奇异积分方程论及其应用

侯宗义 李明忠 张万国 著

上 海 科 学 技 术 出 版 社

奇异积分方程论及其应用

侯宗义　李明忠　张万国　著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书主要内容是论述：1. 哥西型积分的若干重要性质；2. 某些典型的边值问题的求解；3. 几种重要类型的带有“哥西核”的奇异积分方程的基本理论；4. 奇异积分方程的基本理论；5. 运用泛函分析和拓扑的方法讨论非线性奇异积分方程和某些非线性边值问题的求解；6. Wiener-Hopf 方程的特有解法；7. 奇异积分方程理论在某些重要数学物理问题及在断裂力学中的若干应用。

本书可供理工科大学的数学系、应用数学系、力学系、物理系等有关专业的高年级学生、研究生和教师以及师范院校有关专业的高年级学生、研究生和教师阅读、参考。也可供广大科技、工程技术人员参考。

责任编辑　赵序明

奇异积分方程论及其应用

侯宗义　李明忠　张万国　著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　诸暨报印刷厂印刷

开本850×1156　1/32　印张11　字数289,000

1990年11月第1版　1990年11月第1次印刷

印数 1—1,790

ISBN 7-5323-2023-5/O・142

定价：6.10元

序

奇异积分方程理论的研究和发展由来已久，在弹性理论和断裂力学以及在一些重要的数学物理问题中有着广泛的应用。五十年代末，国内学者开展了这方面的研究，形成了一支颇有力量的具有自己特色的科学研究队伍，学术水平也在不断地提高。

由于奇异积分方程理论在实际中的重要作用，我们在六十年代初就在复旦大学数学系为高年级学生开设了这方面的选修课，编写教材，并培养研究生。后来，上海科学技术出版社组译出版了苏联数学家 Н. И. Мусхелишвили 院士的专著《奇异积分方程》，这是专门讨论 Cauchy 核奇异积分方程的书，而且只是讨论线性方程的情形。

在这段时间里，奇异积分方程的理论和应用又有了较好的发展，在美国也出版了几本专著，苏联、美国等国学者又进一步讨论了奇异积分方程的数值求解，非线性奇异积分方程等问题，得出了不少有实际意义的成果，而且也出现了用此理论于研究断裂力学等问题的良好结果。奇异积分方程理论受到了广大实际工作者的高度重视和运用。

因此，在七十年代末，我们又恢复了这个方面课题的研究和教学工作，在此基础上，编写了这本书。

前几年，北京师范大学出版社出版了赵桢的《奇异积分方程》一书，本书与该书不同，主要是选材不同，论述方式和处理方法也有差异。例如，本书中有非线性奇异积分方程、Wiener-Hopf 方程以及在边值问题、断裂力学等方面的应用，侧重于解法的论述等等，也概括了我们对各类线性、非线性边值问题的研究体会和研究成果；对奇异积分方程的基本理论的论述，本书也较为丰富。

奇异积分方程的数值求解也是一个重要课题，国内外都有学者在进行研究和探讨。限于篇幅，本书中没有列入这方面的成果。

本书共分七章：第一章是预备性的，讨论Cauchy型积分的若干重要性质；第二章主要讨论两个典型的边值问题的求解；第三章论述几种重要类型的带有Cauchy核的奇异积分方程的基本理论；第四章讨论奇异积分方程组的基本理论；第五章运用泛函、拓扑方法讨论非线性奇异积分方程和某些非线性边值问题的求解；第六章论述Wiener-Hopf方程的特有解法；第七章涉及到在一些重要数学物理问题以及在断裂力学上的若干应用。

阅读本书，要求具备“复变函数论”、“Fredholm积分方程理论”以及“数学物理方程”、“积分变换”等方面的基础知识，有些部分还需要一些泛函分析的知识，在阅读应用一章中的第二部分时还要求具备弹性理论等方面的若干基础知识。

本书供理工科大学数学系、应用数学系、力学系、物理系等有关专业的高年级学生、研究生和教师以及师范院校有关专业的高年级学生、研究生和教师阅读、参考。也可供广大科技、工程技术人员参考。

我们热诚地欢迎广大读者对本书提出批评和建议。

作　者

1989年12月于上海复旦大学

目　　录

第一章 Cauchy 型积分

在解平面 Laplace 方程的典型边值问题——Dirichlet 问题和 Neumann 问题时，可以分别利用对数双层位势和单层位势，把边值问题化为相应的第二类 Fredholm 型积分方程来讨论(见《积分方程论及其应用》，上海科学技术出版社，1987)。为了解复变量解析函数论的各种边值问题，类似于上述所使用的位势，可以利用 Cauchy 型积分来处理。

这一章是预备性的，专门讨论 Cauchy 型积分以及它的边界值性质。

§1 定 义

平面上的光滑弧 L 是指由参数 s 表示的曲线

$$x=x(s),\ y=y(s),\ s_a\leqslant s\leqslant s_b,$$

这里的 s_a、s_b 都是有限常数，$x(s)$、$y(s)$ 是在闭区间 $[s_a,\ s_b]$ 上确定的连续函数，满足下列两个条件：

1) 它们在区间 $[s_a, s_b]$ 上有不同时为零的连续一阶导数 $x'(s)$，$y'(s)$。在区间端点 s_a、s_b 处的导数分别理解为 $x'(s_a+0)$，$y'(s_a+0)$，$x'(s_b-0)$，$y'(s_b-0)$。

这个条件表示 L 有连续转动的切线。

2) 在区间 $(s_a,\ s_b)$ 内不同的 s 值对应着曲线 L 上不同的点 (x, y)。

这个条件意味着曲线 L 不自身相交。

曲线 L 上分别对应于参数 s_a、s_b 的点 a、b 称为 L 的端点。如果点 a 和 b 重合，且 $x'(s_b-0)=x'(s_a+0)$，$y'(s_b-0)=y'(s_a+0)$，

就称 L 是闭围道，否则，就称它是非闭的，或者称它是开口弧。在光滑弧 L 上通常取参数 s 增加的方向为 L 的正向，这样的弧谓之有向弧。由于光滑弧是可求长的，因此，一般总是取从 L 上某个定点算起的弧长作为参数 s，并且带有确定的符号。称 s 为 L 上对应点的弧坐标。今后，将 L 上对应于弧坐标 s 的点记为 $t(s)$，或简记为 t，而 L 上对应于弧坐标 s_0, s_1, s_2 等等的点分别记为 $t(s_0)$, $t(s_1)$, $t(s_2)$ 等等，或简记为 t_0, t_1, t_2 等等。

对有向弧 L 上的切线，以后总认为向着 s 增加的方向为切线正向。设 θ 是 L 上点 t 的切线与正向 Ox 轴的夹角，则有

$$\cos\theta = x'(s), \quad \sin\theta = y'(s)。$$

以 (x, y) 表示 L 上点 t 的直角坐标，我们写作 $t = x + iy$, s 是对应于点 t 的弧坐标，于是有

$$t' = \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}。$$

从而 $|t'| = 1$，或者 $|dt| = |ds|$。

我们称有限条没有公共点的光滑开口弧或光滑闭围道所组成的曲线的全体为光滑曲线。具有确定方向的光滑曲线称为有向曲线。以后，我们所考虑的都是有向曲线，不再一一说明。

设 L 是位在平面有限部分内的有向曲线，$\varphi(t)$ 是复变量 $t \in L$ 的绝对可积函数。称积分

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \tag{1.1}$$

为 Cauchy 型积分，$\varphi(\tau)$ 是它的密度——这个词是由于与双层位势和单层位势有关而如此称呼的，$\dfrac{1}{\tau - z}$ 为其核。

易见，Cauchy 型积分 (1.1) 除 L 上的点外在整个复平面的任何有限点 z 处都是解析的，它的导函数由下式给出：

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - z)^2}\,d\tau。$$

这个公式对于不属于 L 的每个点 z 都成立。

如果光滑曲线 L 是由包围平面上某个连通部分，即平面上某

个区域的一些闭围道所构成.我们如此选取 L 的正方向:使当沿着 L 循这个方向移动时,这个区域总是保持在 L 的左侧。在这种情况下,我们以 D^+ 表示保持在 L 左侧的部分平面,而以 D^- 表示对 D^++L 的补集,如图1.1所示情形,D^- 包含着无穷远点。

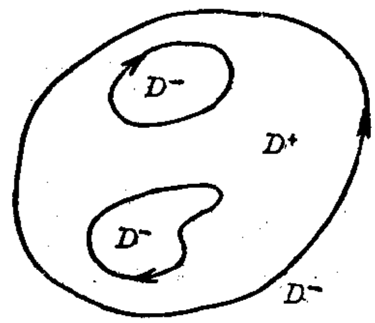

图 1.1

于是,按公式(1.1)确定的Cauchy型积分分成为两个互不相关的解析函数,即定义在区域 D^+ 内的解析函数 $\Phi^+(z)$ 和定义在区域 D^- 内的解析函数 $\Phi^-(z)$,一般说来,它们不是彼此间的解析延拓。这样的解析函数 $\Phi(z)$,它有两个独立的表达式 $\Phi^+(z)$、$\Phi^-(z)$,分别确定在两个对全平面互为补集的区域 D^+、D^- 内,今后称之为分块解析函数。

我们还要指出:由式(1.1)表达的Cauchy型积分 $\Phi(z)$,在无穷远点如同 $\frac{1}{z}$ 一样,一致地趋于零。事实上,我们把 $\Phi(z)$ 在无穷远点邻域内展开为 $\frac{1}{z}$ 的幂级数,因为

$$\frac{1}{\tau-z}=\frac{1}{z}\frac{1}{\frac{\tau}{z}-1}=-\frac{1}{z}-\frac{\tau}{z^2}-\cdots-\frac{\tau^{n-1}}{z^n}-\cdots,$$

乘上 $\frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}$,然后逐项积分,就得到

$$\Phi^-(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z^k},$$

其中

$$c_k=\frac{-1}{2\pi i}\int_L \tau^{k-1}\varphi(\tau)d\tau。$$

在 $\Phi^-(z)$ 的上列展开式内,没有 z 的零次幂项,因而就推知,由Cauchy型积分(1.1)表示的函数 $\Phi^-(z)$ 必定满足条件

$$\Phi^-(\infty)=0。$$

Cauchy型积分(1.1)和展布在曲线 L 上的单层位势及双层

位势有着紧密的联系。为说明简单起见，我们假设 L 是一条光滑闭围道，还假定 $\varphi(\tau)$ 是实函数。设点 z 不在 L 上。令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=U(x,\ y)+iV(x,\ y),$$

其中 U、V 都是实函数。记

$$\tau-z=re^{i\theta},$$

这里 $r=|\tau-z|$，$\theta=\arg(\tau-z)$。将此式两端取对数，视 z 固定，并对 τ 微分，就得到

$$\frac{d\tau}{\tau-z}=d\ln r+id\theta=\frac{dr}{r}+id\theta。$$

于是

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_L\varphi(\tau)\frac{dr}{r}+i\int_L\varphi(\tau)d\theta\right],$$

分开实部和虚部，得出

$$\begin{aligned}U(x,\ y)&=\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi(\tau)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi(\tau)\frac{d\theta}{ds}ds\\&=-\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi(\tau)\frac{d\ln r}{dn}ds\\&=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\varphi(\tau)\cos(r,\ n)}{r}ds,\end{aligned}\tag{1.2}$$

$$V(x,\ y)=-\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi(\tau)d\ln r=-\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi(\tau)\frac{dr}{r},\tag{1.3}$$

其中 s 为点 τ 的弧坐标，n 为点 τ 处指向 L 左侧的法线，而 $(r,\ n)$ 是向量 $\overrightarrow{\tau z}$ 和 n 之间的夹角。在导出上列式子时，我们利用了在由 L 的正切线 T 和法线 n 所组成的坐标系中(见图 1.2)，解析函数

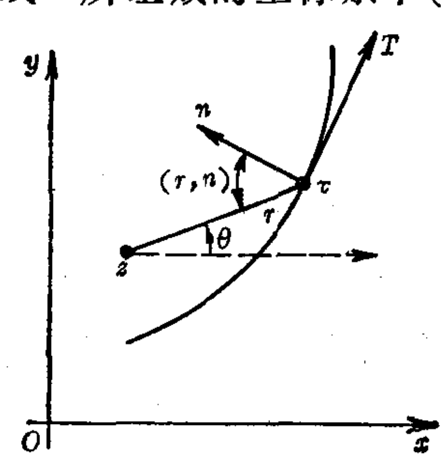

图 1.2

$$\ln(\tau-z)=i\theta+\ln r$$

(其中 z 为常量，τ 为变量)所应满足的 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{d\theta}{ds}=-\frac{d\ln r}{dn}。$$

函数 $U(x, y)$ 由(1.2)式所示是密度为 $\frac{\varphi(\tau)}{2\pi}$ 的双层位势。为进一步考察函数 $V(x, y)$，我们再假设 $\varphi(\tau)$ 具有对弧坐标 s 的可积导函数，对(1.3)式右端进行分部积分，就有

$$V(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{d\varphi}{ds}\ln r ds。$$

由此可见，函数 $V(x, y)$ 是以 $\mu(s)=-\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{ds}$ 为密度的单层位势

$$V(x, y)=\int_L \mu(s)\ln\frac{1}{r}ds=-\int_L \mu(s)\ln r ds。$$

§2 Cauchy 型积分在积分路径上的值

如果 Cauchy 型积分(1.1)中的变量 z 所对应的点位在弧 L 上(除端点外)，记它的复坐标为 t，这时，就得到一个曲线奇异积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau。\qquad (1.4)$$

一般说来，这个积分不一定有意义。因此，我们必须给这个奇异积分 (1.4) 以一个确定的含义。

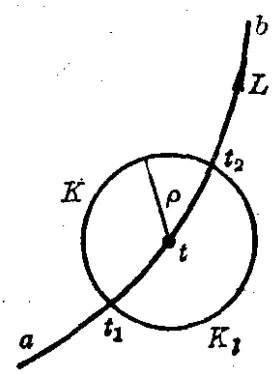

图 1.3

以点 $t\in L$ 为中心，充分小的正数 ρ 为半径作圆 K，使得圆 K 与有向弧 L 仅交于点 t 两侧的两点 t_1、t_2(如图 1.3)。弧 L 在圆周内的部分记为 l_ρ，而其余部分记为 $L-l_\rho$。考虑积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l_\rho}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

在函数 $\varphi(\tau)$ 是通常的绝对可积的假设下，这个积分是存在的。

如果积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l_\rho}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ 当 $\rho\to 0$ 时存在极限，称这个极限为Cauchy 型积分(1.1)在弧 L 上点 $z=t$ 处的 Cauchy 主值，或者说，奇异积分(1.4)在 Cauchy 主值意义下存在，也可简单地称为主值存在，并且就以这个主值作为积分(1.4)的值，记为

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l_\rho}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau。\quad (1.5)$$

极限(1.5)当密度函数 $\varphi(\tau)$ 仅是绝对可积，甚至是连续时不一定存在，为使这个极限存在，必须对函数 $\varphi(\tau)$ 加上适当的条件。这里，我们不停留在很广泛条件下能保证积分主值(1.5)存在的讨论上，仅仅指出一个重要情形，即为使积分主值(1.5)存在的一个充分条件是：绝对可积函数 $\varphi(\tau)$ 在弧 L 上所讨论的内部点 t 的某个邻域内满足 Hölder 条件

$$|\varphi(t)-\varphi(\tau)|\leqslant A|t-\tau|^{\lambda},\ 0<\lambda\leqslant 1, \quad (1.6)$$

其中 τ 是弧 L 上位于点 t 的所给定的邻域内的任意点，A 为正常数，称为 $\varphi(\tau)$ 的 Hölder 系数，λ 表示至多等于 1 的正常数，称为 $\varphi(\tau)$ 的 Hölder 指数。

今后，我们以 $H(\lambda)$ 表示定义在 L 上满足下列 Hölder 条件的函数 $\varphi(\tau)$ 的全体：对于 L 上任意两点 τ_1、τ_2，恒成立不等式

$$|\varphi(\tau_1)-\varphi(\tau_2)|\leqslant A|\tau_1-\tau_2|^{\lambda},$$

其中 A 是正常数，$0<\lambda\leqslant 1$。如果函数 $\varphi(\tau)\in H(\lambda)$，我们也称函数 $\varphi(\tau)$ 在 L 上满足条件 $H(\lambda)$。显然，如果 $\varphi(\tau)\in H(\lambda)$，它一定是连续的。此外，如果 $\varphi(\tau)\in H(\lambda)$，那末，$|\varphi(\tau)|\in H(\lambda)$。如果 $\lambda=1$，Hölder 条件就是一般所说的 Lipschitz 条件。另外，如果对于 L 上距离 $r_{12}=|\tau_1-\tau_2|$ 不超过某个正常数 δ 的任意一对点 τ_1、τ_2，函数 $\varphi(\tau)$ 都满足 Hölder 条件，Hölder 系数是 A，指数为 λ，那末函数 $\varphi(\tau)$ 在整个曲线 L 上也满足指数为 λ 的 Hölder 条件。事实上，如果 $r_{12}\leqslant\delta$ 时，有

$$|\varphi(\tau_1)-\varphi(\tau_2)|\leqslant A|\tau_1-\tau_2|^{\lambda}$$

成立，那末，在整个 L 上将有

$$|\varphi(\tau_1)-\varphi(\tau_2)|\leqslant A' r_{12}^{\lambda},$$

其中 $A'=\max\left\{A,\ \dfrac{2M}{\delta^{\lambda}}\right\}$, $M=\sup\limits_{\tau\in L}|\varphi(\tau)|$。

回到原先的问题上来，假设函数 $\varphi(\tau)$ 在点 $t\in L$ 的邻域内满足 Hölder 条件(1.6)，我们要证明，Cauchy 主值 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ 存在。事实上，我们把在圆 K 外弧 $L-l_\rho$ 上的积分分成两个积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l_\rho}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l_\rho}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau + \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_{L-l_\rho}\frac{d\tau}{\tau-t}。\tag{1.7}$$

由假设条件(1.6)，上式右端第一个积分中的被积函数满足不等式

$$\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right|\leqslant\frac{A}{|\tau-t|^{1-\lambda}},$$

因之，它当 $\tau\to t$ 时是弱奇性的，从而(1.7)式右端第一个积分当 $\rho\to 0$ 时极限存在，它等于通常意义下的广义积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau。$$

现在考察(1.7)式右端第二个积分，为简单起见，假设有向弧 L 是以 a 为始点，b 为终点的简单弧。记圆周 K 位于 L 的右侧的部分为 K_l，记 $\tilde{L}$ 为简单弧 $\widehat{at_1K_lt_2b}$（见图 1.3）。于是

$$\int_{L-l_\rho}\frac{d\tau}{\tau-t}=\int_{\tilde{L}}\frac{d\tau}{\tau-t}-\int_{K_l}\frac{d\tau}{\tau-t}。$$

但是

$$\int_{\tilde{L}}\frac{d\tau}{\tau-t}=\ln\frac{t-b}{t-a},$$

这里，把上式右端理解为函数 $\ln\dfrac{z-b}{z-a}$ 的在沿着 $\tilde{L}$ 而割开的平面上解析、在无穷远点取值为零的一个分支在点 t 处所取的值，或者说，是函数 $\ln\dfrac{z-b}{z-a}$ 在沿着 L 割开的平面上解析、在无穷远点为零的一个分支，在点 t 处从 L 的左侧所取的值。又

$$\int_{K_l}\frac{d\tau}{\tau-t}=\ln(\tau-t)\Big|_{t_1}^{t_2}=\ln\left|\frac{t_2-t}{t_1-t}\right|+i\theta,$$

但$|t_1-t|=|t_2-t|$，而θ表示当点τ沿着弧K_l从点t_1移动至点t_2处时，$\tau-t$的幅角的变化，因之有

$$\lim_{\rho\to 0}\theta=\pi\ 。$$

从而，(1.7)式右端第二个积分当$\rho\to 0$时的极限是

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{L-l_\rho}\frac{d\tau}{\tau-t}=\ln\frac{t-b}{t-a}-\pi i。$$

这样一来，从(1.7)式取$\rho\to 0$时的极限，就有

$$\begin{aligned}\Phi(t)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\\&=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l_\rho}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau\\&\qquad+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\ln\frac{t-b}{t-a}-\frac{\varphi(t)}{2}。\end{aligned}\tag{1.8}$$

这里的对数函数$\ln\dfrac{t-b}{t-a}=\ln\dfrac{b-t}{a-t}$是理解为函数$\ln\dfrac{z-b}{z-a}=\ln\dfrac{b-z}{a-z}$在沿着$L=\widehat{ab}$割开的平面上解析、在无穷远点取值为零的一个分支从$L$的左侧在点$t$处所取得的值。

特别是，在L是闭围道的情形，在(1.8)式中应置$a=b$，从而得到

$$\begin{aligned}\Phi(t)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{2}\varphi(t)。\end{aligned}\tag{1.9}$$

这样，就证明了：当函数$\varphi(\tau)$在L上点t的某个邻域内满足Hölder条件(1.6)时，奇异积分(1.4)在Cauchy主值意义下是存在的。今后，我们理解奇异积分(1.4)总是指主值意义的。

由上述可见，如果定义在弧L上的函数$\varphi(\tau)$在整条弧L上满足Hölder条件，那末奇异积分(1.4)的主值存在，且对L上除其端点以外的任何点t处有公式(1.8)成立。在L是闭围道情形，对于每个点$t\in L$，公式(1.9)成立。从公式(1.8)可以看出，如

果弧 L 上的点 t 趋于它的端点——起点 a 或者终点 b 时，积分(1.8)就有像 $\varphi(t)\ln(a-t)$ 或者 $\varphi(t)\ln(b-t)$ 那样的性态。这样，若函数 $\varphi(\tau)$ 是有界的，且当点 t 趋于 L 的端点时 $\varphi(t)$ 不趋于零的话，则积分(1.8)如同与端点的距离的对数那样无界，而在函数 $\varphi(t)$ 在 L 的端点为零的情形，例如在 L 的起点 a 处为零，$\varphi(a)=0$，则积分(1.8)在这个端点处有意义，它是具有弱奇性被积函数的绝对收敛的积分，且等于积分(1.8)在弧 L 上邻近点 a 的点 t 趋于点 a 时的极限。

从上面的论证过程还可以看出，在定义积分主值时，从积分路径 L 的点 t 处截取的 $l_\rho=\widehat{t_1t_2}$，并不一定需要满足条件 $|t_1-t|=|t_2-t|$，而只需要满足

$$\lim_{\substack{t_1\to t\\ t_2\to t}}\frac{|t_1-t|}{|t_2-t|}=1 \tag{1.10}$$

就可以了。这一点注记，在后面要用到。

对奇异积分(1.5)，还有下述两个重要的性质：变量代换规则和分部积分公式。

变量代换规则 设函数 $\tau=\alpha(\zeta)$ 有处处不等于零的一阶连续导数 $\alpha'(\zeta)$，它把弧 L 相互单值地映射为弧 L'。又函数 $\varphi(\tau)$ 在 L 上满足 Hölder 条件，则

$$\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\int_{L'}\frac{\varphi(\alpha(\zeta))\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)}\,d\zeta, \tag{1.11}$$

其中 $t=\alpha(\xi)$。

为证明这个规则，我们要注意：出现在(1.11)式右端的积分是在主值意义下存在的，因此，在弧 L' 上用以点 ξ 为中心的充分小的圆周截下一小段 l'，记其两个端点为 ξ_1、ξ_2，而在 L 上相应于它们的点是 $t_1=\alpha(\xi_1)$，$t_2=\alpha(\xi_2)$，于是

$$\int_{L'}\frac{\varphi(\alpha(\zeta))\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)}\,d\zeta=\lim_{\xi_1,\xi_2\to\xi}\int_{L'-l'}\frac{\varphi(\alpha(\zeta))\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)}\,d\zeta。$$

作代换 $\zeta=\beta(\tau)$，$\beta(\tau)$ 是 $\alpha(\zeta)$ 的反函数，由于我们对 $\alpha(\zeta)$ 所作的假设，它是单值存在的，这样，上列等式右端成为