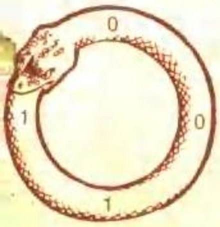
S·K·斯坦因 著 孙午林 译

数学世界



中国社会出版社

(京)新登字 022 号

数　学　世　界

S.K. 斯坦因　著

孙午林　　译

安其春　　校订

责任编辑　李鸿昌

中国社会出版社出版发行

北京西城区西黄城根南街 9 号　邮政编码 100032

北京 714 印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

*

开本:850×1168 毫米 1/32 印张:11　插页:　字数:284 千字

1995 年 7 月第一版　1995 年 7 月第一次印刷

印数:1—3000 册　定价:12.50 元

ISBN 7-80088-177-6/G・73

序

几乎人人都说数学有用，但又几乎人人都说数学难学。曾经有一位对数学发怵的名记者问过华罗庚教授，是不是他自己太笨，学不懂数学。华教授对他说，不是他不行，是他的数学老师不行。这样看，不只是学生要知道怎样去学数学，并且教师更要明白怎样去教数学。现在读者面前的这本书就是作者为这两个目的而写的。

数学，一般都认为是一门抽象的学问。例如，国家自然科学基金委员会的关于数学发展战略研究报告持有这种观点，它写道："数学研究来源于现实世界事物的抽象。"而且"数学理论的问题从提出到解决往往十分抽象"。但是，本书作者却说："数学是具体的，而现实世界是抽象的。"他的解释是："数学完全是人的产物，它手中的全副纸牌都可摊在桌面上。"而"我们所处的现实世界并不是我们制造的"。抽象的，是看不见摸不着的，理解起来好像无从下手，因而往往给人以神秘感甚至恐惧感；相反，具体的，是看得见摸得着的，理解起来好像有个可以着手的把柄，从而往往给人以现实感和安心感。作者是不是有这种意思呢？所以他是不是打算一开始通过这番话打消读者可能有的畏难情绪，并而激发读者的自信呢？

读这本书，作者不要求读者有什么数学上的预备知识，小学算术程度就够了。谁还不会数数呢？他劝读者把数学理解为数的学问。这本书就是介绍各种的数，并且通过描述这些数的发现和发展，说明整个教学的结构和作用。几个主要的数学分支在本书中都有了简洁的描述，并且最后对数学的逻辑作了总结性的叙述。本书在写法上也有独到的特色。作者用一章的篇幅详尽说明了"算术基本定理"，并在全

书的过程中反复使用这一定理。这种作法实际上是在培养或加强读者对数学的思考能力。只要读者耐心,正像作者建议的那样,手边有一张纸和一支笔,随着作者的引导一步一步地走下去,自然就会对数学产生兴趣,并且获得对数学本质的理解。

作者在书中强调数学的基础非常简单,但又十分坚固。因此,数学虽然有许多分支,而且各个分支又有各自的发展,但是数学不会分裂而始终保持着一个统一的整体。它的结果是由逻辑推理出来的,所以完全可靠。甚至可以说,逻辑推理比实验证实的结果要更为可靠些。当然,作者也认为,数学的问题反映的是客观事物。他在书中没有忘记介绍一些数学在实际中产生的典故和应用的事例。不过,他指出,从数学的问题中又层出不穷地产生新的问题,这种对新问题的追求才使数学家忘我不倦地思索,使数学得到更深的挖掘,尽管这新的问题离开最初的实际好像越来越远了。

国家教委提出的从"应试教育"转到"素质教育"的号召,开始为广大干部和教师所接受。美国的有关数学教育的报告指出:"一切技术,说到底包含着一种数学技术。"其实,统计思想、优化观念、计算机意识等的数学观念已渗透到人们的日常生活当中,成为现代文化中不可缺少的组成部分,使这些事情成为现实并且还将更加丰富、从根本上说,是"素质教育"。本书的出版相信会对数学的"素质教育"起到作用。我愿意为本书译本作序的原因就在于此。

刘源张

一九九二年十二月十四日

刘源张,中国科学院系统科学研究所研究员、原副所长,全国人民代表大会第六、七届代表,我国全面质量管理创始人,长期从事管理科学的研究与推广工作。

第三版原序

现在离《数学世界》第二版的出版已经有7年了。在这段时间里，数学以及数学教学在专家们与社会普遍变化的影响下，在继续不断地进步着。第三版的内容反映了这些发展以及我自己的观点的变化。例如，这一版中对这本书的一个重大的补充是关于概率的新的一章，它反映了教师与学生对了解那些把数学应用于社会与个人所面临的问题的课题的日益增长的兴趣。

我们都知道我们自己生活在一个不是由我们创造的世界上。虽然我们已经习惯了厨房的洗手池，但是我们不了解组成洗手池的原子。这个洗手池，像我们周围所有的物体一样，作为抽象物来看待是合适的。

另一方面数学完全是人的创造物。每条定理、每个证明，都是人类思想的结晶。在数学中，所有的牌都是放在桌面上的。在这个意义上说，数学是具体的，而世界是抽象的。

这本书利用具体的内容向一般的读者介绍数学。这个"一般的读者"可以是一个大学生，也可以是一个中学生，或是一个好奇的成年人，不论他们对本书特别感兴趣的地方在哪儿，都可以阅读它。这本书选自许多专业的大学教程，书中的内容反映了数学的美、广度和活力。我曾花费了数年时间搜集合适的内容，但是许多材料要么太高深，要么太专门。

这本书的内容，选自数论、拓扑、集合论、几何、代数和分析学，可以为没有多少数学知识的读者学习(有些章节只用到小学的算术)。每一课题说明某一重要的概念，并使它自己能易于被实验所采用，以

及解决疑难问题。

我建议当读者读到每一条定理和证明时，随时利用数学的具体性质，不要轻信，要怀疑和提高警惕，要检查推理的每一步骤，要认真对待这样的建议，如“读者可以提出他自己的例子”或“读者在看证明前应该用一些特殊情况来核对这个定理”。在阅读这本书时，手头总带着笔和纸将是有益的。

《数学世界》第三版与以前的版本在许多地方有所不同。

第二版的序言建议大部分人应该从称量这一章开始读这本书，那时它是书中的第三章；为了方便和强调起见，这部分内容现在是第一章。过去的第二章“完全三角形”已被删去，以便腾出地方给引起更普遍兴趣的关于概率的一章。“十五个魔块”过去是第一章，现在移到第十三章，但是读者可以在任何时候读它。在这一版中，第一到第四章构成这本书的核心。以后的五章，与新的第十二章一起，可能将是使用得最频繁的章节。第十二章“机会”介绍了概率论的基本原理。它强调了一般的应用以及在决策时机遇的重要性。书中的课文本身以及随后的练习题都表明，在日常生活中概率的观念是普遍的，虽然它们或许是隐藏着的。

全书有大量的较小的修改。新的结论，较简单的证明以及新的练习题说明了这些努力的一部分。正如在以前的版本中一样，许多修改是为了澄清书中的说明。大多数练习的答案现在放在了正文的后面。(下略)

舍曼 K. 斯坦因(Sherman K. Stein)

目　录

第一章　称量问题

这一章将提出关于数的一些重要问题，虽然它们似乎是任何懂得简单算术的人都能理解和研究的问题，但事实上它们与数论的基本性质有关。在第三章之前将不涉及这些问题答案后面隐藏的原理。这一章的目的在于提供一个机会，对漫谈的问题进行一次试验，来看一个简单的数学概念是怎样以各种各样的面貌出现的。

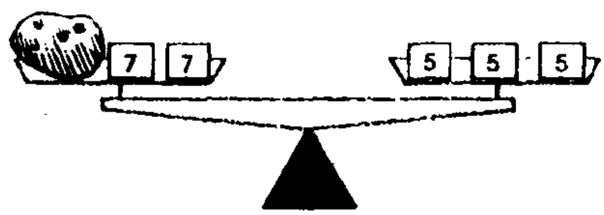
假设我们在化学实验室或其他地方，见到一架双盘天平，还有不限数量的 5 盎司和 7 盎司的砝码，现在假设土豆仅仅以整数盎司值计量，而不是实际的随意数值。请问用这架天平和两种砝码我们能称多重的土豆？

例如，只使用 5 盎司的砝码能称出 5、10、15、20、25、30、……盎司。又如，只使用 7 盎司的砝码能称出 7、14、21、28、35、……盎司的土豆。此外还能把两种砝码中各取一个同放在一个盘子里，因而能称出 12 盎司，$12=5+7$。我们能称出一个 3 盎司的土豆吗？能，只要把两个 5 盎司的砝码放在一个盘子里，把一个 7 盎司的砝码和土豆放在另一个盘子里就行了，这个过程用方程 $3+7=2\cdot 5$ 表示。

我们能称出一个 1 盎司重的土豆吗？这也是能作到的，读者在读到下文之前可能愿意自己解决它。两个 7 盎司的砝码和土豆在一个盘子里与另一个盘子里的三个 5 盎司的砝码平衡。读者可能愿意停下，设计另外的用 5 盎司和 7 盎司的砝码称出一个 1 盎司的土豆方法。

一旦知道了能称 1 盎司的土豆，那么我们就能称任意数量的盎司值。例如，能用下面的方法称出一个 6 盎司的土豆。先回想一下，

两个 7 盎司的砝码和一个 1 盎司的土豆与三个 5 盎司的砝码平衡，将砝码的数量增加到六倍，称出一个 6 盎司的土豆。这就是说，从关系式 $1+2\cdot 7=3\cdot 5$ 中，得出 $6(1+2\cdot 7)=6(3\cdot 5)$，或者 $6+12\cdot 7=18\cdot 5$。



当然，这可能不是称出一个 6 盎司土豆的最简单的方法。实际上，$6+3\cdot 5=3\cdot 7$，我们把三个 5 盎司的砝码和土豆放在一边，而把三个 7 盎司的砝码放在另一边就可以称出 6 盎司的土豆。这个论证至少使人们确信，如果能使用一定数量的两种砝码来称出一个 1 盎司的土豆，那么他们就能用那些砝码称出任意整数盎司值。

5 和 7 的组合就到此为止。让我们转向另一个组合 8 和 21，如果只用 8 盎司和 21 盎司的砝码也能称出 1 盎司的土豆，由于

$$1+3\cdot 21=8\cdot 8。$$

八个 8 盎司的砝码在一个盘里将与另一个盘里的土豆和三个 21 盎司的砝码相平衡。

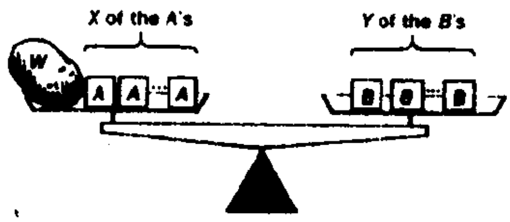
读者现在可能会怀疑也许任何一对砝码都能称出一个 1 盎司的土豆。但是事实并非如此。例如，如果仅有 6 盎司和 8 盎司的砝码，那么决不能指望称出 1 盎司的土豆，以及任何奇数的盎司值（读者应该停下来，想一下这其中的原因）。

现在到了提一些基本问题的时候了。假设有由我们支配的不仅数量的两种砝码，怎样知道用它们能否称出一个 1 盎司的土豆？我们能用 539 盎司和 1619 盎司的砝码称出 1 盎司的土豆吗？更一般地说，人们可以问：用两种不限定数量的给定砝码，可以称多重的土豆？请记住所有的土豆和砝码都以整数（0，1，2，3，4，……）计量，这个整

数通常指自然数。

这些问题事实上与数有关，而不是土豆。让我们把第二个问题翻译成数的语言：分别用 A 盎司和 B 盎司来表示两种砝码的重量，土豆的重量用 W 盎司来表示。

存在着不同的称土豆的方法，一个方法是把一些 A 盎司的砝码和土豆放在一个盘子里，而把一些 B 盎司的砝码放在另一个盘子里。假定使用 X 个 A 盎司砝码和 Y 个 B 盎司砝码：



X 个 A

Y 个 B

对应的方程是：

$$W+XA=YB$$

这是一个唯一决定图中的天平平衡的方程(我们省略了字母间的乘号)。

称土豆的另一个方法是把 B 盎司的砝码与土豆放在一起，而单独把 A 盎司的砝码放在另一个盘子里。我们有：

$$W+XB=YA$$

第三个方法是把土豆放在一个盘子里，而把称重的砝码放在另一个盘子里。这种方法对应于方程：

$$W=XA+YB$$

没有别的实际可行的方法存在了，因为在两个盘子里放上同样重量砝码没有必要，它们可以拿掉而不影响平衡，因此人们只需要考虑三种方程：

$$W+XA=YB, W+XB=YA, W=XA+YB。$$

关于土豆的问题现在变成了关于自然数的问题：设 A 和 B 是自然数，哪些自然数 W 能找到自然数 X 和 Y，使得下面的方程中至少有一个能成立：

$$W+XA=YB, W+XB=YA, W=XA+YB?$$

依靠负数的帮助，可以把前两个方程 $W+XA=YB$ 和 $W+XB=YA$ 化成第三种类型的方程 $W=XA+YB$。例如第一种方程 $W+XA=YB$。这个方程能被改写成 $W=(-X)A+YB$。同样地，$W+XB=YA$，其中 X 和 Y 是自然数，能够把它写成 $W=YA+(-X)B$ 化成第三种形式。

关于土豆的问题现在简化成这样：设 A 和 B 都是自然数，哪些自然数 W 可以用 $W=MA+NB$ 的形式来表达，其中 M 和 N 为某个整数？让我们看一看 M 和 N 的哪些值描述了上述 $A=5$ 和 $B=7$ 这种组合的情况。

用 5 盎司和 7 盎司进行的若干称量见下表。

W	称量	写作 MA+NB 形式的代数式	M 和 N
5	$5=1\cdot5$	$5=1\cdot5+0\cdot7$	$M=1, N=0$
10	$10=2\cdot5$	$10=2\cdot5+0\cdot7$	$M=2, N=0$
7	$7=1\cdot7$	$7=0\cdot5+1\cdot7$	$M=0, N=1$
14	$14=2\cdot7$	$14=0\cdot5+2\cdot7$	$M=0, N=2$
12	$12=5+7$	$12=1\cdot5+1\cdot7$	$M=1, N=1$
3	$3+7=2\cdot5$	$3=2\cdot5+(-1)\cdot7$	$M=2, N=-1$
1	$1+2\cdot7=3\cdot5$	$1=3\cdot5+(-2)\cdot7$	$M=3, N=-2$

正如一个土豆可以用一种以上的方法来称重一样，M 和 N 也不一定是唯一的。对于 $W=6$ 的情况来说，就可以有两种称法：

$6+12\cdot7=18\cdot5 \qquad (6=18\cdot5+(-12)\cdot7)$

和

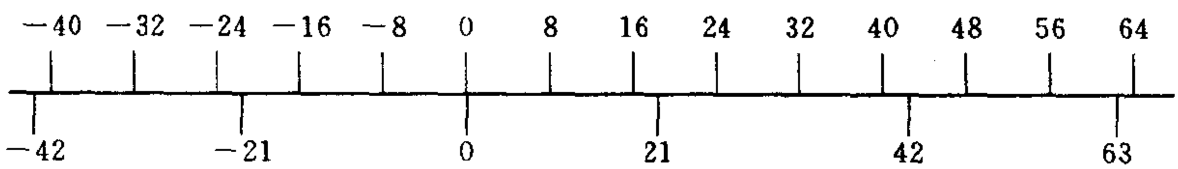
$3\cdot5+6=3\cdot7 \qquad (6=(-3)\cdot5+3\cdot7)$。

只要进行一些简单的算术运算就可以进一步产生更多的 6 的表示法例如：

$6=4\cdot5+(-2)7; 6=11\cdot5+(-7)7; 6=(-10)5+8\cdot7$。

关于早先的称出一个 1 盎司重的土豆的可能性问题，现在成为：对哪两个自然数 A 和 B，能找到整数 M 和 N，使得 $1=MA+NB$? 并且我们想知道：如果两个砝码不能称出 1 盎司重的土豆，它们能称出的最小的正数重量是多少？

研究这些问题另有一条途径。回想一下 $1=8\cdot8+(-3)\cdot21$ 这个式子，它依据的是 $8\cdot8$ 与 $3\cdot21$ 正好相差 1 这个事实。“整数乘以 8”这样形式的数叫作 8 的倍数。21 的倍数或任何整数的倍数也以同样的方式定义。下面的插图画出了一些 8 的倍数和一些 21 的倍数。



因而“A 和 B 能称量 1 吗？”这个问题就可以用倍数的措辞说成：“存在正好相差 1 的 A 和 B 的倍数吗？”由于一个数的倍数在数轴上是按规则的间隔分布的，这个问题也能从几何上翻译成：如果我们有一根无标志的长 A 英寸的尺子，和另一根同样无标志的 B 英寸长的尺子，我们能量出一段 1 英寸的距离吗？

读者大概已经猜出了这一般性问题的答案。第三章将回到这个论题上来，那时方程 $W=MA+NB$ 将成为建立自然数的基本性质的主要工具。

练　习

1、用 4 分和 7 分的邮票可以组成哪些数量的邮资？

2、假设你有一架两个盘的天平和一定数量的砝码：一个 1 盎司的砝码，一个 3 盎司的砝码，一个 9 盎司的砝码，一个 27 盎司的砝码等等(每个砝码都是 3 的乘积)，你可以称出哪些重量？

3、你有两个没有刻度的容器，一个能盛 5 升，另一个能盛 7 升。

你到河边，希望正好打回 1 升水来，你应该怎样做？

4、让我们来考察一个仅有两种硬币的国家，这两种硬币叫“尼克”和“腊克”，尼克的值是 5 分，腊克的值是 7 分。

(a)如果一个顾客只有腊克，而店员只有尼克，顾客能通过和店员交换货币而买 1 分钱的货物吗？

(b)如果一个顾客只有尼克，而店员只有腊克，顾客能通过和店员交换货币而买 1 分钱的货物吗？

(c)在上述两小题里，都可以进行哪些交易？

5、一只兔子不管在数轴的什么地方，向右可以跳 9 个单位，向左可以跳 7 个单位。

(a)如果它从 0 开始，它能跳到 10 吗？

(b)如果它从 1 开始，它能跳到 4 吗？

第二章　素　数

这一章专门致力于素数的研究，而素数在理论上和应用上都是很重要的。为了正式给素数一个定义，需要一个自然数的因数的概念。如果存在一个自然数 Q，使得 B 是 Q 和 A 的乘积，那么自然数 B 能被自然数 A **整除**，

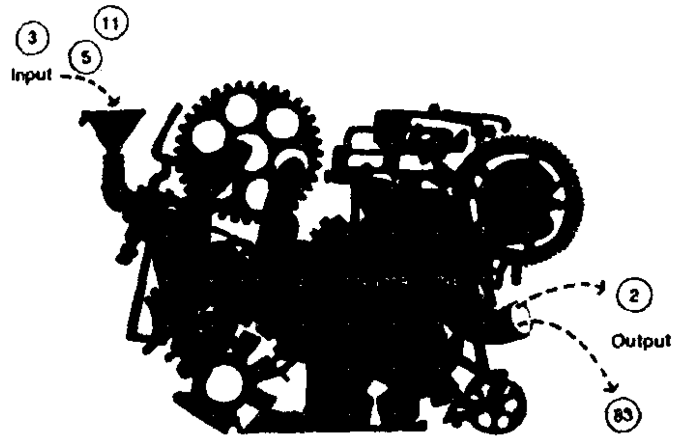
$$B=QA$$

如果 B 能被 A 整除，那么 A 叫作 B 的**因数**，B 叫作 A 的**倍数**。这样 6 有四个因素：1，2，3 和 6；2 的倍数一定是偶数。任何自然数 A 都是 0 的因数，因为 $0=0\times A$。只有一个因数的唯一的自然数是数字 1。任何别的自然数至少有两个因数，即它本身和 1。只有两个因数的自然数叫作**素数**。素数也可以被描述为这样的（大于 1 的）自然数，它不是两个比它小的自然数的乘积。

当我们看到越来越多的素数时，心里可能会有各种问题。有多少个素数？如果在两个素数间没有素数，我们就把这两个素数叫作相邻的素数。我们会问："相邻的素数的间隔能有多大？"有多少对相差 1 的素数（例如 2 和 3）？有多少对相差 2 的素数（如 3 和 5，5 和 7，11 和 13）？有多少对相差 3 的素数（如 2 和 5）？有多少对相差 4 的素数（如 3 和 7，7 和 11）？这些问题中有些很容易回答，但有些却很难，没有人知道答案。让我们一个一个地研究它们。

第一个问题——"有多少个素数？"——这由大约 2300 年前的希腊人回答了。他们的解答，见于欧几里德《几何原理》第 9 卷中定理 20，它是基于希腊人发明的原理，可称为素数制造机之上的。当任何人给这个机器喂进素数时，它吐出全新的素数——与那些喂进去的

素数不同的素数。首先注意观察它的运转，然后我们将解释为什么它总是有效。



让我们给机器喂进素数 3,5 和 11，它们是我们任意选择的。机器把它们都乘起来，得到 165，然后给这个结果加 1，得到 166，然后它生产出所有能整除 166 的素数，即 2 和 83。可以看到 2 和 83 确实是全新的，它们与喂进机器的三个素数不同。这是定理 1 的内容，它是根据下面引理的前半部分的内容而得到的。

引理·如果两个自然数 A 和 B 中的每一个都能被自然数 D 整除，那么它们的差 A−B 就能被 D 整除，它们的和 A+B 也能被 D 整除。

证明·根据“除法”的定义，存在整数 Q_1 和 Q_2，使得

$$A=Q_1D \text{ 和 } B=Q_2D$$

这样

$$A-B=Q_1D-Q_2D=(Q_1-Q_2)D$$

由于 Q_1-Q_2 是一个整数，并且 $A-B=(Q_1-Q_2)D$，所以我们确定 A−B 能被 D 整除（相似的推理表明 A+B 能被 D 整除）。

定理 1·假设几个素数的乘积加 1 而得到的自然数能被一个素数除，那么这个素数与那些素数中的任何一个不同。