直角坐标表示为广义坐标的函数关系中，如不显含时间t(即只含广义坐标q_r)，则速度分量应为$\dot{q}_r$的线性齐次函数。动能T则为$\dot{q}_r$的二次齐次函数。根据齐次函数的性质，则有关系：

$$\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r=2T,$$

用(1·3)式即得

$$\sum_{r=1}^{m}p_r\dot{q}_r=2T.$$

代入(1·6)式得：

$$K=T.$$

于是(1·9)式成为：

$$H=T-U. \tag{1·9'}$$

此时，T已不显含时间t；如果力函数U也不显含时间t，也就是说，质点所受到的力为保守力，则H也不显含时间t。对

时间求微商得：

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\partial H}{\partial p_r}\dot{p}_r+\frac{\partial H}{\partial q_r}\dot{q}_r\right).$$

以运动方程(1·10)式代入得：

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{r=1}^{m}(-\dot{q}_r\dot{p}_r+\dot{p}_r\dot{q}_r)=0.$$

积分为

$$H=T-U=h. \qquad (1\cdot 11)$$

其中 h 为积分常数。(1·11)式就是总机械能为常量，是保守系统的自然结论。在天体力学中常遇到这种情况。

例 设一质点受到有心力的作用，力的大小是质点到力心距离的函数，并存在力函数，试用正则方程来研究质点的运动。

解 设力心为坐标原点。在初始时刻，质点运动速度的向量同质点向径所决定的平面，就是质点运动的平面。即质点在一个平面内运动，只有二个自由度。采用力心为原点的极坐标系，以质点的向径 r 和极角 θ 为质点的广义坐标。为简单起见，设质点的质量为1。则动能为：

$$T=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2).$$

设 $\psi(r)$ 为质点所受力的力函数，则因 T 为 $\dot{q}_r$ 的二次齐次函数，故有：

$$H=T-U=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\psi(r).$$

相应的正则共轭变量为：

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=\dot{r},\quad p_2=\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=r^2\dot{\theta}.$$

故 H 表为 p_1, p_2, r, θ 的函数为：

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+\frac{p_2^2}{r^2}\right)-\psi(r).$$

因此，质点运动的正则方程组为：

$$\dot{r}=p_1,\quad \dot{\theta}=\frac{p_2}{r^2},$$

$$\dot{p}_1=\frac{p_2^2}{r^3}+\psi'(r),\quad \dot{p}_2=0.$$

其中 $\psi'(r)$ 为 $\psi(r)$ 对 r 的导数。

由第四式积分得 $p_2=C$（常数），代入第二式得：

$$r^2\dot{\theta}=C.$$

这就是面积速度为常数。再由第一、三式可得：

$$\ddot{r}=\frac{C^2}{r^3}+\psi'(r).$$

只要解出这个方程，这个力学问题就能解决。另外，由于H不显含时间 t，故有能量积分

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+\frac{C^2}{r^2}\right)-\psi(r)=h.$$

h 也是积分常数。

§ 1-8 雅哥比(Jacobi)定理

采用哈密顿正则方程组的形式后，优点之一就是有几种原则解法。本节所讲的就是一种原则解法。

哈密顿函数H的定义为(1·9)式，它应为 q_r, p_r, t 的函数，记为：

$$H=H(q_1,q_2,\cdots,q_m;\ p_1,p_2,\cdots,p_m,t).$$

由前面讨论可知，最高只含有 p_r 的二次多项式。雅哥比建立了一个以 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 和时间 t 为自变量的偏微分方程：

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1,q_2,\cdots,q_m;\ \frac{\partial S}{\partial q_1},\frac{\partial S}{\partial q_2},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_m},t\right)=0. \tag{1.12}$$

原来在H中出现 p_r 处，都用未知函数S对 q_r 的偏导数来代

替。偏微分方程(1·12)又叫做哈密顿-雅哥比方程，或简记为H-J方程。正则方程组(1·10)实际上就是(1·12)式的特微方程。从微分方程理论可知，求偏微分方程(1·12)式的全积分与求(1·10)方程组的初积分是一致的。下面就讲述求解正则方程组(1·10)的雅哥比定理。

雅哥比定理：如果函数

$$S = S(q_1, q_2, \cdots, q_m, t, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) + \alpha \tag{1·13}$$

是偏微分方程(1·12)的任一个全积分(α, α_1, α_2, $\cdots$, α_m为任意相互独立的常数)，则由关系式：

$$\frac{\partial S}{\partial q_r} = p_r, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = \beta_r \quad (r = 1, 2, \cdots, m) \tag{1·14}$$

所确定的函数

$$\left.\begin{aligned} q_r &= q_r(t, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m), \\ p_r &= p_r(t, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) \end{aligned}\right\} \tag{1·15}$$

为正则方程组(1·10)的解(其中β_r也是相互独立的任意常数)。

证：先说明一种情况。因偏微分方程(1·12)式有$m+1$个自变量q_1, q_2, $\cdots$, q_m, t，故它的全积分应包含$m+1$个相互独立的积分常数。但因在(1·12)式中，只出现S的偏导数，不出现S本身。故若S为全积分时，$S+\alpha$也是全积分，α为任一常数。因此把全积分写为(1·13)的形式，表明α为一个可加常数，而S中只要有m个相互独立的任意常数α_1, α_2, $\cdots$, α_m就行了。

现在来证明定理本身。因(1·13)式为(1·12)式的全积分，故用(1·13)代入(1·12)式后，应该满足。这里需要假定(1·13)式的函数S对其所含的各变元有二阶连续的偏导数，否则无法讨论。只要能证明由(1·13)式所定义的S，并由它

所满足的(1·12)，(1·14)式可推导出正则方程组(1·10)就够了。把S中的常数α_r看作参数；在H里，α_r只出现在$p_r=\partial S/\partial q_r$中($r=1, 2, \cdots, m$)，故(1·12)式对$\alpha_r$取偏导数应为：

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_r \partial t}+\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial \alpha_r}=0. \tag{1·16}$$

另外，在(1·14)式的$\partial S/\partial \alpha_r=\beta_r$对时间$t$求微商。由于$S$中只有$q_r$是时间的函数，故得：

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_r}+\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 S}{\partial q_l \partial \alpha_r}\dot{q}_l=0.$$

但已假设S对α_r，q_r，t存在二阶连续偏导数，故微商次序可以交换。上式成为：

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_r \partial t}+\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \alpha_r}\left(\frac{\partial S}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l=0,$$

即

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_r \partial t}+\sum_{l=1}^{m}\dot{q}_l\frac{\partial p_l}{\partial \alpha_r}=0. \tag{1·17}$$

上式减去(1·16)式得：

$$\sum_{l=1}^{m}\left(\dot{q}_l-\frac{\partial H}{\partial p_l}\right)\frac{\partial p_l}{\partial \alpha_r}=0.$$

如定义

$$x_l=\dot{q}_l-\frac{\partial H}{\partial p_l} \quad (l=1, 2, \cdots, m), \tag{1·18}$$

则上式为：

$$\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial p_l}{\partial \alpha_r}x_l=0. \tag{1·19}$$

由于$r=1, 2, \cdots, m$。故(1·19)式为m个x_l($l=1, 2, \cdots, m$)的m个线性齐次方程组。如全部写出则为：

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1}x_1+\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1}x_2+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial \alpha_1}x_m=0,$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_2}x_1+\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2}x_2+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial \alpha_2}x_m=0,$$

…………………………………………

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_m}x_1+\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_m}x_2+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial \alpha_m}x_m=0。$$

此齐次方程组的系数行列式即为$(p_1, p_2, \cdots, p_m)$对于参数$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$的雅哥比行列式：

$$\frac{\partial(p_1, p_2, \cdots, p_m)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)}。$$

但因$p_1, p_2, \cdots, p_m$; $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$是相互独立的函数和参数，故上面的雅哥比行列式不恒为零，因而上述线性齐次方程组只有零解，即$x_l=0\ (l=1, 2, \cdots, m)$。也就是有

$$\dot{q}_l=\frac{\partial H}{\partial p_l}\quad (l=1, 2, \cdots, m)。\qquad (1\cdot20)$$

另外，在(1·14)式第一式对t取微商得

$$\dot{p}_r=\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial q_r}+\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 S}{\partial q_l\partial q_r}\dot{q}_l,\qquad (1\cdot21)$$

再把(1·12)式对q_r取偏微商得：

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_r\partial t}+\frac{\partial H}{\partial q_r}+\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial p_l}\frac{\partial^2 S}{\partial q_r\partial q_l}=0。$$

利用(1·20)式，并交换二阶微商的次序得：

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial q_r}+\frac{\partial H}{\partial q_r}+\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 S}{\partial q_l\partial q_r}\dot{q}_r=0。$$

与(1·21)式比较即得：

$$\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial q_r}\quad (r=1, 2, \cdots, m)。\qquad (1\cdot22)$$

此式和(1·20)一起就是原来的正则方程(1·10)，即(1·14)所确定的q_r和$p_r(r=1,2,\cdots,m)$为(1·10)式的解，故定理得证。

上面证明虽然是只表明(1·13)确定的q_r, p_r为(1·10)式的解，但由于它们已包含相互独立的$2m$个任意常数，故为(1·10)式方程组的通解。根据这个定理，解正则方程组(1·10)