

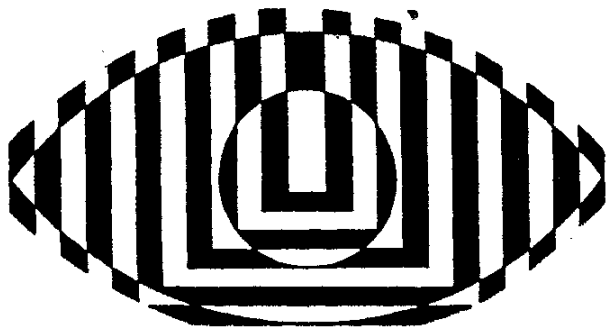
A. Gardiner 著

# 发现的数学

——数学研究的艺术

杨元庆·毛证华

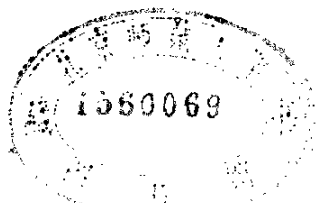




A.Gardiner 著

# 发现的数学

——数学研究的艺术



四川教育出版社

一九九〇年·成都

责任编辑：皮俊中

封面设计：何一兵

**发现的数学——数学研究的艺术**

---

四川教育出版社出版发行 (成都盐道街三号)

四川省新华书店经销 攀枝花新华印刷厂印刷

---

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 8.75 插页 2 字数 180 千

1990 年 10 月第一版 1990 年 10 月第一次印刷

印数：1—800 册

---

ISBN7-5408-1337-7/G·1296 定价：3.50 元

7/1125/21

有人断言，引入了启发式的方法就需要重写所有的教科书，而且还会使教科书长得没有人能读到底，……对这种陈腐的议论，我们的回答是：试试看吧！

拉卡托斯：《证明和反驳》

## ●●序

教师应该教给学生求解问题的方法。但是,若他自己都不知道如何求解问题,又怎能使人昭昭呢?……学校的课程安排,应当在一个适当的水平上为创造性活动提供一席之地。

G. 波利亚:《数学发现》(第一卷)

我写本书的目的,是想给读者提供一种帮助,使他们能够仅仅依靠自己的努力就能独立地解决那些带有挑战性然而也是初等的数学问题。本书由两大篇构成,这两篇形成了一种逻辑上的自然接续关系。这样安排是因为我从写作一开始(在第一篇)就一直对准着最后的目标——说服尽可能多的读者完整地解决第二篇中的至少一个广泛深入的研究问题。过去一向认为,这些广泛深入的研究问题对高中学生中那些机敏的高材生也是一种挑战。当然迎接这种挑战的结果,能使学生领悟实际地处理数学问题的精髓。多年来,各种中学数学小组在其活动中一直都在利用这些带有挑战性的问题作为学习的材料,而似乎大专院校的学生们还用得更有效。一届又一届的学生们,对挑战性问题的反应,表现了出人意料的新奇感和强烈的兴趣。挑战使他们兴奋,他们积极地投入应战之中,并在这个过程中显示出他们的丰富想像力和创造才能。这些材料也受到在职培训中的许多教师的欢迎,以及专业数学工作者的欣赏。

大多数学生都相当缺乏研究的习惯。一般学生对于数学的看法本质上都是消极被动的，在他们的头脑里对学习形成了一种框框，这就是：首先必须教给他们某些标准的方法，然后他们就可以自由地运用这些方法去求解某些标准问题——当然，主要是通过模仿。他们只是在这样的范围内使用着自己的心智。殊不知这有极大的局限性。本书从与之完全不同的视角去考察数学问题。至于阅读本书所需要的基本数学技巧，大多是为人们所熟知的，而且无论怎么说也完全是初等的，故读者几乎不会感到有任何困难。于是，我们就能够把注意力集中在如下两个方面：

**一是途径——探索和开发这类初等素材的途径；**

**二是方略——解决看起来似乎简单，而其解答却并不显然的问题的方略。**

这就是说，我们注重的是方法，而这种对方法的强调也就是要勾勒出数学本身和数学思想两者的本质特征的非常真切的图画。

第一篇包含了许多“简短”的研究问题。它们都是从一般的“数学游戏”跨升到第二篇中正式而重要的数学（问题）的“踏脚石”。在“数学游戏”问题中，一个清楚地陈述出的问题解决后，常常就把它放在一边而不再管。而对于第二篇中那些重要的数学问题，我们往往是从某个令人感兴趣的观察或疑问出发，并从几个不同的角度不断地研究它、追踪它，直到得出或多或少满意的结果为止，然后就设法对整个过程作出解释。有了处理第一部分简短研究问题的经验，有助于那些没有实力直接阅读第二部分的读者建立起信心和培养起耐力。第一篇的内容也可以作为未

来的教师和实习教师的问题研究课程的材料\*。

本书第二篇包括了两个详尽地叙述的扩展研究问题，以及同类的几个问题的概要。就它们所涉及的教学内容来说，都是初等的，但要解答它们却绝非易事。每一个问题研究的过程都较长，可能比大多数读者曾经遇到过的长得多（这也是我之所以把第一部分内容纳入本书的原因之一）。但是，我很讲究材料的处理方式，以至于使得读者要最终弄懂它们，主要地只依赖于其坚持性，而并不要求只有部分读者才具备的某些特殊能力。若读者从头至尾地完成了一个或几个这种扩展了的研究问题，就一定会发现：它们之所以这么长是完全有道理的，而他们为之付出的努力也是完全值得的。

教学研究本身并不是目的，它是揭示和理解重要的教学模式和数学关系的手段。一本好的教科书应能做到：当引进一个新的论题时，它的最重要的特征应是清晰可见和容易理解的。但是，在实际问题中，要界定一个问题最有意义的特征又是相当困难的；而且，在这些特征最后被捕捉到以前，还可能需要做大量艰苦的探测性工作。数学的最引人注目的特征之一就是：对那些初看起来似乎是枯燥无味的或难于下手的问题，通过坚持不懈的和深思熟虑的教学分析，常常会得到完全出乎意料的深刻洞察。

鉴于本书的篇幅和类型，任何一个理智的学生都应该能够读完它，并且，至多只要很少一点帮助就能完成所有练习题。许多练习题都补充给出了提示。在各章的后面也可以找到这些练习题的解答。但是真正成文的东西，无论是教材内容本身、练习题、

---

\* 请参看我的另一本书《数学迷官》（牛津大学出版社，1987）。该书以类似的但更简单的方式给出了许多具有挑战性的数学游戏题和研究问题。

提示还是解答，都是很有限的。所以，可以通过安排学生与学生或者学生与教师间的互教互学，来补充通读本书所获得的体验。本书在详尽地给出的研究问题后面，列出了“进一步拓广的研究问题”。对于打算把本书作为课堂教学材料的教师们，这些“进一步拓广的研究问题”可作为课外活动的材料，当然它们也为一般读者提供了进一步钻研的材料。在这些“进一步拓广的研究问题”前面，我们先给出了显示出明确结构的研究过程。读者可以利用在此过程中所包含的要旨去探究这些“进一步拓广的研究问题”。

我衷心地感谢给我提建议、出主意，给予我启示和鼓励的人们。（我们经常看到，一种意见或一种想法被有些人天真地看成是有独创性的，但却原来在另一个地方有它的根。）一九八一年在我访问 Deakin 大学和 Melbourne 大学时就已开始构思这本书了。但若没有 Derek Holton 的满腔热情的支持，恐怕此书也难以问世，一九八一年以来不少朋友和学生一直都在评论本书的初稿和各次修改稿，我对他们所有的人致以衷心的感谢。同时，我要特别提到 Tom Beidon，他的评论和“天真”的提问在整个成书过程中一直都在鞭策着我。

A. 加德纳，1987.7 于伯明翰



不要咬我的手指，  
看看它指向哪里。

W. 麦克库洛奇：《变化的纲领》

# ●●目 录

引 论	1
第 I 篇 短小研究	3
告读者	3
第一章 博奕分析	4
1.1 引言	4
1.2 第一个小研究	7
1.3 引伸问题	10
1.4 1.2节习题解答	13
第二章 韵律美到推理美	16
2.1 引言	16
2.2 第二个小研究	17
2.3 引伸问题	21
2.4 2.2节习题解答	29
第三章 洞彻事理	31
3.1 引言	31
3.2 第三个小研究	32
3.3 引伸问题	40
3.4 3.2节习题解答	42
第四章 提出问题	48
4.1 引言	48
4.2 第四个小研究	49
4.3 引伸问题	61
4.4 4.2节习题解答	66

第 I 篇 广泛深入的研究	75
告读者	75
研究 I: 翻转数	80
第五章 九倍翻转数	80
解 答	87
第六章 猜测的艺术	89
解 答	98
第七章 其它翻转数	99
解 答	104
第八章 其它基底的翻转数	108
解 答	112
第九章 计算有 $n$ 个数字的九倍翻转数	115
解 答	131
第十章 递推关系	134
解 答	145
第十一章 道路的尽头	148
解 答	151
附 记	153
研究 I: 邮票问题	156
第十二章 坚持走下去	156
解 答	161
第十三章 退回来, 寻求证明	163
解 答	171
第十四章 一幅图画抵得上百句话	176
解 答	189
第十五章 最后的征服	195
解 答	205
第十六章 硬币问题	209
解 答	214
附 注	215
解 答	219

第十七章 拓广的研究问题.....	223
17.1 引 言.....	223
17.2 引伸问题.....	226
17.3 解答大要和提示.....	227

## 引 论

哪里有问题，哪里就有生活。

A.A. 津诺维也夫：《解题教程》

本书旨在帮助读者凭自己个人的努力，从事一些富有挑战性，然而又是初等的数学研究。第一篇包含四个短小的研究。在这四个小研究中，其挑战性在于，它需要你探究和解释所发生的问题，而不是只是求出正确答案。第二篇由两个广泛而深入的研究组成。它们较之第一篇的小研究有更高的要求，不过，其数学内容仍然完全是初等的。读者选择从那一篇着手阅读，每一篇究竟要花多少时间，取决于读者已有的数学经验。然而，我要劝告读者，你至少要仔细透彻地研讨第二篇中的一个广泛而深入的研究。

每一篇都选出一些数学问题加以专门研讨。在正文中，每一个这样的问题都是借助于设计好了的系列习题来引进并进行研讨。每一个设计好的研究之后都附有一系列“引伸问题”，它们同样要你独立地去尝试，去解答。

材料中广泛地使用了中学数学的基本方法。但是，研讨的一些特殊问题，以及它们的研讨方法超出数学教学大纲的最高要

求。这些问题均有其自身的内在意义，因而不在于问题本身是否全都重要。重要的是这些问题的研究方法，特别是我已设法以对该者有帮助的方式来叙述：

- (1) 发展解答数学问题的策略，
- (2) 训练天才地猜想和验证猜想的艺术，
- (3) 懂得证明的必要，
- (4) 领会概括思维怎样导致原问题的变更，而变更后的问题更易于解答，
- (5) 一有可能就应用来之不易的结论和方法去解相关问题，
- (6) 懂得研究数学必须要训练并持之以恒。

所以，书中的问题虽已经过仔细筛选，它们仍旧主要是一种导出结论的方法，而且结论是：

#### 培养研究数学的艺术

※ ※ ※

第一篇中的某些小研究来源于解答叙述清晰的游戏题或问题，其余的产生于某些奇妙的数学现象的实验研究。每一种情况你都应该认真探究，直至你不仅知其然，而且也知其所以然。

第二篇的两个研究的研讨可以不考虑谁先谁后。后一个的长处是，其主要猜想基于极其简单的计算即可提出。但是，这方法不能维持多久，很快就必须引入其它思想。前一个研究虽不可由类似的十分简单的方法着手，但是，它的优点在于，开始的朴实的方法能用相当长久。虽然它最终也需补之以更强有力的方法，然而却决不会被实际取代。

# 第 I 篇 短小研究

## 告读者

要学会游泳，就得下深水

G. 波利亚：《数学发现》卷 I

研究都从问题开始（第一、第三两个研究是解游戏题的结果；第二个研究源于对一个奇妙的算术现象的实验研讨；第四个研究致力于将一个熟悉的几何公式由二维推广到三维），然后通过散见于正文中的设计好的系列习题，探讨原来的问题。无论哪种情况，我都设法使读者认真思考，直到你认为自己不仅知其然，而且也知其所以然。

习题犹如数学砖石。它们提供你所需的基本经验，帮助你发现隐藏于原问题中的有趣的数学。正文如同将这些数学砖石粘在一起的水泥灰浆。某些习题有提示，提示排印在有关研究之后，引伸问题之前。习题的解答排印在每章之末。

正文和习题提出了处理原问题的一种方法。它们仅能作为一种导引，不要成为束缚。仅当你能自如地把正文作为一种开端，并开始提出你自己的课题，或用你自己的方式探讨原问题时，我才算成功了。

# 第一章 博弈分析

无法逃避的情境。

G. 戈登：《喀土木日记》

## 1.1 引言

分析博弈，思考如何取胜，不失为数学的丰富源泉。然而，思考需要聚精会神的努力，而博弈被看作“娱乐”。因此，人们容易无视努力能够成为娱乐这一事实，从而以漫不经心的方式来分析这类博弈（例如，许多人打牌时，甚至没有去记住已经出过的牌）。

本章的主要目的是让你研究一组简单的二人博弈。这些博弈也可以完全同样地作为三人，或更多人的博弈，当然，对一方应采用怎样的玩法才能取胜的分析将不再有效。在你开始进行研讨之前，我将设法介绍这些博弈，讲讲分析它们以得出某种一般联系的方法。

多数博弈都基于如下简单思想。人们从一个程序着手，而这程序在由单个人执行时是完全可预计的。由于竞赛双方需要交替地采取步骤，人们还得巧妙地加以发挥。每一方都要设法先发制人，而不是以尽可能有效地合作的方式来完成程序。例如，每一



方采用的策略将取决于：

(a) 下出最后一步的一方是赢还是输；

(b) 博弈双方的步骤能区分开（如在“零和十字”中），或者不能加以区分（如在“有效直尺博弈”中，见1.3节引伸问题9）。

关于这类简单的博弈，那些能产生最有趣的玩法的变种，总是值得考虑的。当你开始分析下面例题时，应当记住这点。

(1) 零和十字

若果博弈双方不相互竞争，或者双方的做法无法区别开（“0和0”），无论在什么情况，先手几乎肯定会获胜，那么，让三个对手进入比赛就不会带来任何新的问题。

(2) 欧几里得博弈（见1.3节，引伸问题7）

这博弈的艺术在于选取每次减去较小数的准确倍数。它赋予最常规的算法以新意，从而得出一个优秀的竞赛实例。获胜的策略出乎意料，也简单得令人兴奋。

(3) 十五博弈（见1.3节，引伸问题8）

这是一个人人都会遇到的博弈。它貌似平常，但是不要上当。

(4) 有效直尺博弈（见1.3节，引伸问题9）

给了一根长为（譬如说）15cm 的空白木尺。为了能直接测量从1到15的每一整数厘米的长度，需要标出的刻度的最少个数是多少？这是一个有趣的问题。要简单地检验一组刻度是否足够，需要仔细观察，这观察本身就是一种有价值的思维训练（见图1.1）。这博弈的基本程序虽然远未定型，但是，由博弈双方需要交替地标刻度的竞争所产生的变化仍会出现有意义的结果。然而，双方都必须超越每一着法的直接效果去思考一下，每一新刻度给对手提供的种种可能性。