

高等学校教学用书

数学物理方法 教程

潘 忠 诚 编

南 开 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书基本上按照1980年高等学校理科教材编审委员会审订的《综合大学物理学专业的数学物理方法教学大纲》编写的。内容包括复变函数论和数学物理方程两部分,共十九章。本书的内容安排系统条理、层次清晰,叙述深入浅出,语言简练。为了开阔学生的视野和更新知识,本书也增加一些有重要应用的内容。

本书包括讲授、习题课和学生自学与提高的内容,具有既便于教又便于学的特点。

本书可作为理工科大学、高等师范院校物理学及相关专业的教学用书,也可供有关科技人员参考。

〔津〕新登字011号

数学物理方法教程

潘忠诚 编

南开大学出版社出版

(天津八里台南开大学校内)

邮政编码300071 电话349318

新华书店天津发行所发行

河北省邮电印刷厂印刷

1993年2月第1版

1993年2月第1次印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 23.875 插页2

字数: 596 千

印数: 1-2 500

ISBN 7-310-00456-6/O·67 定价: 15.00 元

序 言

《数学物理方法教程》是根据我的《数学物理方法讲义》加工而成的。本书基本上是按教学大纲（1980年高等学校理科教材编审委员会审订的《综合大学物理学专业的数学物理方法教学大纲》）规定的内容进行编写的。但在不过多增加难度的情况下，适当做些延伸增加一些有重要应用的新内容。我们考虑，这样既给教师在选择内容上有伸缩余地，同时也给学生在自己阅读时提供方便，有利于开阔学生视野和更新知识。

对大多数学生而言，大学学习是他们系统学习的“最后阶段”，因而应创造条件减少他们对老师的依赖性，培养和提高他们的自学能力。所以在编写本书时，起点适当降低一些；在容易出问题或较难的地方多做解释，或结合例子予以说明。同时考虑本门课的特点，在本书中列举较多的不同类型或较难的例题，以加深理解内容和增强解题能力的训练。

因此可以说，本书包括了讲授内容、习题课以及学生自己阅读和提高的内容。我们认为，课本内容应该丰富些，但讲授不必讲得过多，有些内容由学生根据个人条件灵活地进行学习。作为教材，应具有既便于教又便于学的特点。

对于非数学专业的学生来讲，他们不太喜欢数学的某些繁琐的证明，但却常常追求“严谨”。为此，我们在叙述问题时注意层次清晰、条理和直观，语言力求简洁精炼和深入浅出。而且为了便于学生理解与掌握，我们也注意对内容的归纳、对比与系统性。对一些其他书介绍较少的内容以及容易混淆的问题，我们也给以应有的

注意。

本教程分上下两篇。上篇是复变函数论，首先从一般复变函数引入解析函数，然后依次介绍解析函数的积分、级数表示、留数及应用和保角变换等。此外，还介绍Fourier变换与Laplace变换，以及 δ 函数、 Γ 函数与B函数等。

下篇是数学物理方程，首先导出三类数理方程并给出定解条件，继之介绍简单的有界与无界问题的分离变量法。在曲面坐标系中分离变量并介绍微分方程的级数解法，在此基础上介绍特殊函数。然后介绍Green函数法（和其他一些解法）、变分法以及积分方程。最后讨论定解问题的适定性问题。

在编写本书时，主要参考以下诸书：

1. 郭敦仁：数学物理方法；
2. 梁昆森：数学物理方法；
3. 王竹溪、郭敦仁：特殊函数概论；
4. 沈燮昌：复变函数论基础；
5. 复旦大学数学系：数学物理方程；
6. 四川大学数学系：高等数学（第四册）；
7. J. E. Marsden: *Basic complex analysis*, (1973);
8. F.B.Hildebrand: *Advanced calculus for applications*, (1976);
9. Tyn Myint-U: *Partical differential equations of mathematical physics*, (1973);
10. H.W.Wyld: *Mathematical methods for physics*, (1976).

本书中有些引文是取自以上诸书，恕不一一注明；其中部分习题是取自书〔2〕（该书习题已有题解正式出版，需要时可做参考）。本书初稿承郭敦仁和梁昆森两位教授审阅，在此特致谢意。在成书过程中，得到何国柱、丁乃岩、郑世安、温景嵩等教授的帮助与支持，以及出版时得到原教务处长姚家超、副教务长黄成龙、教授

王家骅和编辑李江卫等同志的支持与关怀，在此一并表示感谢。由于笔者水平有限，错讹在所难免，请阅者不吝批评指正。

潘忠诚

1991年4月于南开园

目 录

上篇 复变函数论

1 复变函数与解析函数

- 1.1 复数表示与运算 (3)
 - 1. 复数表示 2. 复数运算 习题
- 1.2 复变函数 (11)
 - 1. 复变函数的定义与区域 2. 映射(变换) 3. 复变函数的极限与连续性 习题
- 1.3 复变函数的导数 (18)
 - 1. 导数的定义与几何意义 2. 可导条件 习题
- 1.4 解析函数 (25)
 - 1. 解析函数的性质 2. 初等解析函数 习题
- 1.5 多值函数 (34)
 - 1. 根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 2. 函数 $\sqrt{z^2-1}$ 3. 对数函数
 - 4. 反三角函数 习题

2 解析函数积分

- 2.6 复变函数积分 (47)
 - 1. 复变函数积分的定义 2. 复变函数积分的性质 习题
- 2.7 Cauchy定理 (50)
 - 1. 单通区域的Cauchy定理 2. 不定积分 3. 复通区域的Cauchy定理 习题
- 2.8 Cauchy公式 (57)

1. 有界区域的Cauchy公式 2. 无界区域的Cauchy公式
3. Cauchy公式的几个推论 习题

3 解析函数的级数表示

- 3.9 级数 (65)
 1. 复数级数 2. 复变函数级数
- 3.10 幂级数 (73)
 1. 幂级数的收敛性 2. 收敛半径的求法 3. 幂级数举例
习题
- 3.11 Taylor级数 (79)
 1. Taylor展开 2. Taylor展开举例 3. 其他展开法
习题
- 3.12 Laurent级数 (88)
 1. Laurent展开 2. 展开方法 习题
- 3.13 奇点的分类 (96)
 1. 孤立奇点与非孤立奇点 2. 孤立奇点的分类 3. 无穷
远点的奇点 习题

4 留数

- 4.14 留数定理 (103)
 1. 留数的定义与定理 2. 留数的求法 习题
- 4.15 应用留数计算定积分 (110)
 1. 三角函数的有理函数积分 2. 积分主值 3. 无穷积分
 4. 三角函数的无穷积分 Jordan引理 5. 实轴上有
奇点的积分 6. 复变函数积分小结 习题
- 4.16 其他类型的积分 (125)
 1. 几种不同回路的积分 2. 多值函数的积分 3. 计算
整数级数和 习题
- 4.17 辐角原理 (139)
 1. 辐角原理 2. Rouché定理

July 27/09

5 保角映射

5.18 映射的基本性质 (143)

1. 保角性 2. Riemann定理

5.19 几种基本映射 (146)

1. 平移映射 2. 转动映射 3. 相似映射 4. 反演映射
5. 幂函数和根式函数表示的映射 6. 指数函数和对数
函数表示的映射 习题

5.20 分式线性映射 (154)

1. 分式线性映射 2. 分式线性映射的性质 3. 举例
习题

5.21 其他映射 (162)

1. Rukovsky映射 2. 机翼映射 3. 多角形映射
习题

6 解析函数的应用和解析延拓

6.22 平面电场 (173)

1. 复势 2. 环量与通量 3. 举例 习题

6.23 平面速度场 (180)

1. 速度场的复势 2. 绕流

6.24 解析函数在实轴上的性质 (185)

1. 由实轴上的值决定解析函数, Hilbert变换 2. Dirac
公式

6.25 解析延拓 (190)

1. 解析延拓 2. 延拓的唯一性

7 积分变换

7.26 Fourier变换 (194)

1. Fourier积分 2. Fourier变换 3. Fourier变换
的性质 习题

7.27 Laplace变换 (210)

1. Laplace变换的引入 2. Laplace变换的几个简例

3. Laplace变换的性质 习题

7.28 Laplace逆变换(反演) (216)

1. 象函数的导数与积分的反演 2. 卷积定理

3. Laplace变换的普遍反演公式 4. Laplace变换的应用 习题

附表 Laplace变换简表 (230)

8 δ 函数、 Γ 函数与B函数

8.29 δ 函数 (231)

1. δ 函数的引入 2. δ 函数的性质 3. δ 函数的积分变换 4. δ 函数的几种表达式 5. 多维 δ 函数

8.30 Γ 函数与B函数 (241)

1. Γ 函数的定义 2. Γ 函数的性质 3. Γ 函数的解析延拓 4. Γ 函数的渐近表示(Stirling公式) 5. B函数

下篇 数学物理方程

9 定解问题

9.31 方程的导出 (255)

1. 波动方程 2. 输运方程 3. 稳定态方程 习题

9.32 定解条件 (277)

1. 起始条件 2. 边界条件 3. 其他条件 4. 定解问题的表述 5. 例题 习题

9.33 二阶线性偏微分方程的性质 (291)

1. 二阶偏微分方程的分类 2. 叠加原理 3. 求偏微分方程的通解 习题

10 分离变量法(有界问题)

10.34 齐次方程的解 (301)

1. 弦振动问题 2. 热传导问题 3. 稳态问题 习题

10.35 非齐次方程的解法 (311)

1. 本征函数法 2. 冲量法 3. 特解法 习题

10.36 非齐次边界条件的处理 (334)

1. 第一类非齐次边界条件 2. 第二类非齐次边界条件

10.37 例题 习题 (341)

11 分离变量法 (无界问题)

11.38 齐次方程的解 (353)

1. 波动问题 2. 扩散问题 习题

11.39 非齐次方程的解法 (367)

1. Fourier积分法 2. 冲量法 习题

11.40 有界问题的无界处理 (374)

1. 齐次波动方程的半无界延拓 2. 齐次扩散方程的半无界延拓 3. 非齐次方程的半无界延拓 4. 有界问题的延拓 5. 波在突变点的反射与透射

11.41 例题 习题 (396)

附表 误差函数表 (404)

12 二阶常微分方程与本征值问题

12.42 正交曲面坐标系中方程的变数分离 (405)

1. 三维方程的时间变数分离 2. 在直角坐标系中的变数分离 3. 在柱坐标系中的变数分离 4. 在球坐标系中的变数分离 习题

12.43 二阶常微分方程的级数解法 (417)

1. 方程的系数与解的关系 2. 常点邻域的解 3. 正则奇点邻域的解 习题

12.44 超几何函数与合流超几何函数 (432)

1. Gauss方程的解 2. Chebyshev多项式 3. 合流超几何函数

12.45 Sturm-Liouville本征值问题 (441)

1. Sturm-Liouville型方程 2. 本征值问题的性质

附录 正交曲面坐标系 (450)

13 Legendre函数

13.46 Legendre方程的解 (462)

1. Legendre方程的级数解法
2. Legendre多项式
3. 微分表示——Rodrigues公式
4. 积分表示——Schläfli积分
5. 第二类Legendre函数

13.47 Legendre多项式的性质 (473)

1. 正交性
2. 模与归一化
3. 完备性
4. 生成函数
5. 递推公式 习题

13.48 例题 习题 (482)

13.49 连带Legendre函数 (490)

1. 连带Legendre方程的解
2. 微分表示——Rodrigues公式
3. 积分表示——Schläfli积分
4. 正交性与模
5. 完备性
6. 递推公式

13.50 球函数 (497)

1. 球函数的引入
2. 正交性与模
3. 完备性
4. 加法公式

13.51 例题 习题 (505)

14 Bessel函数

14.52 Bessel方程的解 (515)

1. Bessel方程的级数解法
2. 第一类Bessel函数
3. 第二类Bessel函数
4. 第三类Bessel函数

14.53 Bessel函数的性质 (526)

1. Bessel函数的零点
2. 递推公式
3. 生成函数
4. 积分表示
5. 加法公式
6. 渐近表示(最陡下降法) 习题

14.54 Bessel方程的本征值问题 (540)

1. Bessel方程的本征值
2. 正交性
3. 模
4. 完备性

14.55 例题 习题 (54')

14.56	变型Bessel函数	(556)
1.	第一类变型Bessel函数	
2.	第二类变型Bessel函数	
3.	变型Bessel函数的奇点与渐近表示	
4.	例题	
	习题	
14.57	球Bessel函数	(565)
1.	球Bessel方程的解	
2.	球Bessel函数的递推关系	
3.	奇点与渐近表示	
4.	球Bessel方程的本征值问题	
	习题	
14.58	柱面波与球面波	(572)
1.	柱面波	
2.	球面波	
14.59	可化为Bessel方程的方程	(579)
1.	Kelvin (W. Thomson) 方程	
2.	其他例子	
3.	含Bessel函数的积分	
14.60	例题 习题	(582)
	附表 Bessel函数表	(589)
15	Green函数法	
15.61	无界问题的Green函数 (基本解)	(581)
1.	基本解的引入	
2.	Poisson方程的基本解	
3.	Helmholtz方程的基本解	
15.62	有界空间的Green函数	(598)
1.	Green公式	
2.	Green函数的对称性	
3.	Poisson	
	方程的边值问题	
4.	Helmholtz方程的边值问题	
15.63	用电象法求Green函数	(607)
1.	求Green函数	
2.	Laplace方程的边值问题	
15.64	例题 习题	(613)
15.65	用展开法求Green函数	(619)
1.	三维Laplace方程的基本解	
2.	有界域Laplace方程	
	的Green函数	
3.	Helmholtz方程的基本解	
15.66	含时间的Green函数	(624)

1. 波动方程的Green函数 2. 扩散方程的Green函数

习题

16 其他解法

- 16.67 直接积分法与平均值法 (630)

1. 直接积分法 2. 平均值法 3. 降维法

- 16.68 三维方程的Fourier积分法 (639)

1. 齐次波动方程 2. 非齐次波动方程 3. 齐次扩散方程

4. 非齐次扩散方程 5. 非齐次稳态方程

- 16.69 例题 习题 (650)

- 16.70 Laplace变换法 (657)

习题

- 16.71 保角变换在定解问题中的应用 (663)

1. 方程的保角变换 2. 椭圆柱的绕流问题

17 变分法

- 17.72 泛函极值 (671)

1. 泛函 2. 泛函的极值 3. 泛函的条件极值

- 17.73 泛函变分与导数 (683)

1. 泛函变分 2. 泛函导数 3. 变端点的泛函极值

- 17.74 本征值问题与边值问题 (686)

1. 本征值问题 2. 边值问题

- 17.75 Ritz方法 (670)

习题

18 积分方程

- 18.76 积分方程的分类 (695)

1. 积分方程的引入 2. 积分方程的分类 3. 核的性质
与分类 4. 本征值问题

- 18.77 迭代法 (700)

1. Fr方程的迭代法 2. 算符表示 3. Volterra方程的
迭代法 4. 散射问题

18.78	积分方程的其他解法	(705)
1.	退化核的Fr方程解法	
2.	有限秩近似	
3.	奇异Fr方程的Fourier变换法	
	习题	
19	定解问题的适定性	
19.79	三类问题的适定性	(712)
1.	波动问题的适定性	
2.	扩散问题的适定性	
3.	稳态问题的适定性	
19.80	三类方程比较 不适定问题	(716)
1.	三类方程比较	
2.	不适定问题	
习题答案		(724)
译名对照表		(749)

上 篇

复 变 函 数 论



1 复变函数与解析函数

我们知道，依赖于实变数的函数称为实变函数；由于变数的发展，由实数扩展到复数，便产生了依赖于复变数的函数，这类函数称为复变函数。但在大量的实际应用中，经常遇到的还不是一般的复变函数，而是其中具有某种性质的那一类复变函数，即所谓解析函数。

这一章我们在复变函数的基础上引入解析函数；在以后各章介绍解析函数的性质和应用。

1.1 复数表示与运算

1. 复数表示

复数是由两个有序实数来定义的，通常规定如下：

$$z = x + iy, \quad (1.1)$$

式中

$$i^2 = -1.$$

而 x 、 y 都是有序实数，分别称为复数的实部与虚部，各表示为

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \quad (1.2)$$

如实部为零，则称纯虚数；如虚部为零，复数则成为实数，故实数为复数的一部分。 $x=0$ ， $y=0$ 称复数零点。

(1) 几何表示