椭圆积分表

机械工业出版社

椭 圆 积 分 表

《椭圆积分表》编写小组 编

机 械 工 业 出 版 社

本书包括椭圆积分表使用说明及第一、二、三类椭圆积分 $F(k)$、$E(k)$、$F(\varphi,k)$、$E(\varphi,k)$、$\Pi(\varphi,P,k)$ 的数值表(其中 $E(k)$ 可称为椭圆周率，以便利用 $L=4aE(k)$ 计算椭圆周长)，数据一般取九位。

本书许多表格中参数取值及数据的排列顺序，是按科研、生产实际应用需要编排的，易于查阅。书后附有椭球表面积计算方法与数表。

本书可供从事机械制造(柔轮、非圆齿轮等)、断裂力学、电磁场、加速器、精密计量以及天体力学等方面的科技人员、教学人员使用。

椭 圆 积 分 表

«椭圆积分表»编写小组 编

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
（北京市书刊出版业营业许可証出字第117号）
机械工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 · 新华书店经售

开本 850×1168 1/64 · 印张 5 1/4 · 字数 183 千字
1979 年 9 月北京第一版 · 1979 年 9 月北京第一次印刷
印数 00,001—40,000 · 定价 0.52 元

统一书号：15033 · 4538

前　言

随着生产和科学技术的发展，愈来愈多地应用到椭圆积分的数值，为此我们编写了这本九位椭圆积分表，供有关人员使用。

为了便于查阅，许多表格里数据的顺序是按专用要求排列的。例如第二类椭圆积分表分别依偏心率 k 和长短轴之比 $J=\frac{b}{a}(a\geqslant b)$ 排列等等。书中称 $E(k)$ 为“椭圆周率”，以便利用公式 $L=4aE(k)$ 计算椭圆周长。书后附有椭球表面积系数表备查。

本书全部数据，是在国产第三代数字电子计算机 TQ16 机上计算出来的。并用 DJS-6 机作了一些校对工作，为保证数据的准确性，一般都采用多种方法编制程序，力求准确无误。

本书是在北京重型电机厂和北京永定机械厂领导的大力支持下写成的。在编写过程中还得到北京科技局计算中心洪加威、温秉钧、陈起扬等同志和北重计算机组全体同志的大力支持；在调研中，东方电机厂杨既桢同志和许多单位提供了应用实例及有关参数，在此一并表示感谢！

本书主要由贺仲雄、赵卫国同志编写。另外，一机部

机电所李泌同志，北京重型电机厂工人大学学员王忠民、冯连福等同志也参加了部分工作。

由于我们水平有限，书中错误和缺点在所难免，恳请读者批评指正。

编写小组

一九七七年十月

目　　录

I. 使 用 说 明

§1. 椭圆周长公式与部分椭圆周长公式推导

设有椭圆，取坐标如图 1，以参数方程给出：

$$\begin{cases} x=a\sin\psi \\ y=b\cos\psi \end{cases} \tag{1}$$

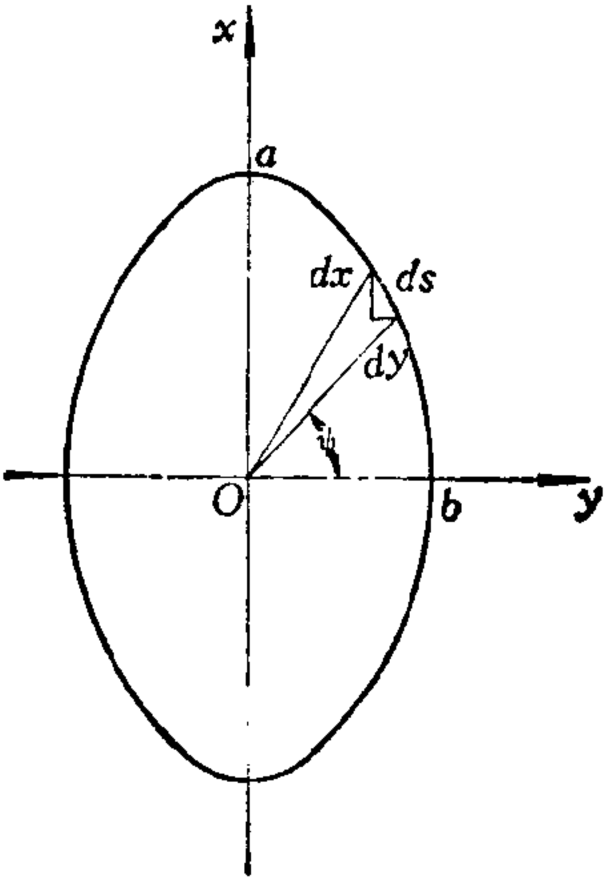

图 1

式中　$a \geqslant b$，椭圆的周长为：

$$L=\oint_L ds$$

由图1得：

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2 \tag{2}$$

由(1)式微分得：

$$\begin{cases} dx=a\cos\psi\, d\psi \\ dy=-b\sin\psi\, d\psi \end{cases} \tag{3}$$

将(3)代入(2)式得：

$$(ds)^2=(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)(d\psi)^2$$

两端开方：

$$ds=\sqrt{a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi}\cdot d\psi \tag{4}$$

所以椭圆周长，由于对称性，

$$L=\oint_L ds=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi}\,d\psi$$

利用三角公式：

$$\cos^2\psi=1-\sin^2\psi$$

并令　$J=\dfrac{b}{a}(a \geqslant b)$

椭圆半焦距：　$c=\sqrt{a^2-b^2}$

则偏心率：　$k=\sqrt{1-J^2}=\dfrac{c}{a}$

$$
\begin{aligned}
L&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi}\,d\psi\\
&=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\psi+\frac{b^2}{a^2}\sin^2\psi}\,d\psi\\
&=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\psi+J^2\sin^2\psi}\,d\psi\\
&=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-(1-J^2)\sin^2\psi}\,d\psi\\
&=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi\\
&=4aE(k)
\end{aligned}
$$

以上推导出的 $L=4aE(k)$，即为椭圆周长的公式，其中 a 是长半轴，b 是短半轴，当 $k=0$ 时椭圆退化为圆，半径为 a，L 即变为圆周长：

$$L=4aE(0)=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi=2\pi a$$

故 $E(k)$ 可视为圆周率 π 在椭圆中的推广。我们称 $E(k)$ 为“椭圆周率”。其中 $0\leqslant E(k)\leqslant\frac{\pi}{2}$。

对于部分椭圆弧长，如对应的角度为 φ，可用：

$$s=\int_0^{\varphi}ds$$

的公式求得。

把(4)式代入，用与求椭圆周长类似的方法，只将积分上限改为 φ，即可得：

$$s=a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi=aE(\varphi,\ k)$$

§2. 椭圆积分的种类和记号

$$\int f(x,\ y)dx$$

其中　$y=\sqrt{Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4Dx+E}$

可以化为以下三种类型之一:

1. 第一类椭圆积分:

$$F(\varphi,\ k)=\int_0^{\sin\varphi}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

当上限 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时，称之为第一类全椭圆积分，记作:

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\qquad(0\leqslant k\leqslant 1)$$

2. 第二类椭圆积分:

$$E(\varphi,\ k)=\int_0^{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi$$

当上限 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时，称之为第二类全椭圆积分，记作:

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi\qquad(0\leqslant k\leqslant 1)$$

3. 第三类椭圆积分:

$$\Pi(\varphi, P, k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{(1-P\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

当上限 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，称之为第三类全椭圆积分（$0\leqslant k\leqslant 1$, $k^2\leqslant P\leqslant 1$）。

§3. 椭圆积分表的用法

1. 椭圆周率表：读者可根据椭圆的长、短轴之比 $J=\frac{b}{a}$ 之值，查出 $E(k)$ 值，同时可查出对应的 k 值，$\arcsin k$ 值。

2. 第一、二类不完全椭圆积分表：偏心率 k 取值为 0.05～0.90，椭圆部分弧长所对应的角度 φ 取值为 0°～90° 或 $0\sim\frac{\pi}{2}$，读者可根据 φ 值及 k 值查出对应的 $F(\varphi, k)$，$E(\varphi, k)$ 值。

3. $k^2=\frac{4e^2}{1+3e^2}$ 的不完全椭圆积分表：此表为椭圆齿轮等方面专用表。生产实际中椭圆齿轮许多是卵形的。如椭圆齿轮流量计即采用卵形齿轮。

设：卵形齿轮偏心率为 $e=0.25$, 0.3，而对应的椭圆齿轮偏心率应满足关系式：

$$k^2=\frac{(me)^2}{1+(m^2-1)e^2}$$

当不对称系数 $m=2$ 时

$$k^2=\frac{4e^2}{1+3e^2}$$

读者可根据 e 值和 φ 值查出对应的：

$$F(\varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

$$E(\varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi$$

4．第一、二类全椭圆积分表(Hastings 多项式法)：读者可根据偏心率 k 值，查出对应的 $F(k)$，$E(k)$ 值及 J 值、$\arcsin k$ 值。

由于用 Hastings 多项式法计算椭圆积分有误差分布不均匀的特点，经使用其他精确方法进行校对后，取其七位有效数字。

5．第一、二类全椭圆积分表：此表取九位有效数字，读者可根据 k 值，查出对应的 $F(k)$，$E(k)$ 值。

6．第三类全椭圆积分表：此表是以偏心率 k^2 以及 P 为自变量作的 $\Pi(\varphi,\ P,\ k)$ 值表，φ 取值为 $\frac{\pi}{2}$ $(0\leqslant k^2\leqslant P)$，读者可根据 P 值及对应的 k 值，查出对应的

$$\Pi(\varphi,\ P,\ k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{(1-P\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$ 值。

7．附录：椭球表面积计算及系数表（公式推导请参看附录）。

根据椭球方程:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

设 a, b, c, 为它的三个半轴, a 为其中最大者，特殊情况有以下两种:

1) $a=c\neq b$ 为旋转椭球;

2) $a=b=c$ 为球体。

一般椭球的表面积近似公式为:

$$A=4a^2E\left(\frac{c}{a}\right)\cdot\phi\left(\frac{b}{a}\right)=4a^2E(J_1)\cdot\phi(J_2)$$

其中 $\phi(J_2)=1+J_2^2\frac{1}{\sqrt{1-J_2^2}}\ln\left|\sqrt{\frac{1}{J_2^2}-1}+\frac{1}{J_2}\right|$

$\frac{c}{a}=J_1$ 可根据椭圆周率表查出 $E(J_1)$的值;

$\frac{b}{a}=J_2$ 可根据附录中的表查出 $\phi(J_2)$的值即可算出表面积 A。

§4. 椭圆积分应用实例

例 1 有卧式油罐车，其截面为椭圆，长轴 $2a=1720\text{mm}$，短轴 $2b=1115\text{mm}$，求周圈落料长度为多少?

解 $J=\frac{b}{a}=\frac{2b}{2a}=\frac{1115}{1720}=0.64825$

查对应的椭圆周率表得:

$$E=1.30928$$

代入公式：

$$L=4aE=4503.9\text{mm}$$

例2 尾水管内衬的通气筒，为了减少对泄水的阻力和提高其抗弯强度，需要做成椭圆截面，如用圆筒压成，设椭圆长半轴为 a，短半轴为 b，求所需圆筒半径 R 是多少？

解 由 $J=\dfrac{b}{a}$ 查出对应的 E 值（用椭圆周率表）因圆筒周长与椭圆周长相等。

即：
$$2\pi R=4aE$$

故：
$$R=\frac{2}{\pi}aE$$

例3 在机械制造中，有些筒形产品的截面为椭圆

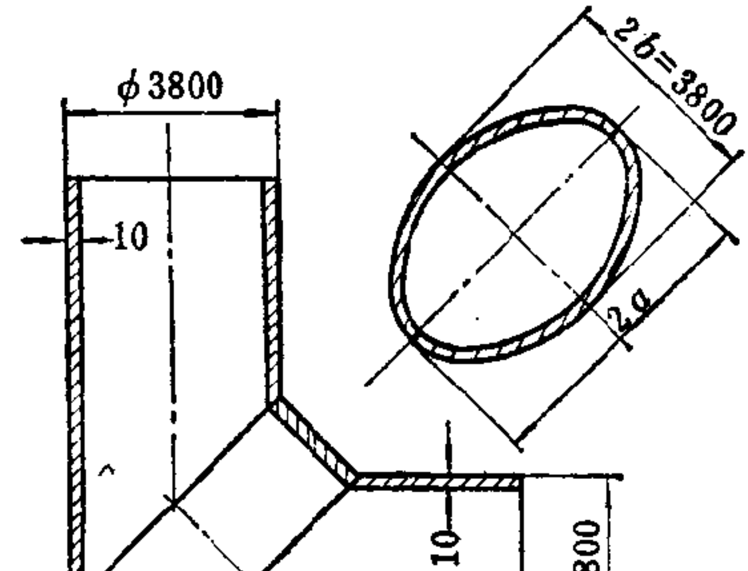

图2 直角弯管

形，计算其下料长度就要计算椭圆周长。如图 2 为一直角弯管，中间那节是椭圆筒，求其下料长度 s。

解　设其长半轴为 a，短半轴为 b

$$a=\frac{1}{2}\left(3800-2\times\frac{10}{2}\right)\times\frac{1}{\sin 45^\circ}=2679.5$$

$$J=\frac{b}{a}=\sin 45^\circ=0.707$$

查椭圆周率表

$$E=1.35057$$

则：
$$s=4\times 2679.5\times 1.35057$$
$$\approx 14478(\mathrm{mm})$$

例 4　设一人造卫星，其近地点为 h，远地点为 H，试求它运行轨道周长 L 是多少？

解　根据图 3，考虑几何关系有：

长轴：
$$2a=H+h+2R$$

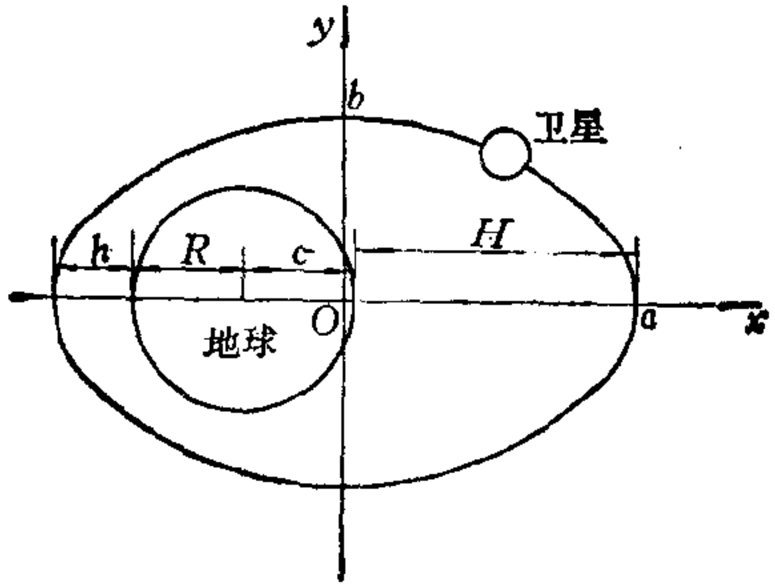

图　3

其中　R 是地球半径。

得:

$$a=\frac{1}{2}(H+h)+R \tag{1}$$

半焦距:

$$c=a-R-h \tag{2}$$

根据偏心率 $k=\frac{c}{a}$,算出数值,查全椭圆积分表即查以 k 为自变量的 $E(k)$表,得出 E 值,代入 $L=4aE$,即得人造卫星轨道周长。

例 5　在无梭织布机上改用两个相同椭圆齿轮,以控制织布机剪杆速度,已知椭圆齿轮长半轴 $a=90$,偏心距(即椭圆的半焦距) $c=13$,因工作要求齿距定为 3.5π,试计算椭圆齿轮的齿数 Z。

解　$k=\frac{c}{a}=\frac{13}{90}\approx 0.144$

查表 V　　$E=1.562621$

则齿数为:

$$Z=\frac{4aE(k)}{\pi m}=\frac{4\times 90\times 1.562621}{3.141593\times 3.5}\approx 51.16$$

取相近奇数 $Z=51$。

例 6　在卧式铣床用分度法加工椭圆齿轮时,为了加工一个齿槽,被切齿轮应该有两个线位移和一个角位移,即转动中心 O 应横移与升降,并绕中心 O 回转(见图

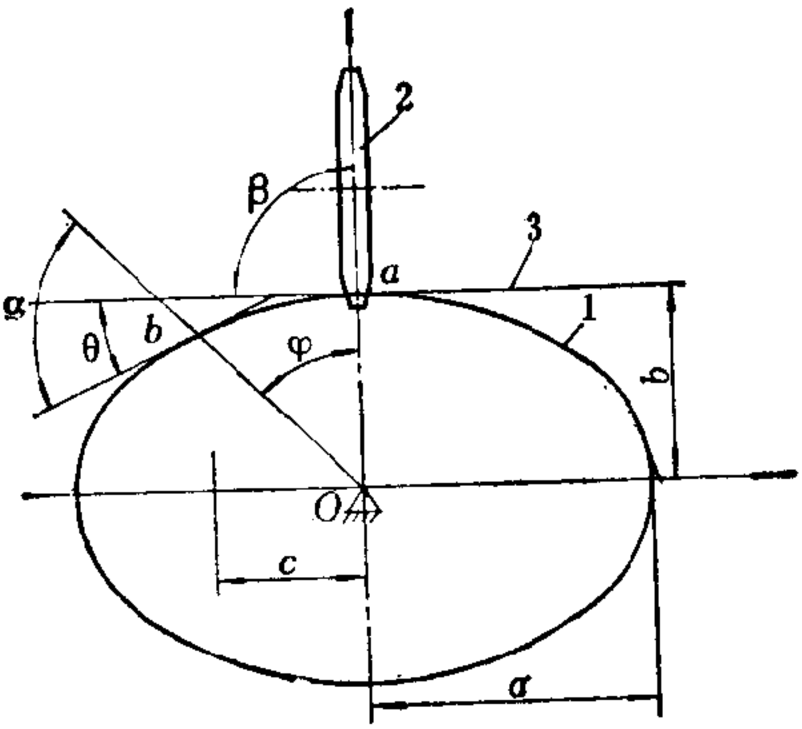

图 4 用卧式铣床加工椭圆齿轮

1—齿轮节曲线 2—模数铣刀 3—节曲线切线

4)，其回转角 θ 为：

$$\theta = \alpha + \varphi + \beta$$

式中 $\alpha = \mathrm{tg}^{-1} \dfrac{P_b}{\dfrac{dP}{d\varphi_b}}$

$$\beta = \mathrm{tg}^{-1} \frac{P_a}{\dfrac{dP}{d\varphi_a}}$$

此例中 $\beta = 90^\circ$，$\varphi = \overset{\frown}{ab}$ 所对应的极角。

上式也可写成：

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1} \frac{P_b}{\dfrac{dP}{d\varphi_b}} + \varphi - 90^\circ$$