

不变量理论

现代连续统物理丛书

3

〔美〕 A. C. 爱林根 主 编

张 文 等 译



江苏科学技术出版社

现代连续统物理丛书

第三分册

TZ1169/14

不变量理论

〔美〕A. J. M. 斯 宾 塞 著

张 文 陆章基 盛芬云 译

黄城超 马文华 校

江苏科学技术出版社

CONTINUUM PHYSICS

*

A.J.M. Spencer

Theory of Invariants

ACADEMIC PRESS, 1976

现代连续统物理丛书

第三分册

不变量理论

[美] A.J.M. 斯宾塞著

张文等译

出版：江苏科学技术出版社

发行：江苏省新华书店

印刷：淮海印刷厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 5 字数 100,000

1982 年 6 月第 1 版 1982 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—3,000 册

书号：13196·095 定价：0.55 元

责任编辑 王永发

《现代连续统物理丛书》译序

中国力学学会理性力学与力学中数学方法专业组，于一九七九年八月一日至十九日在兰州大学举办了第一次理性力学讲学讨论会。会上来自全国二十七所高等院校和中国科学院力学研究所、计算中心的全体代表共同商定组织翻译由美国普林斯登大学 A.C.Eringen 教授主编的《连续统物理》(卷1—卷4)一书，共分十七分册，争取于一九八〇、一九八一年陆续出版，以利于推进我国理性力学的发展。今得江苏科学技术出版社的大力支持，本《丛书》终于和读者见面了。原主编 A.C.Eringen 教授亲自撰就中文版序言，并为本《丛书》在我国翻译出版给予了热情的支持。

理性力学是在近代生产的大量经验事实的基础上，建立起较完备的公理体系，运用物质运动所必须遵循的基本定律，以严密的逻辑思维和推理方法去研究连续介质（简称连续统）的物质运动和变形的一般性规律的力学。它只有二十多年的历史。当然，关于用理性的方法对连续介质运动普遍规律的研究，最早应溯及贝努里、欧拉、柯西等著名的数学家和力学家；理性力学的学科名词也始见于该时。但从十九世纪末至二十世纪中，力学界主要着眼于传统力学在生产实际中的应用，而一度忽视了对连续介质力学的基础理论的探讨。人类工业生产的发展，引用了许多新材料，对原有材料的使用也大大地扩大了范围。只依靠象弹性材料这样简单材料的力学——弹性力学或一般流体力学，显然不能满足人们

的生产要求了。这种情况,从一九四五年起开始发生了变化, M.Reiner和R.S.Rivlin等人对橡皮物质大变形的研究,接着 一九四八年 J. D. Oldroyd 对流变物质状态方程的研究,逐步为形成近代理性力学创造了条件。C. A. Truesdell, W. Noll 和 B. D. Coleman 等人从一九五八年后提出了更加完善的关于构造物质运动本构方程的公理体系,建立了各类物质本构方程的严密的数学模型,使理性力学形成了一个比较完善的理论体系,澄清了应用力学中关于应力、应变、应力率、应变率等含糊不清的基本概念。在此基础上,对物质进行了分类,确立了简单物质的谱系,并对谱系中各种物质(弹性物质、粘弹性物质、超弹性物质、次弹性物质)的本构方程进行了广泛深入的研究,用逆法或半逆法找到了在有限变形条件下不少问题的精确解。这就把二十世纪初蓬勃发展起来的应用力学的研究范围大大地推进了一步,即把通常用线性物性方程如 Hooke 弹性体,Maxwell、Voigt 和 Boltzmann 线性粘弹性体,Newton 粘性流体的研究范畴,推进到非线性物性方程的研究范畴,而且考虑了机械变形和热、电、磁各种非线性耦合效应。与此同时,提出了各种新型物质如液晶、微极物质、微态物质、非局部物质、位错连续统的数学模型,并进行了大力的研究。在此基础上,逐步形成了前途十分广阔的新学科、新方向。这一切使我们对客观世界的认识更加深了。理性力学也研究连续统在热、电、磁等和力学的耦合现象,因此,被称为连续统物理。

理性力学与近代数学有着密切的联系,在其发展过程中,用到了近代数学中包括张量分析、微分几何、不变量理论、群论、泛涵分析、拓扑学、解析函数论等许多基础知识。目前,尤其在欧洲业已形成了用纯粹数学来研究力学理论的

I

新学派。因此，理性力学在其发展过程中，虽曾经历了一段曲折的道路，但经过二、三十年的奋斗，作为连续介质力学的理论基础，业已牢牢地树立了自己的地位。在国际上，它强烈地影响着传统的力学教育和力学研究，也大大地增强了力学处理现实生产问题和近代新型工业材料的能力。

A.C.Eringen 主编的《连续统物理》就包括了这一学科的几乎全部的现代成就，所以本《丛书》译名定为《现代连续统物理》。本《丛书》的译审小组成员：钱伟长(组长)、叶开沅、朱兆祥、朱照宣、汪家诩、苗天德、周焕文、张文、段祝平、戴天民。

钱 伟 长

一九七九年十二月八日于清华园

中 译 本 序

当前，在所有物理学理论的构造中，共有两种基本的数学模型：一是离散体模型，另一是连续统模型。离散体模型认为，物体是由大量具有确定物理性质（如质量、电荷），彼此又相互吸引而聚集在一起的几何点的集合所组成的。这方面最突出的例子莫过于原子模型了。虽然，对许多物质理论，牛顿力学仍然适用，但原子模型的基本定律则由量子力学所描述的。

连续统模型则引用场的概念去描述物体的几何点，不必去区分构成该物体的一个个粒子间的差异。在物体任一点上可以确定一个密度，例如质量密度、电荷密度和能量密度，不再把它们加以量子化。此外，表面上的点具有面密度，如应力和热流。在连续统模型中运用的物理定律是各种守恒律，此外还由本构方程予以补充。

一个数学模型，不论它是多么的谨严，也决不能真真实实地一丝不差地表达出物质的物理学规律的。外部特征长度（和/或时间）与物体内部特征长度（和/或时间）的比值决定了该物体对外界作用的反应。当外界作用的载荷给出的波长大大超过颗粒（原子）间的距离时，经典场论得到的结果和实验观测相符合。当该比值趋近1时，离散体模型便将取而代之了。但当特征长度的比值小于1时，点粒子（原子）可再度认为具有连续统的特性。这时，可把物体考虑成是由离散的连续体的集合组成的。在这里，我们明确地看到了离

散体和连续体这两种模型交织在一起的混合模型。

量子力学是在一种尺度上建立起来的。而相对性场论用的是另一种尺度，这就足以使我们相信，一切离散体的模型和连续统的模型都具有它们理论自身适用的范畴，这种适用性取决于我们所要求的精度。

人们常说，原子模型描述了“真实的世界”。其实，这种说法仍然只是一种个人的喜爱或抱有成见的观点，因为几何点没有尺度就不可能具有诸如质量、电荷这样的物理属性的。相反地，对连续统模型又怎样呢？这里，几何点是用场来描述的。按此逻辑，连续统模型要比离散体模型“更加真实”。其实，这个结论也会给人以一种错觉，因为不可能有纯粹是几何点构造的物体的。

一种理论当它能说明许许多多的物理现象而同时结构简单又具有完美的感染力时才是最有生命力的。

过去的二十年，连续统场论在两个基本方面取得了重大的进展：（一）建立了经典的线性和非线性场论的数学模型。（二）把微极场论和非局部场论引导到具有内部结构的物质研究中去。在第一方面，我们有：非线性弹性理论、流体动力学、与记忆有关的弹性体、与记忆有关的流体、混合物理论以及电磁场理论。我们已毫不含糊地确立了普遍适用于这些场的基本定律，同时本构方程也有了更加坚实牢靠的基础。

研究这些基础理论产生了丰硕的成果，人们不但揭示了在这些乍看上去互不相同的物理场之间存在着基本的结构和统一的原理，而且能够更加深入和广泛地把我们的研究范畴扩大到包括复合介质（固体和流体的混和物、多孔介质）和有电磁场作用的变形介质中去。本专著第二卷和第三卷分别

讨论了由单一物质和混合物组成的基本原理和本构理论。

经典场论不包含有内在的特征长度，所以它只限于在宏观物理学的范畴内应用。随着微极场论和非局部场论的发展，我们进入了具有内部结构的物质领域。属于微极理论和非局部理论应用范畴的例子有：颗粒固体、非结晶材料、复合材料、多孔材料、各向异性流体、悬浮体、血液、液晶和磁性材料等等。诚然，数学上已有了相当多的解可以作为我们的证明，但人们还在期待着有更多的解的到来。非局部场论实际上具有一种潜在的力量，它可以解释和预言在分子和原子尺度范围内发生的物理现象。对这一点，看一看近来在波的传播、位错理论、断裂力学（例如，裂纹尖端问题）等领域内获得的结果便会深信无疑了。本专著第四卷对微极理论和非局部理论进行了讨论，第三卷讨论微磁场理论。可惜的是，在本专著出版的时候，尚无这一方面的更多解法和其它的结果，因而只能暂付阙如。

毫无疑问，一切理论随着时间的流逝，都会对其作出修改，同时会给出更加满意的证明。尽管如此，所有的物理学理论，倘若得以生存，还必须经受住来自实验的严峻考验。有些时候，实验期待着上升到理论的高度（例如液晶），有时，为提出一个决定性的实验却需要得到一些更新的数学解法。

在连续统场论发展的过程中，数学的许多分支起到了重要的作用。本专著第一卷包含的数学内容就是根据编者在撰稿时的喜爱选择的。由于篇幅有限，无奈有不少重要的其它的数学分支都不在本卷选编之列。

这四卷专著译成中文，本人感到极为荣幸。现代连续统场论能和这样广大的中国读者见面，这在开拓其它理论领域

和发展科学及技术的应用方面必将产生重大效果。我们希望，
中译本的出版也将为加强中美之间的友谊作出贡献。

A.C.爱林根

一九八〇年五月

主 编 者 原 序

在过去十年里，连续统场论的基础和有关应用都得到了
一些明确而又重大的进展，变形介质的几何学和运动学都已
严格地建立起来了。单一介质、材料的混合物和具有微结构
的材料平衡定律已经形成了。具有单一材料的连续介质的
热力学取得了牢固的基础，而且，在建立混合物和具有化学
反应的介质的热力学方面，也取得了重大的进步。我们已经
有了一个包罗万象的而且严格的本构方程理论，它已成功地
应用于许多特殊类型的材料，例如，非线性弹性体、非牛顿
流体、记忆性材料、混合物以及电磁固体和流体等。除此而
外，还认真地用不同的几何学在各种不同类型的介质中寻找
过非线性静力学和非线性波动学问题的各种解。

面对着这类研究工作的爆炸性的快速发展，即使专家也
很难跟上去、理解它，并把它用在各自的研究工作中去。由
于这个领域的文献既广泛又分散，搜寻、阅读和理解这些文
献的确存在着困难。许多在古典领域中进行研究工作的人员
都遇到了上述实际困难；不少新形成的学派，还是孤立地工
作着的。

三卷本^①的《连续统物理》就是为各个互不联系的专家和
学者提供必要的基础来阅读连续统物理各个方面的最新文

① 译注 后来又出了第四卷，主要介绍了在广义连续统的理论的
研究基础上建立起来的微极场论、非局部场论和非局部微极场论。

献。这样，我们希望不同领域的研究工作者能够携起手来，共同工作，而且从其它领域发展的一些强有力的方法中，各自有所借镜。

我们一定要在非线性和发展得很完善的古典线性理论以及近似理论之间，建立种种桥梁。通过谨慎地选择问题和选择解法，非线性场论和线性场论在某些应用中将能带来有意义的启发。

这个规划是宏伟的。在建立过程中，常常诱使人们追求详尽。力求完备的心情是不小的。如果我们不注意克服这种意图，常常会使我们偏离基本目标，不仅不能保持头脑清醒，反而引起更多的混乱和失望。所以，我们不得不在许多重要的领域内采取简述，在另一些领域内，力求严加选材。

在第一卷内，我们致力于讨论一些选用的数学方法。每个方法都只能有精简的分量。在连续统物理研究工作中，几乎要用到所有数学领域，哪怕只用一点点，但都有一席之地。我们只选取了数学的六个领域，在连续统物理的发展中，它们都曾占有了中心地位，并曾反复使用过的。它们是张量分析、群论、不变量理论、泛函分析、解析函数论、随机过程。它们都纳入第一卷的第一至第四部分。不幸的是，还有许多数学领域同样地是基础，但只好割爱了。它们包括偏微分方程、积分方程、可微的和拓扑的流形等诸重要领域。

本书的第二卷，致力于单一材料连续统的非线性理论，讲述了变形的几何学和运动学，讨论了平衡定律、热力学和本构理论。第二卷第一部分是基础理论，它专门处理热弹性固体，热粘性流体，塑性力学以及与记忆有关的材料。第二卷第二第三部分涉及固体介质和流体介质的非线性静动力学诸问题的解法。为了阐明使用积分方程和解析函数论的基本

数学方法，这里也处理了线性理论和一些重要的线性混合边界值问题。近似法和数值法同样是重要的，但并未包括在本卷之内。

本书的第三卷致力于混合物、位错和电磁相互作用的连续统理论。

我必须声明：本书得到了许多作者愉快的合作，没有他们的贡献，本书的目的就无法实现。为此，我向他们致谢。我和我的同事之间的友好的讨论，耐心的修订和热忱的工作，经常给我不断的鼓励。

许多文章不仅是已知材料的重新组织，而且包括着作者们的新发现。我们诚恳希望，这些工作不仅对研究人员有帮助，而且也可以供工程和应用科学、应用数学和数学物理的研究生教学学习之用。

A . C . 爱林根

目 录

《现代连续统物理丛书》译序	I
中译本序	IV
主编者原序	VII
第 1 章 引论	1
1.1 向量和张量的不变量	3
1.2 可约的和不可约的不变量 整基	7
1.3 经典理论结果	8
1.4 正交群和某些子群	12
第 2 章 各向同性	20
2.1 向量的整基	20
2.2 各向同性张量	24
2.3 向量和二阶张量的不变量 一般形式	27
2.4 关于矩阵多项式迹的结果	29
2.5 对称二阶张量的不变量	37
2.6 向量和对称二阶张量的不变量 正常正交群	45
2.7 完全正交群 向量和二阶张量的不变量	62
第 3 章 横观各向同性	67
3.1 向量和张量的不变量 一般形式	67
3.2 2×2 矩阵的矩阵多项式的关系	70
3.3 对称二阶张量的不变量	72
3.4 对称二阶张量和向量的不变量	75
3.5 不变量的合冲	80
第 4 章 晶类	85

4.1	关于整基的定理	85
4.2	对称张量的不变量	89
4.3	单个对称张量的不变量之间的合冲	93
4.4	一个对称张量和一个向量的不变量	95
4.5	任意数目向量的不变量	97
第 5 章	向量和张量的张量多项式函数	101
5.1	概述	101
5.2	张量和向量多项式函数的例子 正常正交变换群	105
5.3	张量和向量多项式函数的例子 完全正交变换群	112
第 6 章	不变量泛函 向量和张量泛函	118
6.1	概述	118
6.2	泛函的微分近似	120
6.3	泛函的积分近似	121
第 7 章	整基的最小性	123
7.1	线性独立不变量的数目	123
7.2	论证整基最小性的方法	134
7.3	整基的最小性 晶类	137
7.4	整基的最小性 完全和正常正交群	138
第 8 章	非多项式不变量	139
8.1	非多项式不变量	139
参考文献		141

第1章 引 论

在许多数学和物理学分支中，例如在射影几何和量子力学中，不变量理论起着重要作用。本章的目的是从它应用于近代连续体力学的观点提供一个代数不变量理论的叙述。

可以在文献中找到连续体力学问题中许多个别场合不变量原理的应用，但是仅在近期才普遍地意识到这些原理的重要性。

在连续体力学中，不变量理论应用的近代研究大部分来自里夫林关于弹性应变能函数(1948a 和随后许多论文)以及里纳和里夫林(1948b)关于非牛顿流体的本构方程的工作。奥尔德罗伊特(1950)对较一般粘弹材料完全不变的本构方程公式作了考虑。里夫林和埃里克逊(1955)从不同的观点着手研究非线性粘弹材料，他们的出发点是提出把应力张量分量用某些运动学张量分量的多项式表达(或近似表达)，并带有适当的不变性特性。而材料的对称性则对本构方程形式再强加某些不变性要求。这个理论已获得极大发展并由里夫林作了总结(1965a, b)。粘弹材料理论的另一种形式是把应力分量表示成应变或应变率的泛函，它由格林和里夫林(1957)和诺尔(1958)提出。在这些理论中，当材料呈现对称性时，本构泛函的形式是服从不变性条件的。粘弹性的这个泛函理论也已是一大批研究的课题；该理论，以及它与上面提到的早先的理论的关系也由里夫林所总结(1965a, b)。利用类似于在粘弹性理论中使用的方法，在连续统物理中更

一般类问题的本构方程的表述已由匹卜金和里夫林(1959)以及里夫林所叙述。

上面提到的文章,至少是部分地述及到连续体力学和物理学中不变量原理的应用(不想全部列举)。由这些应用引起的不变量理论专门问题的研究构成本书的大部分内容,而参考文献在随后章节的适当处给出。从各种观点介绍连续体力学近代一般理论的有屈劳斯台尔(1952),屈劳斯台尔和图平(1960),屈劳斯台尔和诺尔(1965),格林和阿特金(1960),埃林根(1962)和谢道夫(1962)。这些书中的某些提出了不变量理论的一些讨论。

尽管本书意图是为连续体力学应用而写的,但本书不打算涉及不变量理论的应用而宁愿提供一个完全自身独立的数学理论介绍。当然,所讨论的许多问题在连续体力学以及领域中也有应用,事实上,本书采用了代数不变量经典理论的部分材料(主要是几何学的推动)和广泛用于量子力学的群表示论的结果。但凡目前看不出能应用于连续体力学的论题已删去。例如,不讨论完全线性变换群或洛伦兹变换下的不变性;不讨论多于三维的向量和张量的不变量,虽然有时从二维和三维推广到 n 维是很直接的。

仍采用应用领域所规定的术语和大部分符号。不变量均认为是向量和张量的不变量,它们可赋以物理解释而不象经典理论那样看作代数形式。使用矩阵记号并将矩阵与向量和张量相关联常常是方便的。

本章其余篇幅是涉及符号和定义,介绍经典不变量理论一些结果,讨论连续体力学中很重要的一些变换群。本书主要内容是在第2—4章中,那里系统地讨论在各种正交变换群下向量和张量的不变量。第5章讨论形式不变的张量多项