数学分析问题研究与评注

汪　林　戴正德
杨富春　郑喜印　编著

科学出版社

数学分析问题研究与评注

汪　林　戴正德
杨富春　郑喜印　编著

科学出版社
1995

(京)新登字 092 号

内容简介

本书总结了 1930 年以来国内外学者在数学分析方面的研究成果，主要包括与极限、连续、微分、积分、级数、多元函数有关的重要问题．每个问题均按基本部分和提高部分两个层次进行阐述，基本部分与现行教材紧密结合，反映了作者们的丰富教学经验，写得通俗易懂；提高部分涉及更为深入、难度较大的问题．每章均分为导读、正文、说明三个部分，层次分明，利于读者选读，并了解有关参考文献．

本书读者对象为高等院校理工科学生、教师及有关的科技工作者．

数学分析问题研究与评注

汪　林　戴正德
杨富春　郑喜印　编著

责任编辑　吕　虹

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

1995 年 11 月第一版　开本：850×1168　1/32
1995 年 11 月第一次印刷　印张：10 1/4
印数：1—1 500　字数：265 000

ISBN 7-03-004755-9/O・808

定价：22.00 元

前　　言

数学分析是近代数学的基础，是每个理工科大学生的必修课，也是现代科学技术中应用最为广泛的一门学科. 国内外许多数学工作者致力于这门重要学科的教学和研究工作，并发表了大量关于数学分析的教学和研究成果的论文. 为了便于理工科院校的师生及有关数学工作者了解数学分析的发展状况，我们对数学分析方面近期的教学和研究论文进行了挑选、归纳和总结而撰写了本书.

本书的材料主要是从国内外数学工作者的教学和研究工作中直接挑选出来的，也有一部分是我们自己在长期的教学和研究实践中积累的心得体会或研究成果.

本书所选的问题研究分两个层次，即基本部分与提高部分. 基本部分的特点是：短小精悍，通俗易懂，反映了原作者对数学分析的精深研究和丰富的教学经验的总结. 这部分内容最适用于教学，使学生得以加深对概念和理论的理解，还能启发学生如何深入思考问题. 提高部分的特点是：比较深刻，实际上是一些重要的科研成果. 这部分内容不仅对有关师生有参考价值，而且对于进行相应专题研究的人也是很有帮助的.

阅读本书所需的数学分析预备知识，假定读者已经掌握. 因此，本书在论述问题时，只作了很少的说明. 此外，由于本书是教学和研究成果的总结，因而不可能像通常的数学分析教材那样，比较系统而又由浅入深地介绍所有内容. 好在本书各章自成体系，读者可根据需要和兴趣阅读.

本书得到云南大学“211 工程”教材建设项目基金和云南省科委应用基础研究基金资助. 北京理工大学的叶其孝教授仔细地审阅了书稿，并提出了许多具体而又十分宝贵的意见，使本书增色不

少.对此,作者表示深深的谢意.

由于作者水平有限,因而本书难免有不少缺点,殷切期望读者予以批评指教.

作　者

1994年7月于云南大学

目　录

第一章　极限与连续

§1.1　导读

本章主要研究有关极限与连续函数的一些问题. 在§1.2中，概述函数概念的历史演进；介绍周期函数的两种常用定义，并比较这两种定义的差异. §1.3中讨论极限的几个问题，主要内容有：Cauchy数列的几种弱形式之间的关系；数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$收敛的几种证明方法（这些证法均不同于现行教科书中的证法），Euler常数与数e，使不等式$(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}\leqslant e\leqslant(1+\frac{1}{n})^{n+\beta}$成立的$\alpha$的最大值与$\beta$的最小值（其中$n$为任意自然数）；用等价无穷小替换法求极限的一个推广；关于数列极限的一个定理；复合函数的极限. 在§1.4中讨论连续函数，主要内容有：一对一的连续函数；连续函数的逐次逼近序列；收敛保持函数；在无理点连续而在有理点间断的严格单调函数；无处单调的连续函数；单调函数之商. §1.5中讨论了闭区间上连续函数性质的几个问题：闭区间上连续函数最大值存在性定理的几种证法；几个基本定理证明的统一处理方法；Weierstrass逼近定理的一个初等证明. 在§1.6中，介绍了函数一致连续的几个等价命题、函数乘积的一致连续性以及使函数连续且一致连续的点集的性质. 本章最后一节考虑了是否存在在每个区间上都能取到一个真正局部极大值的函数的问题，并介绍了两个例子，肯定地回答了这个问题.

§1.2　函数概念

1.2.1　函数概念的历史演进

函数概念在数学中是基本的. 这里，我们对函数概念的历史演

进作一个简要的介绍.

历史上,原始的函数观念伴随着数学的出现而产生.但明确提出“函数”一词,并将其作为数学概念来研究,则是在 17 世纪以后的事.从 17 世纪以来,函数概念经历了由具体到抽象、由粗略到精确的形成与发展过程.

16 和 17 世纪,由于社会实践的需要,自然科学转向了对各种“运动”进行研究.在实践中,人们发现了许多具体的运动规律,并尝试用语言和文字对这种运动中的数量关系进行描述.例如,Galileo 在他创立近代力学的著作《两门新科学》中,就用文字和比例的语言表达了这种关系.从书中可以清楚地看到,他对大量运动规律的叙述,的确是在讨论变数和函数.此后,随着代数符号化的扩展,他又把对运动规律的文字叙述表述为符号形式.但这种叙述与具体运动问题联在一起,看不到反映和概括运动问题的一般数学量观念(参看[140],第二册,pp. 43—46).进入 17 世纪后,通过对曲线的研究,产生了对“运动”意义的新看法,出现了“动点的轨迹”这个概念.例如,Galileo 证明了把物体斜抛向空中时,它的路径是一条抛物线的结论,因而也就可把这曲线看作是动点的轨迹.把曲线看作是动点的轨迹,就从数学的量的方面概括了物体的运动,为提出一般函数概念打下了基础.

在现存文献中,最早把“函数”这个词正式作为数学术语并赋予其意义的数学家,是 Leibniz. 1673 年,他在一篇手稿里用“函数”一词表示任何一个随着曲线上的点的变动而变动的量.例如,切线、法线、次切线等的长度以及纵坐标等.至于曲线本身,据他说是由一个方程式给出的(参看[140],第二册,pp. 43—46).显然,这里用函数一词表示“切线长”、“法线长”等所谓“量”的概念,在意义上还是模糊的.

在 17 世纪,人们通过对各种运动问题的研究,引进了大量函数以表示运动规律.这时使用的函数,一般还只限于简单的代数函数和超越函数.随着实践和研究的深入,进入 18 世纪以后,人们对初等函数有了比较充分的认识,迫切需要提出更加明确的函数概

念.

最先明确给出函数概念的意义和符号的数学家是 Bernoulli, Johann. 1697 年,他曾谈到过一个按任何方式用变量和常量构成的量.这里的"任何方式"一词,按他的意思是指代数式和初等超越式.第二年,即 1698 年,他采用了 Leibniz 的"函数"一词,作为他这个量的名字,并用 ξ 表示 x 的函数.到了 1718 年,他又改用 φx 表示 x 的函数.此后,1734 年,Euler 引进了函数记号 $f(x)$. 1748 年, Euler 在其所著的《无穷小分析引论》一书的开头,将函数进一步定义为由一个变量与一些常量,通过任何方式形成的解析表达式(参看[140],第二册,pp. 123—125).由于这时连接变量和常量的主要运算是代数运算和超越运算,因此,Euler 索性把用这些运算连接变量和常量而成的式子,取名为解析表达式,即把函数定义为解析函数.这种关于函数是由一个解析表达式给出的观点统治了近一个世纪——18 世纪(参看[140],第二册,pp. 123—125). Bernoulli, Johann 和 Euler 关于函数的定义,进一步从数量上揭示了各种运动的规律,在一定程度上适应了当时自然科学解决问题的需要.但是,这两个定义,由于外延过狭,致使一些无法用解析式表示的函数被排斥在外,因而具有局限性.

1748 年,Euler 在提出解析函数定义的同时,还提出了另一个更为广泛的所谓"随意函数"的定义.他认为,在坐标平面内,函数就是一条可以任意描画的曲线.他把这样的曲线所表示的 y 与 x 间的关系叫做"随意函数".这个定义表明,函数可由任意曲线单独确定,而无论曲线是否能用公式给出.这样,就拓广了函数概念的外延.但是,这一定义与前述两个定义间存在明显的冲突.为解决这一矛盾,当时采取了一种折衷的办法:把能用一个解析式表示的曲线,其解析式叫做"真函数";对不能用一个解析式表示的曲线,虽也称其为"随意函数",但把它叫做"假函数"(参看[46]).显然,这种把能否用一个解析式表示的曲线划分为"真"、"假"函数的方法,并未将上面的定义和前述的两个定义从本质上协调统一起来,因而没有真正地解决问题.

1807 年，Fourier 提出：任何函数都可用一个三角级数式予以表示(参看[83]，pp. 209—210). 这也表明，解析式和曲线之间并没有不能逾越的鸿沟. 用函数表示方法的“单一”与否来划分函数的真伪，是没有根据的. 这样，Fourier 级数的出现，动摇了函数的解析定义和曲线定义. 人们逐渐认识到：这两个定义都还未能揭示出函数的本质特征，对函数的认识仍然停留在表面阶段. 因此，如何从理论上进一步揭示出上述诸定义的本质联系，使之归于统一，便成了人们面临的重要问题. 另一方面，函数概念缺乏科学的定义，也引起了理论与实践的矛盾. 这两个方面导致了科学的函数定义的产生.

1834 年，Cauchy 给函数下了这样的定义：若对于变量 x 的每一个值，变量 y 按照某种对应规律有完全确定的值与之对应，则 y 称为 x 的函数(参看[46]). 按照这个定义，只要对于 x 的每一个值，y 有完全确定的值与之对应，那么，y 就是 x 的函数. 至于 y 是否用一个式子或几个式子表示，以及是否要通过式子表示都无关紧要. 显然，Cauchy 的函数定义抓住并揭示了函数概念的本质特征——对应关系. 从而彻底澄清了函数和解析式、曲线概念之间的纠缠，把人们对函数概念的认识推进到科学的阶段. 但需要指出的是，Cauchy 对他当时所给的函数，仍然考虑的是 x 和 y 的关系用解析式表示的情况，而这一点是不必要的. 1837 年，几乎在同时，Dirichlet 和 Riemann 进一步给出了函数的如下定义：对于 x 的每一个值，只要 y 有完全确定的值与之对应，不论 x，y 所建立的对应方式如何，y 都叫做 x 的函数. 在这以前，Dirichlet 曾给出了一个函数的例子：它对一切有理数取值 c 而对一切无理数取值 d，这就是著名的 Dirichlet 函数. 这个定义明确地强调与突出了函数概念与 x，y 之间的对应方式的无关性. 这就克服了 Cauchy 函数定义的不足，使函数概念建立在更加科学的基础之上.

但是，函数概念的演进并未结束. 随着生产实践和科学实验的不断扩大，又引起函数概念的新矛盾. 一方面，在上述定义中，无论是自变量还是函数，其对象仅只限于“数”，并且定义中提出的“变

量”概念，从数学角度看，含义也较模糊. 另一方面，在定义中，“对应”一词的意义也不够明确，即没有明确揭示出函数概念最核心的性质——对应法则. 这就要求人们对函数定义作进一步的探索和变革.

19 世纪 70 年代，Cantor 的集合论出现以后，人们把函数明确地定义为集合间的对应关系：若对于集合 M 中的每个元素 x，都有集合 N 中的一个元素 y 与之对应，则称 y 为 x 的函数. 显然，这个定义中的“元素”，不仅限于是数，还可以是任何别的事物. 这就大大拓宽了函数的研究范围，使函数概念能够广泛应用于数学的各个分支及其它学科中. 此外，这个定义还摆脱了在数学上较模糊的“变量”概念. 但这个定义仍然引用了意义不明确的“对应”概念.

随着数学的发展及对数学基础研究的深入，1914 年 Hausdorff 在他的《集合论纲要》一书中，采用“序偶”概念来定义函数：函数 f 是从集合 A 到集合 B 中的映射，即是由有序偶 $(x,y)\in f$ 组成的一个非空集合，其中 $x\in X\subset A$，$y\in Y\subset B$，且对于每一个 $x\in X$，只有一个 y 与之组成序偶. 这一定义，克服了意义不明确的“对应”概念，明确地提出了函数的对应法则 f. 不过，这一定义又引用了“序”的概念. 1921 年，库拉托夫斯基进一步引用集合的概念来定义序偶，即

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

称为一个序偶. 这样，就避开了必须先定义“序”的概念(参看[83]，pp. 209—210). 由此，逐步产生了现代数学所广泛采用的函数定义：设 f 是一个序偶集合，若当 $(x,y)\in f$，且 $(x,z)\in f$ 时，$y=z$，则 f 称为一个函数. 这个定义是用集合先定义序偶，然后再定义函数概念的. 显然，这一定义只涉及到了“集合”这一个不定义的原始概念. 这样，它就克服了前面所述的函数定义的缺点，使函数概念像其它现代数学概念一样，完全建立在集合概念的逻辑基础上. 至此，函数概念就更加精确化、一般化了.

注 1 这段材料主要取自文献[25]. 关于函数的定义，还可参看文献[168]，其中列出了从 Bernoulli, Johann 到 Bourbaki 的函

数概念的一些定义.

1.2.2 关于周期函数的定义

周期函数有多种定义，这些定义虽然都揭示了周期函数最基本的特征，但它们之间也存在着差别. 在这一段中，我们介绍两种常见的周期函数的定义，并比较其差异.

定义 1 对于函数 f，若存在一个非零的常数 T，使得当自变量 x 取定义域内的每一个值时，$f(x+T)=f(x)$ 都成立，那么就把 f 叫做周期函数，T 叫做这个函数的周期.

定义 2 设 f 是定义在某一数集 M 上的函数，若存在非零的常数 T，使得：(i) 对 $x\in M$，有 $x\pm T\in M$；(ii) 对于任意的 $x\in M$，有 $f(x+T)=f(x)$，那么称 f 为数集 M 上的周期函数，T 称为 f 的一个周期.

这两个定义是不一样的，主要表现在下列几个方面：

(a) 定义 2 意义下的周期函数必然符合定义 1，反之不成立.

例 1 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in N,\\ 1, & x\in[1,+\infty)\setminus N,\end{cases}$$

其中 N 为自然数集. 则按定义 1，f 是周期函数. 事实上，对任一自然数 n，若 $x\in N$，则有 $x+n\in N$，故 $f(x+n)=f(x)$；若 $x\in[1,+\infty)\setminus N$，则有 $x+n\in[1,+\infty)\setminus N$，故仍有 $f(x+n)=f(x)$. 因此，任何自然数 n 都是 f 在定义 1 意义下的周期. 但按定义 2，f 却不是周期函数. 事实上，由于 f 的定义域是 $[1,+\infty)$，若 f 有周期 $T<0$，则 $1+T\notin[1,+\infty)$；若 f 有周期 $T>0$，则 $1-T\notin[1,+\infty)$. 因此，任何非零常数 T 都不能满足定义 2 中的 (i)，也就都不是 f 在定义 2 意义下的周期.

(b) 对于定义 2 意义下的周期函数 f，若 T 是 f 的周期，则 $-T$ 也是 f 的周期，进而可知，定义 2 意义下的周期函数必有正周期. 对于定义 1 意义下的某些周期函数 f，虽然 T 是 f 的周期，但