高等学校试用教材

拓扑学

蒲保明
蒋继光 胡淑礼 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

拓　扑　学

蒲保明
蒋继光　胡淑礼　编

高等教育出版社

本书是以蒲保明教授自五十年代开始在四川大学数学系拓扑专门组长期使用的讲义为基础，参照1980年5月数学教材编审委员会审订的拓扑学大纲（四川大学起草）改写成的。

本书内容共分八章。前七章讲点集拓扑学，第八章第二节介绍属于代数拓扑的基本群的概念和性质。书中采用了一些较新的观点，组织了一些较新的材料，如Moore-Smith收敛概念，Bing-Nagata-Smirnov定理，用初始拓扑的观点统一处理子空间和积空间，用最终拓扑统一处理商空间与和空间等。

本书特点是用较短的篇幅组织了较多的内容。全书写得扼要、精炼，概念明晰，论证严谨，前后照应周到、行文流畅，思路清楚，有启发性。

本书由数学教材编审委员会委托陈杰教授初审，姜伯驹教授复审。本书可作综合大学数学系高年级学生或研究生的试用教材或教学参考书。

责任编辑：文小西

高等学校试用教材

拓　扑　学

蒲保明
蒋继光　胡淑礼　编

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张7.125字数172,000
1985年10月第1版　1985年10月第1次印刷
印数　00,001—8,300
书号13010·01132　定价1.45元

序

这本教材基本上按照综合大学数学专业拓扑学教学大纲编写．现有两个拓扑学教学大纲，一个是由北京大学、南开大学和吉林大学共同草拟的，另一个是四川大学草拟的．在一九八〇年五月召开的高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会扩大会议上，对上述两个大纲进行了研究、讨论．会议认为它们各有侧重与特色，两个大纲可以并存，由各院校自行选用．本教材是按上述后一个大纲编写的．

本书的第一位作者于一九五五至一九六一年编出讲义在四川大学数学系拓扑专门组长期使用，内容包括组合拓扑学与一般拓扑学，本书就是在这个讲义的基础上按照新的教学大纲改写而成的．在改写中，我们比较注意从内容上、处理方法上以及表达上的更新，还补充了较多的例子．一九八一年初稿完成后，在四川大学数学系使用过两次，这次正式出版前再次作了修改．

本书是按大纲规定的授课 57 学时编写的．为了使教材有适当的伸缩余地，以便于因材施教，我们补充了少量虽不属于大纲，但与大纲内容密切联系的定理与例子．这部分内容的前面标有星号“*”，表示它们在书中是独立的，不学这些内容也不致于影响后继内容的学习．在使用本教材时，按照大纲要求，可以讲授下列章节：第一、二、三、六、八各章的全部；第四章第1、第 2 节及第五章的第 1、第 2 节．当然，这些章节中标有“*”号的定理和例子可以删去不讲．若尚有时间，可讲授第七章第 1 节的部分或全部内容，或选讲某些标有“*”号的内容．如果学生在实变函数课中已经学过

一些集论知识，那末第一章的某些内容，如集代数和基数等就可不讲了．但是选择公理，特别是第一不可数序数还是要讲授，以便为后面的学习打下牢固的基础．

内蒙古大学陈杰教授和北京大学姜伯驹教授对本书的初稿提出了不少宝贵的意见和建议．我们谨在此致以衷心感谢．我们也由衷地感谢高等教育出版社的有关同志，他们为本书的编辑出版进行了细致的工作．我们切望本书的广大读者，对本书的不妥之处惠予指正．

蒲保明

蒋继光　胡淑礼

一九八三年五月　成都

目　　录

第一章 集论预备

这一章介绍本书所需用的集论知识，并统一术语和记号. 主要内容包括关系的一般概念及其基本性质，在此基础上讲三种常用的关系，即函数、等价关系和序. 其次，介绍集的运算. 除了集的并、交、差等运算外，着重介绍在数学中广泛应用的积与商运算. 然后介绍选择公理及其常用的另两种等价形式，即良序原理和 Zorn 引理. 最后介绍基数和第一不可数序数的概念和基本性质.

1.1. 集代数，关系

集是集论中一个未予定义的最基本的概念. 为了描述它，我们可以说一个**集**就是具有某种特性的一些单个事物组成的总体，这些单个事物叫这个集的**元**. 例如，所有具有"为 2 的倍数"这一特性的整数组成一个集，-4 就是这个集的元，而 5 则不是这个集的元. 设 A 表任意一个集，若 x 是 A 的一个元，就记为 $x\in A$ 或 $A\ni x$，也说 x 属于 A，而 x 不是 A 的元或 x 不属于 A，就记为 $x\notin A$ 或 $A\not\ni x$. 如让 B 表平面内坐标为有理数的一切点组成的集，则 $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)\in B$，但 $(\sqrt{2},0)\notin B$.

由有限多个元 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 或可数多个元 $x_1, x_2, \cdots$ 组成的集分别记为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 和 $\{x_1, x_2, \cdots\}$. 只含一个元的集 $\{x\}$ 叫**单元集**；不含任何元的集叫**空集**，记为 $\varnothing$.

两个集 A 与 B，若它们由相同的元组成，就说它们**相等**，记为 $A=B$. 若集 A 的每个元也是集 B 的元，就称 A 是 B 的一个**子集**，

或 B 包含 A, 记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$, 则称 A 是 B 的**真子集**.

给定一个集 X 和关于它的元的一个性质 P, 记号

$$\{x\in X: P\}$$

表示 X 内具有性质 P 的一切元 x 组成的集. 例如让 N 表示正整数集, 则

$$\{m\in N: \text{存在 } n\in N,\ m=2n-1\}$$

表示奇自然数集, 这个集也简记为 $\{2n-1: n\in N\}$.

有些特殊的集, 今后经常使用, 用固定的字母来表示它们方便些. 如 R 表实数集; Q 表有理数集; N 表正整数集. $I=[0,1]$ 表 R 内单位(闭)区间.

我们还要介绍几个常用的记号.

"____ $\Longrightarrow$ ____" 表示 "若____, 则____".

"____ $\Longleftrightarrow$ ____" 表示 "____当且仅当____".

"$\forall x$"表示"对于每个 x".

"$\exists x$"表示"存在 x".

$\forall$ 与 $\exists$ 分别称为**全称量词**和**存在量词**. 存在量词不能省略, 但全称量词往往省略. 例如, 设 f 是一个实变数的实值函数, 则

f 是非负的 $\Longleftrightarrow \forall x\in R,\ f(x)\geqq 0$.

我们常常略去"$\forall$"而表为

f 是非负的 $\Longleftrightarrow$ 若 $x\in R$, 则 $f(x)\geqq 0$.

1.1.1. 定义 给定一个集 X.

(i) 集 $\mathscr{P}X=\{A: A\subset X\}$ 称为集 X 的**幂集**, 它的每个子集 $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}X$ 叫 X 的一个**子集族**.

(ii) 设 $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}X$, $\mathscr{A}$ 的**并** $\bigcup\mathscr{A}$ 定义为

$$\bigcup\mathscr{A}=\{x\in X: \exists A\in\mathscr{A},\ x\in A\},\ \text{当 } \mathscr{A}\neq\varnothing.$$

$$\bigcup\mathscr{A}=\varnothing,\ \text{当 } \mathscr{A}=\varnothing.$$

当 $\mathscr{A}\neq\varnothing$ 时，$\mathscr{A}$ 的交 $\bigcap\mathscr{A}$ 定义为

$$\bigcap\mathscr{A}=\{x\in X:\forall A\in\mathscr{A},\ x\in A\}.$$

$\bigcap\varnothing$ 没有定义. 当 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 或 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$ 时，$\bigcup\mathscr{A}$ 也可分别记为

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k.$$

和
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\bigcup_{i\in N} A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots.$$

对交运算有类似的记法. 当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，称集 A 与 B **相交**，否则称它们**不相交**.

(iii) 设 $A, B\subset X$，则集

$$A\setminus B=\{x\in X:x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

称为 A 与 B 的**差**.

通常在某一讨论中，所涉及的集皆为一个给定的集 X 的子集，则此 X 叫**参考集**或**基础集**. 这时，对每个 $A\subset X$，差 $X\setminus A$ 简记为 A^c，称为 A 关于 X 的**补集**.

1.1.2. 定理 (De Morgen 公式) 设 X 是一个集，$B\subset X$，$\varnothing\neq\mathscr{A}\subset\mathscr{P}X$.

(i) $B\setminus\bigcap\mathscr{A}=\bigcup\{B\setminus A:A\in\mathscr{A}\}$.

(ii) $B\setminus\bigcup\mathscr{A}=\bigcap\{B\setminus A:A\in\mathscr{A}\}$.

证. (i) 设 $x\in B\setminus\bigcap\mathscr{A}$，则 $x\in B$ 且 $\exists A\in\mathscr{A}$，$x\notin A$. 于是 $x\in B\setminus A\subset\bigcup\{B\setminus A:A\in\mathscr{A}\}$. 反之，若 $\exists A\in\mathscr{A}$，$x\in B\setminus A$，则 $x\in B$ 且 $x\notin A$，从而 $x\notin\bigcap\mathscr{A}$. 故 $x\in B\setminus\bigcap\mathscr{A}$. (ii)的证法与(i)类似. □

1.1.3. 命题 设 A, B, C 是任意的集.

(i) $A\subset A$. $\varnothing\subset A$.

(ii) 若 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$.

(iii) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$,

(iv) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(v) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

证. 由有关定义直接知. □

1.1.4. 命题 设 $A, B\subset X$.

(i) $A\cap A^c=\varnothing$, $A\cup A^c=X$.

(ii) $A^{cc}=A$.

(iii) $\varnothing^c=X$, $X^c=\varnothing$.

(iv) $A\setminus B=A\cap B^c$.

证. 由补集的定义直接知. □

1.1.5. 命题 设 $A, B\subset X$, 则下列各条等价.

(i) $A\subset B$. (ii) $B^c\subset A^c$.

(iii) $A\cap B^c=\varnothing$. (iv) $A^c\cup B=X$.

(v) $A\cap B=A$. (vi) $A\cup B=B$.

证. (i)⇒(ii). 设 $x\in B^c$, 则 $x\notin B$. 据(i) $x\notin A$, 即 $x\in A^c$. (ii)⇒(iii). 若 $\exists x\in A\cap B^c$, 则 $x\in A$ 且 $x\in B^c\subset A^c$, 矛盾. (iii)⇒(iv). $\forall x\in X$, 若 $x\notin B$, 则 $x\in B^c$, 据(iii) $x\notin A$, 即 $x\in A^c$. (iv)⇒(v). 显然 $A\cap B\subset A$. 反之, 设 $x\in A$, 则 $x\notin A^c$, 据(iv) $x\in B$, 从而 $x\in A\cap B$. (v)⇒(vi). 显然 $B\subset A\cup B$. 反之, 设 $x\in A\cup B$. 若 $x\in A$, 则 $x\in A\cap B\subset B$. (vi)⇒(i). 设 $x\in A$, 则 $x\in A\cup B=B$. □

本节及后面的几节里, 我们将逐步介绍关系、函数、序等基本概念. 集论里把这些概念都定义为具有某种特性的集.

我们来讨论关系的概念. 有先后次序的一对元 (x, y) 叫一个**序偶**. 每一个具体的关系都与以序偶为元的某个集相对应. 例如前四个正整数 1, 2, 3, 4 之间的"小于"关系, 就对应一个集

$$U=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}.$$

即$(x,y)\in U$当且仅当x小于y. 反之，给定一个以序偶为元的集V，它就唯一确定一个关系，使得x与y满足这一关系当且仅当$(x,y)\in V$. 因此，我们就把“关系”定义为以序偶为元的任意集. 下面先用集来定义序偶的概念.

1.1.6. 定义 集$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$称为一个**序偶**，x叫它的**第一坐标**，y叫**第二坐标**.

1.1.7. 命题 $(x,y)=(p,q)\Longleftrightarrow x=p$且$y=q$.

证. $(\Rightarrow)$ 设$(x,y)=(p,q)$.

1° 若$p=q$，则$\{p,q\}=\{p\}$. 由假设$\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{p\}\}$，则$\{x,y\}\in\{\{p\}\}$从而$\{x,y\}=\{p\}$，则$x,y\in\{p\}$，故$y=p=x$且$y=p=q$.

2° 若$p\neq q$，则$\{x\}\neq\{p,q\}$. 但$\{x\}\in(x,y)=(p,q)=\{\{p\},\{p,q\}\}$，故$\{x\}=\{p\}$，从而$x=p$. 其次，$\{p,q\}\in(p,q)=(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$. 故$\{p,q\}=\{x,y\}$. 于是$q\in\{x,y\}$，但$q\neq p=x$，故$q=y$.

$(\Leftarrow)$ 由定义直接知. □

1.1.8. 定义 (i) 以序偶为元的任一集U叫一个**关系**. 这时，若$(x,y)\in U$，则称x与y是**U-相关的**，简记为xUy.

(ii) 设U是一个关系，则集

$\mathscr{D}U=\{x:\exists y, xUy\}$叫$U$的**定义集**，

$\mathscr{R}U=\{y:\exists x, xUy\}$叫$U$的**值集**.

1.1.9. 定义 设X,Y是任意两个集，

(i) $X\times Y=\{(x,y):x\in X, y\in Y\}$叫$X$与$Y$的**笛卡儿积**.

(ii) $\mathrm{id}_X=\{(x,x):x\in X\}$叫$X$上的**恒同**，或叫$X\times X$的**对角线**，也记为$\Delta(X)$.

(iii) 称U是X到Y的一个关系$\Longleftrightarrow U\subset X\times Y$使得$\mathscr{D}U=X$，$\mathscr{R}U\subset Y$.

X到X的任一关系简称为X**上的关系**.

1.1.10. 定义　设 U, V 是任意两个关系.

(i) $U^{-1}=\{(x, y): yUx\}$ 叫 U 的**逆关系**.

(ii) $V\circ U=\{(x, y): \exists\, t,\ xUt$ 且 $tVy\}$ 称为 V 与 U 的**复合关系**.

1.1.11. 例　(i) $X\times Y$ 是 X 到 Y 的一个关系且

$$(X\times Y)^{-1}=Y\times X.$$

(ii) id_X 是 X 上的一个关系且 $(\mathrm{id}_X)^{-1}=\mathrm{id}_X$. 对于 X 到 Y 的任一关系 U 及集 Z 到 X 的关系 V, 有

$$U\circ\mathrm{id}_X=U,\ \mathrm{id}_X\circ V=V.$$

(iii) 设 $V=\{(x, y): x\in R,\ y=\cos x\}$,

$U=\{(x, y): x\in R,\ x>0,\ y=\ln x\}$.

则 $V\circ U=\{(x, y): \exists\, t,\ t=\ln x,\ y=\cos t,\ x>0\}$

$=\{(x, y): x>0,\ y=\cos(\ln x)\}$.

1.1.12. 定义　设 U 是一个关系, A 是一个集.

$U[A]=\{y: \exists\, x\in A,\ xUy\}$ 叫 A 在 U 下的**象**,

$U[\{x\}]$ 简记为 $U[x]$.

因为 U^{-1} 也是一个关系, $U^{-1}[A]$ 称为 A 在 U 下的**逆象**.

1.1.13. 定理　(i) 设 U, V 是两个关系, A 是集. 则

$$(V\circ U)[A]=V[U[A]].$$

(ii) 设 V 是关系, X 是一个集且 $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}X$, 则

$$V[\bigcup\mathscr{A}]=\bigcup\{V[A]: A\in\mathscr{A}\},$$

$$V[\bigcap\mathscr{A}]\subset\bigcap\{V[A]: A\in\mathscr{A}\},\ \mathscr{A}\neq\varnothing.$$

证. (i) $y\in(V\circ U)[A]\Longleftrightarrow\exists\, x\in A, xV\circ Uy\Longleftrightarrow\exists\, x\in A, \exists\, t, xUt, tVy\Longleftrightarrow\exists\, t\in U[A], tVy\Longleftrightarrow y\in V[U[A]]$.

(ii) $y\in V[\bigcup\mathscr{A}]\Longleftrightarrow\exists\, x\in\bigcup\mathscr{A}, xVy\Longleftrightarrow\exists\, A\in\mathscr{A},\ x\in A,\ xVy\Longleftrightarrow\exists\, A\in\mathscr{A}, y\in V[A]\Longleftrightarrow y\in\bigcup\{V[A]: A\in\mathscr{A}\}$.

其次, 设 $\mathscr{A}\neq\varnothing$ 且 $y\in V[\bigcap\mathscr{A}]$, 则 $\exists\, x\in\bigcap\mathscr{A}, xVy$. 于是, $\forall A$

$\in\mathscr{A}$, $y\in V[A]$, 故 $y\in\bigcap\{V[A]:A\in\mathscr{A}\}$. □

1.1.14. 例 1.1.13. 中定理的最后一个包含式一般不必为等式. 如令 $U=\{(1,0),(2,0),(3,1)\}$, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,4\}$. 则 $A\cap B=\varnothing$, 从而 $U[A\cap B]=\varnothing$. 另方面, $U[A]=\{0,1\}$, $U[B]=\{0\}$. 则 $U[A]\cap U[B]=\{0\}\neq U[A\cap B]$.

习　题

1.1.A. 对任意集 A, B, 有

$$A=(A\cap B)\cup(A\setminus B).$$

$$A\cup(B\setminus A)=A\cup B.$$

1.1.B. 设 A, B, C 是任意的集.

(i) $A\setminus A=\varnothing\setminus A=\varnothing$. $A\setminus\varnothing=A$.

(ii) $A\setminus(A\cap B)=A\setminus B$.

(iii) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$.

(iv) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

(v) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.

(vi) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.

1.1.C. 举例说明存在集 A, B 与 C 使得集 $A\setminus(B\setminus C)$ 与集 $(A\setminus B)\setminus C$ 不同.

1.1.D. 设 A, B, C, D 是任意的集.

(i) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

(ii) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

(iii) $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.

(iv) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

(v) 设 $A\neq\varnothing$, 则 $A\times B=A\times C\Longleftrightarrow B=C$.

1.1.E. 设 A, B 是两个集, 则集

$$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

称为集 A 与集 B 的**对称差**.

(i) $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

(ii) 对任意的集 A, B, C, 有

$$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$$

$$A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C.$$

1.1. F. 若 $x, y\in A$, 则 $(x, y)\in\mathscr{P}\mathscr{P}A$.

1.1. G. 对任意集 S, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\in\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}S$.

1.1. H. 设$\mathscr{U}$是由关系组成的任一集族.

(i) $\mathscr{D}(\bigcup\mathscr{U})=\bigcup\{\mathscr{D}U: U\in\mathscr{U}\}$,

$\mathscr{R}(\bigcup\mathscr{U})=\bigcup\{\mathscr{R}U: U\in\mathscr{U}\}$.

(ii) 设 $\mathscr{U}\neq\varnothing$, 则

$$\mathscr{D}(\bigcap\mathscr{U})\subset\bigcap\{\mathscr{D}U: U\in\mathscr{U}\},$$
$$\mathscr{R}(\bigcap\mathscr{U})\subset\bigcap\{\mathscr{R}U: U\in\mathscr{U}\}.$$

(iii) 举例说明(ii)中的两个包含关系可以不相等.

1.1. I. 设 U, V 是两个关系.

(i) $(U^{-1})^{-1}=U$.

(ii) $(U\cap V)^{-1}=U^{-1}\cap V^{-1}$, $(U\cup V)^{-1}=U^{-1}\cup V^{-1}$.

1.1. J. 设 U, V, W 是关系.

(i) $(V\circ U)^{-1}=U^{-1}\circ V^{-1}$.

(ii) $W\circ(V\circ U)=(W\circ V)\circ U$.

(iii) $V\circ U\circ V=\bigcup\{V^{-1}[x]\times V[y]: (x, y)\in U\}$.

1.2. 函数, 等价关系

函数是最重要的数学概念之一，它可以理解为两个集的元之间的一种对应规则. 例如，一个实变数的实值函数 f 就是一个规则，通过它使每个实数 x，对应唯一一个实数 $f(x)$. 另方面，这个函数的图形是数平面上的点集，即以序偶$(x, f(x))$为元的特殊关系. 它是具体的，不象“规则”那样抽象. 我们现在的观点是把函数和它的图形不加区别，这样一来，函数就是一类特殊的关系.

1.2.1. 定义 称 f 是集X到集Y的一个**函数**或**映射**，记为

$$f: X\to Y \Longleftrightarrow f \text{ 是 } X \text{ 到 } Y \text{ 的一个关系且合于:}$$
$$\forall x\in X, \text{存在唯一的 } y\in Y, \text{使得 } xfy.$$

这个 y 称为 x 在 f 下的**象**或**值**，记为 $f(x)$. 从 x 到 y 的对应记为 $x\mapsto f(x)$(见图 1.1).

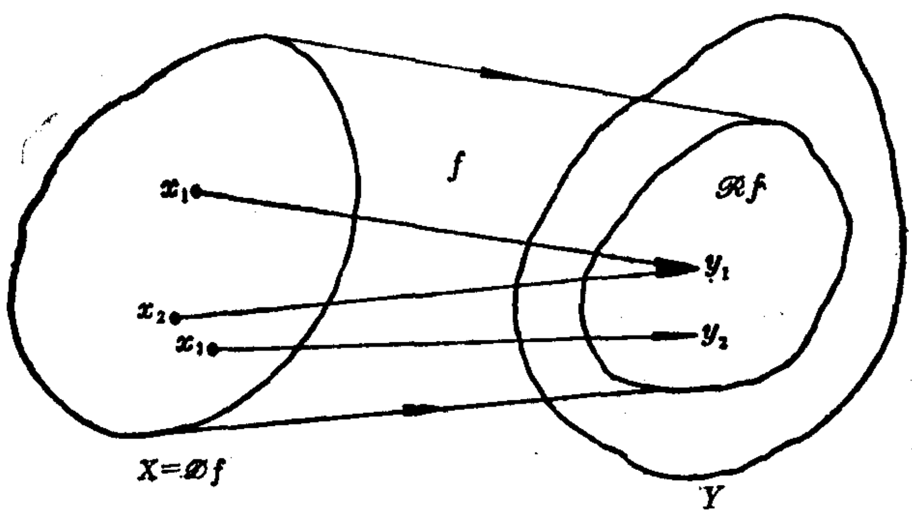

图 1.1.

当 $X=\varnothing$ 时, X 到任一集 Y 的函数只有一个, 即 $f=\varnothing$; 当 $X\neq\varnothing$ 时, X 到 $Y=\varnothing$ 的函数不存在.

1.2.2. 定义 设 $f:X\to Y$.

(i) 称 f 是**满映射** $\Longleftrightarrow \mathscr{R}f=Y$.

(ii) 称 f 是**常值映射** $\Longleftrightarrow \mathscr{R}f$ 是单元集.

(iii) 称 f 是**单一映射** $\Longleftrightarrow$ 若 $f(x)=f(y)$, 则 $x=y$.

1.2.3. 例 (i) $f=\{(x,x^2):x\in R\}$ 是 R 到 R 的一个映射, 按 1.2.1, 记为

$$f:R\to R\quad x\mapsto x^2.$$

(ii) 函数 $g:R\to[-1,1]\quad x\mapsto \sin x$

是满的, 不是单一的.

(iii) 设 A 是集 X 的任一子集, 则函数

$$i_A:A\to X\quad x\mapsto x$$

称为包含映射. 它是单一的. i_A 是满的当且仅当 $A=X$. 当 $A=X$ 时, $i_A=\mathrm{id}_X$.

设 $f:X\to Y$. $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}X$, $\mathscr{B}\subset\mathscr{P}Y$. 因 f, f^{-1} 都是关系, 据 1.1.12, 有

$$f[\bigcup\mathscr{A}]=\bigcup\{f[A]:A\in\mathscr{A}\},$$

$$f[\bigcap\mathscr{A}]\subset\bigcap\{f[A]:A\in\mathscr{A}\},\ \mathscr{A}\neq\varnothing.$$

$$f^{-1}[\bigcup\mathscr{B}]=\bigcup\{f^{-1}[B]:B\in\mathscr{B}\},$$

$$f^{-1}[\bigcap\mathscr{B}]\subset\bigcap\{f^{-1}[B]:B\in\mathscr{B}\},\ \mathscr{B}\neq\varnothing.$$

由于 f 是函数，这最后一个包含式实为等式. 即有下列

1.2.4. 定理 设 $f:X\to Y$.

(i) 若 $A\subset X$，则 $f[A]=\{f(x):x\in A\}$.

(ii) 若 $B\subset Y$，则 $f^{-1}[B]=\{x\in X:f(x)\in B\}$.

(iii) 若 $\varnothing\neq\mathscr{B}\subset\mathscr{P}Y$，则

$$f^{-1}[\bigcap\mathscr{B}]=\bigcap\{f^{-1}[B]:B\in\mathscr{B}\}.$$

证. (i) $f[A]=\{y:\exists\, x\in A, xfy\}$

$=\{y:\exists\, x\in A, y=f(x)\}$

$=\{f(x):x\in A\}$.

(ii) $f^{-1}[B]=\{x:\exists\, y\in B, yf^{-1}x\}$

$=\{x:\exists\, y\in B, xfy\}$

$=\{x:\exists\, y\in B, y=f(x)\}=\{x:f(x)\in B\}$.

(iii) 只需证 $\bigcap\{f^{-1}[B]:B\in\mathscr{B}\}\subset f^{-1}[\bigcap\mathscr{B}]$. 事实上，设对每个 $B\in\mathscr{B}, x\in f^{-1}[B]$，则 $f(x)\in B$. 于是 $f(x)\in\bigcap\mathscr{B}$，故

$$x\in f^{-1}[\bigcap\mathscr{B}].\ \square$$

1.2.5. 定义 (i) 设 A 是集 X 的一个子集，且有两个函数 $f:A\to Y, f^*:X\to Y$ 合下列关系:

$$\forall x\in A, f^*(x)=f(x).$$

则 f^* 称为 f 在 X 上的**扩张**，而 f 称为 f^* 在 A 上的**限制**，记为

$$f=f^*|A.$$

(ii) 设 $f:X\to Y$. 定义

$$\hat{f}:X\to f[X]\quad x\mapsto f(x).$$

则 $\hat{f}$ 是一个满映射，$\hat{f}$ 叫 f 的**值限制**. 显然有

$$i_{f[X]}\circ\hat{f}=f.$$