

郭友中 李清溪

数学物理方法

MATHEMATICAL METHODS
FOR PHYSICAL SCIENCE

YOUZHONG GUO AND QINGXI LI



武汉大学出版社

WUHAN UNIVERSITY PRESS

数学物理方法

MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICAL SCIENCE

郭友中 李清溪

YOUZHONG GUO AND QINGXI LI

中国自然科学基金与武汉自然科学基金
支持课题

WORK SUPPORTED IN PART BY THE SCIENCE FUND OF
CHINA AND THE SCIENCE FUND OF WUHAN

武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS

• 1993 •

(鄂)新登字 09 号

数 学 物 理 方 法

©郭友中 李清溪

*

武汉大学出版社出版发行

(430072 武昌 珞珈山)

武汉大学出版社印刷总厂印刷

*

787×1092 1/16 27 印张 630 千字

1993 年 12 月第 1 版 1993 年 12 月第 1 次印刷

印数:1—1000

ISBN 7-307-00972-2/O · 86

定价: 20.00 元

内 容 提 要

本书是在为 1987 年上海辐射和天线研讨班开设的同名课程基础上修订而成的。全书共分十五章,除复变函数外,系统地讲述了数学物理的基本理论和重要方法,不仅简要地介绍了经典的结果,而且结合实际用心阐述了现代概念和技巧。

这个研讨班系我国著名科学家、波兰院士钱伟长教授主持,由他本人、美国院士戴振铎教授、成都电讯工程学院谢处方教授、刘盛纲教授和中国科学院郭友中教授等著名学者主讲。本课程共授课 50 学时,分前后两大部分。大体上,前半部分相应于大学有关专业课的程度,后半部分适用于有关专业的研究生水平。

本书可作为高等院校、科研单位和工程技术部门数学及有关关系科大学生和研究生的教材及参考书,也可供教职员工和科学技术人员参考。

序 言

现代数学是物理科学和工程科学非常有用的工具,而且物理科学和工程科学也为现代数学提供了营养,促成了现代数学高速发展,甚或开辟了新的领域。但是,毋可讳言,有许多科学技术工作者,对现代数学不少领域,还是生疏的,从而很大程度上制约着科学技术工作者驾驭现代数学,从中得到助益。因此,我和我的同行们一直在提倡近代数学与科学,特别是力学的结合。这种结合对高科技产业的发展,传统产业的改造和各类管理工作的现代化,一句话,对我国的现代化起着极其重要的作用。

从严格的科学意义上讲,在学科发展的高起点上进行上述结合是我在 1987 年 4 月至 5 月在上海工业大学举办全国性辐射和天线研讨班计划的最主要的目的。这个班由美国工程科学院院士、微波天线权威、密西根大学戴振铎教授系统主讲专业的基础理论和前沿工作,成都电讯工程学院谢处方教授和刘盛纲教授讲授有关的现代专题。这次研讨班内容涉及多种学科领域,学员又来自全国各地,有的具有良好的数学和物理基本锻炼,有的已经作过大量实际工作。为他们系统提高和补充数学物理方法就成为一项普遍的要求和特殊的任务。这个任务之所以特殊是要在众多的现代数学领域中选择当前对物理科学和工程科学工作者最有用的内容而加以系统化。我和中国科学院数学物理研究所研究员郭友中教授分别设计了相互联系而又独立的两个课程,它们的格调力求与现行教材有较大的区别。我之选聘这些作者来撰稿和讲解,是考虑到他们的学识对这项计划的紧密相关性,以及他们个人所做大量研究工作的重要性。

我认为本书大致可以分为四个有机的部分来看待。第一部分设置的目的是让读者熟悉应用数学的全过程,复习数学物理的基本内容和用近代观点统一认识文献中常用的许多有效的数学方法。因此,作者在引言和第一章中由控制论和泛函分析切入是有道理的。第二部分非常简练地介绍了数学物理的较为经典的部分,直到非常近代的方法,构成了本书的主要部分,为读者整理已有的知识和掌握新的数学工具,学习学科的前沿理论和独立开展研究工作打下了基础。它们由第三章至第十章组成,其中第七章不包括在内。这些方法对科学研究和实际应用同样重要。从各章的标题可见,本书题材范围广泛,观点较高,许多论点很有特色;内容安排上前后呼应,又相对独立,照顾到了读者自学的方便。第三部分是为了对数学物理方法在已讲授的内容基础上,从数学角度进行提高,提醒读者注意应用数学和纯粹数学之间的联系和基础研究的极端重要性。这部分内容相应于书中的第七章、第十一章至第十四章。第四部分看来是作者为了从两个不同角度开拓视野而安排的:从纯分析的角度和从偏物理的角度。它们就是第二章和最后一章。外微分形式是一个很重要的数学分支,可惜至今尚未为科技工作者所掌握和重视。作者用了很短的篇幅,浓缩地介绍了他们自己的一套处理方法,使得场论的许多复杂内容成为一目了然的事实。虽说初学者可以跳过本章往下读,我倒愿意向读者推荐,不可不读!本书变分和变分不等式等问题本质上是非线性的,所以非线性

问题一章重点在于分叉、怪引子、阵发性与浑沌等概念。这是目前的热门话题,已有许多著作出版,作者用轻松的格调介绍了这些重要的非线性现象。从开始和结尾,从数学和物理两个侧面将读者的视野引向更为广宽的天地。

诚嫌不足的是:从作为教材要求,全书省去了习题,这给教学双方带来了不便;从作为满足应用来说,三个附录显得内容过于省略。希望能在再版时加以补充。

利用这个机会,我十分高兴向广大读者推荐这部有明显特点的优秀著作。

钱伟长

1991年1月7日于北京

引 言

数学物理方法的内容非常广泛,而且随着时代的前进,提出的问题越来越复杂,方法越来越多样。就目前的情况来说,人们对数学物理方程了解得还很不够。为了这个缘故,我们在第0章中作了一些题外的介绍,谨供参考。

本书原来的目的是为上海电磁辐射与天线研讨班提供一个教材,同时考虑了一般的需要,特别是非数学专业的需要,编选了有关的内容,以与高级电磁辐射研究讲座[23,79,80]等的教学相配套。考虑到来自全国的听众大都有经典数学物理方程(波动方程、扩散方程和调和方程)的一定知识以及用 Fourier 级数和分离变量等方法实际解题的锻炼,又希望讲座采用由一般到特殊的方法,有利于起到提纲挈领整理总结已有知识,在一定程度上统一水平的作用。为此,讲座加了第一章作为预备知识,为的是反映近年来泛函分析方法在证明一般定理上巨大进展的一些侧面。这些方法是以简洁的原理为基础提供的一些非常有用的框架,它们的应用却需要精微和复杂的技巧,如先验估计和不同函数空间的嵌入关系。本书除少数注明出处以外,内容大致是自封的,每章都相对独立。由于学时有限,只是有节制地介绍了有关学科的进程,特别是只在后面几章中集中介绍了近三十年来与标准教材差别较大的某些部分。

两年多来,我们在大学高年级学生和研究生中进行了试用,并根据试用老师和读者的意见进行了全面修订。在本书定稿中,相对地说,第三至第六章,我们试图用较高的观点来介绍熟悉的内容,或可叫做基础的部分;第二章、第七至第十五章,我们力求用较易接受的方法来引进较为陌生的对象,或可叫做现代的部分。两部分之间难易有一定的梯度。1987年在巴黎召开的第一届国际工业与应用数学会议上,应用数学分析专题受到极大的关注,内容包括奇摄动、动力系统、分叉与变分方法。因此,课程的安排大致适应了这一趋势。

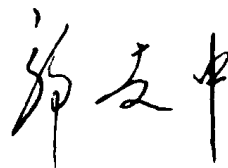
从目录中看得出来,除复变函数方法外(目前已有许多很好的书籍),前半相当于大学水平,后半可用作研究生教材。讲座的目的之一是着重介绍方法而不是着重知识,希望听众能用很少的近代知识较多地掌握有力的工具,为进一步研究和自我完善提供方便,而不为其中的细节所困惑。

如果这个课程能够在更新工具和提高水平上,在理工合璧和联系实际上,对读者起到积极作用的话,讲座的目的就可以认为已经部分达到了。我们希望这种教学方式能帮助读者探索利用现代数学工具为自己从事的专业服务。

本书正式出版前又作了一次认真的增补与删节,直接和间接地介绍了一些文献和书籍的有关内容。为便读者进一步查阅,凡能找到出处的大都已经罗列在参考文献之中了;也有利用我们自己的笔记和论文而记不清出处未作注释的,一并向原作者们致歉和致谢!

作者对钱伟长教授的关心与支持和在百忙之中为书作序,对陈大金和段金桥两位博士

和李清溪教授等在初稿整理再稿修订和讲授定稿过程中所作的大量工作和热情帮助。对武汉大学出版社的辛勤劳动和精美的印刷与装帧表示衷心的感谢。限于水平,错漏和不当之处,亟诚欢迎指正,以便再版时纠正。



1987年4月8日初稿于上海

1989年10月25日再稿于武汉

1993年6月2日定稿于北京

目 录

序 言	1	
引 言	1	
第 0 章	1	引 论
§ 0	1	数学物理与数学模型
§ 1	4	数学模型与黑箱
§ 2	5	三类经典的数学物理方程
§ 3	9	基本定义和定解条件
§ 4	10	方程的分类与化简
第一章	15	泛函分析一些知识
§ 0	15	从数直线谈起
§ 1	17	Hilbert 空间
§ 2	18	若干重要几何定理
§ 3	24	直交性与 Fourier 级数
§ 4	27	对偶空间
§ 5	31	线性算子
§ 6	35	Lax-Milgram 定理和 Stampacchia 定理
§ 7	39	单位分解
§ 8	40	Sobolev 空间
第二章	54	外微分方法
§ 0	54	引言
§ 1	54	外微分
§ 2	57	Poincaré 定理与逆定理
§ 3	59	星运算与上微分
§ 4	61	变分原理与守恒定律
§ 5	61	并矢与 Green 定理的推广
§ 6	64	实复转化

§ 7	65	电磁动力学
§ 8	74	流体动力学
§ 9	75	低速质点动力学
§ 10	80	高速质点动力学
第三章	85	正交展开法
§ 0	85	函数的正交展开问题
§ 1	88	Parseval 等式
§ 2	90	三角级数的收敛性
§ 3	93	三角级数的一致收敛性
§ 4	95	二重 Fourier 级数
§ 5	98	在定解问题中的应用
第四章	105	分离变量法
§ 0	105	基本思想
§ 1	106	齐次方程混合问题
§ 2	110	非齐次方程的求解问题
§ 3	111	非齐次边界条件的处理
§ 4	113	其它定解问题
§ 5	117	Bessel 函数
§ 6	122	Legendre 函数
第五章	129	积分变换方法
§ 0	129	映射反演方法
§ 1	129	应用积分变换解边值(初值)问题的普遍原理
§ 2	133	Fourier 变换
§ 3	137	Laplace 变换
§ 4	141	高维情况
§ 5	145	空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$
§ 6	149	空间 $H^s(\Omega)$
§ 7	150	软化子及其性质
第六章	154	偏微分方程问题适定性
§ 0	154	适定性问题
§ 1	157	弦振动方程

§ 2	163	Laplace 方程
§ 3	170	热传导方程
第七章	174	变分方法
§ 0	174	引言
§ 1	175	数学物理中的变分原理
§ 2	180	非线性算子与变分逆问题
§ 3	187	算子谱的极小问题
§ 4	191	变分等价性
§ 5	197	变分适定性
第八章	205	直接方法
§ 0	205	引言
§ 1	206	Rietz 方法
§ 2	212	Galerkin 方法
§ 3	217	最小二乘方法
§ 4	222	加权余量方法
§ 5	224	边界元方法
§ 6	228	配点方法
§ 7	229	余量嵌入方法
§ 8	229	半离散 Galerkin 方法
第九章	231	有限元方法
§ 0	231	内逼近
§ 1	234	有限元方法
§ 2	243	障碍问题
第十章	249	摄动方法
§ 0	249	引言
§ 1	250	基本术语
§ 2	251	椭圆型方程的奇摄动
§ 3	256	双曲型方程的奇摄动
§ 4	258	内部层现象
§ 5	260	积分方程的奇摄动
§ 6	264	离散逼近

§ 7	266	两种奇摄动理论
§ 8	275	几点注释
第十一章	279	初值问题
§ 0	279	初值问题与特征
§ 1	281	解的存在与唯一性
§ 2	283	弱解存在的充要条件
§ 3	285	双曲型算子
§ 4	287	双曲型方程解的存在性与 Holmgren 定理
第十二章	295	边值问题
§ 0	295	椭圆型方程
§ 1	296	变分形式
§ 2	299	第一边值问题 (Dirichlet 问题)
§ 3	308	其它边值问题
§ 4	311	在空间 R^n 上的一般二阶椭圆型方程
§ 5	318	弹性理论问题
§ 6	320	稳定流问题
§ 7	322	电磁场问题
§ 8	323	谱问题
第十三章	326	初边值问题
§ 0	326	热传导方程
§ 1	328	一般抛物型方程
§ 2	332	二阶线性抛物型方程
§ 3	337	在 $R^n \times]0, \tau[$ 上的二阶抛物型方程
§ 4	342	流体动力学问题
§ 5	344	几点注释
第十四章	346	变分不等方程
§ 0	346	引言
§ 1	351	解的存在性
§ 2	360	解的正则性
§ 3	365	应用例子

第十五章	375	非线性问题——分叉、怪引子、阵发性与浑沌
§ 0	375	引言
§ 1	376	分叉性与非线性动力系统
§ 2	378	无限与有限、连续与离散
§ 3	383	怪引子、阵发性与浑沌性
§ 4	385	确定性、随机性与测不准
§ 5	389	对称破缺与时空有序
§ 6	390	敏感性与普适性
§ 7	393	结束语
附 录	395	
附录一	395	记号
附录二	397	Bessel 函数 $J_0(x)$ 、 $J_1(x)$ 和 $J_2(x)$ 表
附录三	399	积分变换表
内容索引	404	
参考文献	412	

第 0 章 引 论

§ 0 数学物理与数学模型

数学物理是数学与物理学相结合的一门边缘学科,任务是研究物理对象的数学描述,在数学与物理学中占有重要的地位.

用数学方法研究物理学(包括力学与工程技术)中的具体问题的第一步是依据专门知识领域中由观察和实验所确立的基本规律,摈弃次要属性,借助数学工具建立有关物理量之间相互制约的运动关系.这种数学关系或具体算法称为**数学模型**.这是数学联系实际的关键一步.建立数学模型的目的是运用数学方法对问题求解.因此,数学物理要研究数学模型的求解方法,给出未知物理量的解析表示或数值结果;要研究解的一般性质,解释物理过程的关联与演化.最后,在对基本规律的拟合中,数学模型经受事实的检验.

由于具体问题的复杂性,决定了所需数学工具的多样性.

例如,天体运行的早期研究,先是 Kepler 对 Tycho 的长期大量观测资料作了细致的分析研究,发现行星运行三大规律:椭圆轨道定律——行星运行的轨道是以太阳为一焦点的椭圆;等面积率定律——行星与太阳连线在相同时间内扫过的面积相等;调和定律——行星运行的公转周期的平方等于它与太阳距离的立方.但是,Kepler 没有回答,驱使行星绕日运行的机制是什么? Newton 在 Kepler 工作的基础上提出了万有引力定律——宇宙万物之间的引力与两者质量乘积成正比,与两者的距离平方成反比,基于万有引力定律建立了行星运行的数学模型.这个模型解释了行星运行三大定律和大海的潮汐运动,预报了海王星的存在和 Halle 慧星的轨道周期,给出了人造卫星和宇宙飞船的复杂轨道,在低速运动的范围内精确地回答了运动的机制,反复经受了实践的检验,奠定了整个经典物理学的基础.

物理学中经常出现的数学模型,包括一定形式的一组方程和体现环境的定解条件,称为**数学物理方程**.

物理学规律的数学形式主要是微分方程.因此,数学物理与微分方程理论关系特别密切.关于无穷小变换群下变分不变量的 Noethe 定理及其推广是一系列物理上的守恒定律的数学抽象.古典质点力学研究具有无限自由度的物理系统,其中数学模型是常微分方程;古典场论研究具有无限自由度的物理系统,其中数学模型是偏微分方程;地球物理中,走时反演问题的数学模型是积分方程;中子迁移过程的数学模型是微分积分方程;而在量子力学和量子场论中,数学模型是算子方程.对于确定性系统的必然关系,数学模型是确定性的,使用的数学是经典数学;对于随机性系统的或然关系,数学模型是随机性的,使用的工具是概率统计和过程论;对于模糊系统的不分明关系,数学模型是模糊性的,使用的工具是模糊子集

论和模糊逻辑;对于开放复杂系统的辩证关系,数学模型是智能性的,使用的工具是知识工程和统计逻辑等.

三类典型的数学物理方程是指:18世纪,Taylor研究弦的横向振动提出的反映波的传播现象的波动方程;Laplace潜心天体演化研究用来描述平衡状态的 Laplace 方程;19世纪 Fourier 刻划热传导规律,反映扩散过程的热传导方程.

它们都是物理定律的数学表示.热传导方程是任何物体中不同位置 and 不同时刻的温度变化服从热力学中的 Fourier 定律的结果.特定物体表面的温度状态和开始时物体的温度分布的数学描述分别称为**边界条件与初始条件**,它们是确定特定物体温度变化必须知道的环境条件,简称**定解条件**.

根据问题的具体要求,给出足够精确的解的表示式,正是为了对现象作出定性和定量的各种分析,对观察和实验结果进行细致的拟合和诠释,并对过程发展作出有根据的预测和预报,进一步揭示未知的属性,得到各变量之间更深更多的内在联系以及各种相互作用的机制.这是数学联系实际完成认识运动一个循环的又一关键.

数学物理研究中,首尾两步都是数学与物理共同完成的边缘性工作.人们对复杂的事物的认识不会是一次完成的,总是要通过多次反复,逐次逼近,才能在更高的水平上去把握它.初次建立的数学模型不一定就能给出反映实际物理问题的全部主要特征.甚至从物理上看来不成问题的物理量,作为在定解条件下数学物理方程的解就不一定存在;因此,需要研究解的**存在性问题**.在解存在的情况下,解的个数也可以不止一个,甚至有无穷多个,因而有解的**唯一性问题**.当定解条件由于实验观察误差引起微小变化时,问题的解产生的变化亦应在一定意义下是微小的,才能使数学物理问题的解是实际问题的良好近似,而不至于差之毫厘,失之千里,这就是**稳定性问题**.

存在性、唯一性和稳定性简称适定性.所以,数学物理要研究适定性问题;当然,也要研究**不适定性问题**.适定与不适定性是不同类别数学模型合理性的基础.

在数学物理的研究中,问题所属的物理学、力学和工程技术本身的特殊规律,常常会在问题的严格数学处理之前,提示求解问题的新的思想和方法,促使具体问题的解决.一些现代意义下的综合课题的新的关键的数学模型的建立,有关数学物理问题的解决,同时又常常成为基础数学发展的动力,并且使得这些科学技术部门迅速改变面貌,使学科提高到一个新的水平.

数学物理是与数学分析差不多同时发展起来的古老而又不断发展的数学分支,它的历史可以追溯到 17 世纪 Newton 奠定经典力学、创立微积分学的时候.

19 世纪数学物理的发展是和 Lagrange,Hamilton,Euler,Fourier,Gauss,Riemann 以及其他许多数学和物理学家的名字分不开的.

20 世纪一开始,Hilbert 提出著名的二十三个数学问题,对本世纪的数学发展产生了巨大的影响.其中第六个问题是关于物理学公理的数学处理的.Poincaré 在数学和物理的许多领域中做了开拓性的工作,特别是相对论方面,他早在 1904 年就提出了有关相对论的公理和思想.Von Neumann 对数学物理的贡献也是无与伦比的,他奠定了量子力学的数学基础并在计算机理论和实践上起了决定性作用.20 世纪,数学物理蓬勃发展,在广泛的领域中取得成功,描述物理现象的数学物理方程的类型随之迅速扩大,所用的数学模型自确定型的到随机性的,由连续性的到离散型的,由线性的到非线性的,由局部的到整体的,由解析表示的到

图型和知识表示的,几乎穷尽了所有现代数学分支用得上的有效的工具;使得数学物理很快成为应用数学中发展得最为成熟的分支.

中国学者在分析力学、连续介质力学、规范场论、量子场论、统计物理、等离子体物理、控制论以及大型工业民用建筑、水利水电工程、航天工业、核工业等方面也做出了较好的工作.

数学物理的范围至今尚未固定,主要是较多应用数学来研究的,不同程度公理化了的某些物理学分支.通常包括质点力学、刚体力学、连续介质力学、振动与波、热力学、电磁场理论、相对论、统计力学、等离子体物理、中子迁移理论、随机过程理论以及非平衡态统计等.

数学物理中应用较多的数学工具称为数学物理方法,涉及大部分发展得比较成熟的基础数学的各个分支,通常包括矢量和张量分析、矩阵和线性代数、微分方程、积分方程、变分学与变分不等式、复变函数与特殊函数、集合论、群论、泛函分析、微分流形、纤维丛理论、数理逻辑以及摄动法、有限元法、边界元法等各种近似计算方法.

在数学物理的近代研究中经常是近代物理思想与数学抽象概念的有机结合,充分发挥数学演绎的作用.

由于自身的特点,《苏联百科全书》认为,数学物理是研究建立物理现象的数学模型的理论科学;《不列颠百科全书》认为,物理理论从它们的基础概念直到最后公式和结论,从本质上来说都是数学的,理论物理的语言就是数学.但是,理论物理学毕竟不是数学,数学只是物理学的一种表述工具和论证手段.一般认为:同样是以数学为手段的工作,当研究对象的基本规律尚待进一步揭示时,属于数学物理的范畴;而基本规律确立后的数学演绎性研究才是理论物理.

万有引力理论、电磁场理论、相对论、量子论、量子力学、量子场论、规范场论以及统一场论都是人类智慧的结晶,科学发展的里程碑.这些伟大的发现或定律,从本质上看都是建立在不同数学模型上的精巧结论,反映人类认识物理世界各个领域的不同水平.

例如,高速运行物体的行为就不完全符合 Newton 力学的结论.

1887 年,Michelson-Moley 实验证明了光速不变性,1922 年,Von Fotvos 实验说明引力质量与惯性质量成正比,1905 年至 1912 年与上述两实验的结论相印证,Einstein 以 Riemann 几何为工具,奇迹般地建立了高速物理普遍适用的数学模型——相对论,阐明了引力即是时空的曲率效应,预测了水星近日点的进动和光线偏折等现象,取得了划时代的成功.相对论是近代物理与数学有机结合的典范,也是数学物理认识又一个循环的光辉成就.

数学物理的成就有赖于数学理论的储备和物理本质的深入研究,Einstein 率先探索统一场论,就因物理观测和实验资料过少,未能如愿.统一场论遇到巨大困难和近代物理的进展表明,相对论也不应是最终的理论,预示数学物理酝酿着认识的又一轮提高.

经典的微分几何是研究空间的局部性质的;拓扑学则着重研究空间的整体性.这两门基础数学的结合是通过整体几何实现的.它力求由空间的局部信息给出空间的全局性质.纤维丛理论是这一研究中的有力拓扑工具,60 年代发现纤维丛积分是量子场论实现由特殊相对性向一般相对性转化的原则和机制;规范场恰恰是以某种复杂的对称群为纤维丛上的连络.数学与物理又在各自独立发展的新的水平上结合起来了.沿着杨振宁和 Mills 在 1954 年开始的规范理论的思想,物理学家 Glashow, Weinberg, Salam 终于在弱电统一理论上取得巨大的成功,荣获了 1979 年 Nobel 物理奖.此后各种强弱电统一理论和包括引力在内的超统一理论相继诞生.纤维丛理论则为它们提供了非常合适的数学框架.各种统一场论成功的数学

模型,协同理论的进展,五对称准晶态的发现为数学物理又开辟了新的领域.新近,大部分在物理学中显示巨大威力的新的数学思想也均来自几何与分析的交叉处.

在力学中也有和相对论类似的进程,称为理性力学;如果将连续介质力学看作是力学的一次数学化,则它可以看作是力学的二次数学化.1972年把连续介质看作是微分流形上赋予一定结构的对象,而以其切空间上的配位构形来刻画介质的变形过程;将体元定义为切空间、配位构形和变形过程集的三元体;在一定的公理系统下,对切空间引入拓扑结构、群结构,用对偶切空间到切空间的映射来描述应力,建立连续介质力学的数学模型,充分发挥数学演绎的作用.由于混合型方程的深入研究,先进的跨音速机翼的设计成功使得油耗极小的波音767机成为航空工业的劲旅.因此有人将掌握数学的程度视作度量科技人才素质的主要尺度.

数学物理的另一个有力的工具是计算机.电子计算机的使用为数学物理方程的求解、数值模拟、数字仿真、模型的计算机辅助设计提供了理想的工具,加强了数学物理在工农业、国防,特别是在高科技的发展中的作用和地位.数学物理方程的建立是求解的反演,因此是数学物理中的反问题.计算机更是解决数学物理反问题,或者在一定条件下进行模型识别的有力助手.这种系统识别的方法在卫星遥测、资源勘察、图像重构及军事侦察上有重要的应用.Hounsfield-Cormack因发明X-射线分层立体成像技术而获1979年Nobel医学奖.数学上关键的一步是用计算机实现反演运算.因此,高技术本质上是一种物化了的数学技术,现代化在某种意义上就是数学化.

§1 数学模型与黑箱

用控制论的形象语言,大量工程与科学中的问题突出主要矛盾,去掉次要矛盾,可以视为一个黑箱问题.由于一开始并不知道装着问题的箱子(图0.1.1)的内部结构,所以称之为黑箱.人们只能从输入 X 和输出 Y 之间的唯象对应来弄清箱子的功能与结构的内在联系:

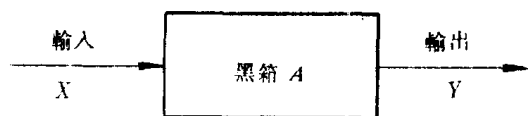


图 0.1.1

$$Y = AX. \quad (0.1.1)$$

用数学语言来翻译, A 是一种对应规则,是一种算子.已知 X 和 Y 来弄清 A 的具体形式是数学物理的反问题,算子 A 或方程(0.1.1)就是数学模型.当 A 部分已知时,我们称它为灰箱问题;当 A 全部被弄清后便成为白箱问题.建立问题的数学模型的过程就是使黑箱变为白箱的过程,在控制论中叫做系统的辨识,在公安工作中叫做破案.例如:

1° 把一个变阻器看成一个黑箱,输入电流 I ,输出电压降 V ,发现 V 与 I 成线性关系,即: $V=RI$.电阻 R 或Ohm定律即是这一黑箱的数学模型.

2° 将质量为 m 的质点在输入力 F 作用下的运动视作黑箱,力的方向上产生的位移 S 作为输出.我们知道: $F=(m\frac{\partial^2}{\partial t^2})S$, $(m\frac{\partial^2}{\partial t^2})$ 或牛顿定律即为这一黑箱的数学模型.

3° 以人体为黑箱,望、问、闻、切为输入,各种体征为输出,诊断疾病的方法的数学模型