YSICS

中国科学技术大学
物理辅导班 主编
张家铝等 审校

国 物 理
题与解答

相对论
固体物理及其它

大学出版社

美国物理试题与解答

第七卷 相对论、固体物理及其它

中国科学技术大学物理辅导班 主编

张家铝 周又元 章世玲 审校

中国科学技术大学出版社

1989·合肥

美国物理试题与解答

第七卷　相对论、固体物理及其它

中国科学技术大学物理辅导班　主编

张家铝　周又元　章世玲　审校

责任编辑：育　之　封面设计：何燕明

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号）

安徽省金寨县印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

开本：787×1092/32　印张：9.375　字数：209千

1989年6月第1版　　1991年4月第2次印刷

印数：5001—8000册

ISBN 7-312-00012-6/o.7　定价：3.50元

内 容 简 介

《美国物理试题与解答》丛书按学科范畴分为七卷。该丛书收集了美国加利福尼亚大学伯克利分校、纽约州立大学布法罗分校、芝加哥大学、哥伦比亚大学、麻省理工学院、普林斯顿大学和威斯康星大学的研究生入学试题，以及丁肇中招收的高能实验物理博士研究生试题2550道. 同时收集1980—1985年中国赴美物理硕士、博士入学资格考试（CUSPEA）物理试题100道，并逐一作了解答. 这些试题面广义新，思路灵活，所用的数学工具虽不繁难，但却十分注重物理思想和实际应用，其方法和结论往往较为简单和实用. 在一定程度上反映了美国物理教学的精华，对我国的物理教学也有借鉴和启迪作用.

本卷收集相对论、固体物理及其它一些不便按通常分类列入有关部分的题目共165题。可供我国大学物理系师生使用，对于准备攻读硕士、博士学位的研究生和留学生，更是一本难得的参考书，对于中学物理教师的进修，也有一定的参考价值。

前　言

习题是锻炼思维的体操，而试题又往往是习题中的精粹．解答物理题是物理课程学习中必要而又重要的环节．

这套《美国物理试题与解答》是一部丛书，分七卷．各卷名称及审校人如下：第一卷，力学（强元棨、顾恩普、程稼夫、李泽华、杨德田）；第二卷，电磁学（赵叔平、尤峻汉、朱俊杰）；第三卷，光学（白贵儒、郭光灿）；第四卷，原子物理学、核与粒子物理学（金怀诚、杨保忠、范扬眉）；第五卷，热力学与统计物理学（郑久仁）；第六卷，量子力学（张永德、范洪义、朱栋培）；第七卷，相对论、固体物理及其它（张家铝、周又元、章世玲）．《丛书》大体上包括了大学物理课程的全部内容．

《丛书》从美国七所大学近十年来研究生入学试题（包括Qualifying Eant）以及其它几类试题共3100道中，筛选了2550道，除个别题外我们均给了解答．试题来源及其代号是：哥伦比亚大学(Col)；加利福尼亚大学伯克利分校(Ber)；麻省理工学院(MIT)；威斯康星大学(Wis)；芝加哥大学(Chi)；普林斯顿大学(Pri)；纽约州立大学布法罗分校(Buf)；中美联合招收赴美攻读物理博士生考试试题(CUSPEA)；丁肇中招收实验高能物理博士生试题(CCT)．

一般地说，美国的物理试题，涉及的数学并不繁难，但却或多或少具有以下三方面的特色：内容新颖富于"当代感"；思路灵活，涉及面宽阔；方法和结论往往简单而实用．一些题分别涉及了不少新兴课题和边沿交叉区域；有不少题

是拟题者直接从科研工作中摘取的；再有不少题本身似乎显得粗糙但却抓住了物理本质，显得“物理味”很足．纵观这些，我们深切地感到，这些题目的集合在一定程度上体现了美国科学文化的个性及其思维方式上的特色．

维其如此，我们认为，不惮繁重，集近百人的努力，将它们收集后一一解答是值得的．它们也许会对我国大学和研究生物理学科的教学和赴美考试起到一定的参考作用，对推动我国大学物理教学更新起到一点促进作用．

参加这套丛书解题的人数很多，其中主要的共 70 余人，参加各卷审校的共 20 名．为向读者负责，每道题后均注明了解题人的姓名．

编审中，我们仅删去了部分很常见、很平淡的题以及一些没有什么意义的题（后者比如，纽约年平均气温是多少等等）．同时，为了节省篇幅，不得不放弃了英文原题．

由于丛书篇幅大、涉及面广、参加解答和审校的人多、工作时间短，加之我们水平有限，因此，错误或不当之处在所难免，请读者批评指正．

本卷所收集的试题，除了属于相对论、固体物理的内容以外，还有一些其他题目．这些题目按通常物理学的分类方法很难归于哪一部分，因此我们就单辟一篇置于本卷之后．同时有几个其他部分遗漏的题目，我们也放在这里．

本卷第一篇是相对论部分，除了狭义相对论以外还包含了广义相对论及相对论宇宙学的内容．由于狭义相对论的基本观念和方法与整个物理学的内容都有紧密的联系，所以在前面几卷的试题中实际上已经收进了不少属于狭义相对论的题目．我们考虑到内容的有机联系，并没有试图将它们集中到一起，因此本卷第一篇第一节所收集的试题只是几个比较

特殊，比较典型一点的题目而已，大量的狭义相对论的题目还分散在其他各卷中．广义相对论及相对论宇宙学的内容，在我国理工科大学的一般考试中并未涉及．不过目前美国几所主要的大学的考试中还是不时有这方面的考题出现的．我们把它集中于此，也是为了使大家对美国试题的全貌能有更深刻的了解．同时这些有趣而发人深省的题目，对有志于学习这部分内容的读者也是很有启迪的．

本卷第二篇是固体物理的内容，这部分与我国理工科大学教材基本是吻合的．不过从试题的广泛性和灵活性来看，又有它独到之处．这两点对我国学生说来都是很有价值的．

在本卷第三篇内所收集的试题，在一定程度上也带有我国综合考试的性质．很多题目不但要求考生熟习物理学的过去，而且还要了解物理学的最新动态和发展趋势．读者阅读时，似乎不宜局限于问题本身的内容，而应根据题目提供的线索更多地注意当前物理学上的新进展．这篇内也有几个问题，我们没有解答，因为它涉及到考生所处的环境和情况．我们仍把问题列出，供读者自己思考．

参加本卷解题的主要有：郭志椿、陈兵、王平、章世玲、朱冰、王勇、周东方、王善祥、斯其苗、卢建新、宁铂、邱岫、王安民、孙翼、景益鹏、刘渝珍、刘方新、庄珍泉等．

编审者谨识

1987年12月

目　录

前言……………………………………………………（Ⅰ）

第一篇　相对论………………………………………（1）

§1　狭义相对论（1001—1007）………………（1）

§2　广义相对论（1008—1023）………………（14）

§3　相对论宇宙学（1024—1028）……………（39）

第二篇　固体物理……………………………………（49）

§1　晶体的结构及有关性质（2001—2027）……（49）

§2　电子论、能带论与半导体（2028—2051）……（88）

§3　物质的电磁性质、光学性质及超导性（2052—2076）………………………………………（139）

§4　杂题（2077—2081）……………………………（187）

第三篇　其它…………………………………………（195）

§1　综合问答（3001—3025）……………………（195）

§2　估算和测量（3026—3048）…………………（233）

§3　数学处理（3049—3056）……………………（272）

第一篇 相对论

§1 狭义相对论（1001—1007）

1001 (Pri, 1980)

在本题中请你由爱因斯坦设计的几个推理实验导出洛伦兹变换的一些结论．爱因斯坦推理实验中涉及一理想化的时钟（图 1.1a）．其中光波（或有质量的粒子）在两镜面间来回反射，当光波由镜A到镜B再回到镜A这样一个来回后，时钟便发出一次滴答声．

(a) 用如下方式推导狭义相对论的时间膨胀公式．

假定光在各参照系中有相同速度 c．在以速度V沿垂直于两镜面分离方向而运动的参照系中（图 1.1b）钟的滴答声比在其静止系中的慢多少？

(b) 根据狭义相对论，对给定速度的所有钟，其时间膨胀因子是相同的，与它们的工作机制无关．假定在爱因斯坦的时钟中，用有质量的粒子代替光子在镜面间来回跳动．在钟的静止系中，粒子的速度 $v<c$．用如下方式导出速度的洛伦兹变换规则：若要求在 (a) 所考虑的参照系中，以有质量的粒子工作的钟的滴答声较之其静止系而言所慢的程度与 (a) 中所求得的时间膨胀因子相同，那么在该参照系中粒子速度应当多大？

(c) 下面推导洛伦兹长度收缩律．假定钟仍用速度为 c 的光子工作，但在运动前将它转动了 90°，因此其速度 v 将

平行于两镜面分离方向(图1.1 c). 试问钟在运动参照系中

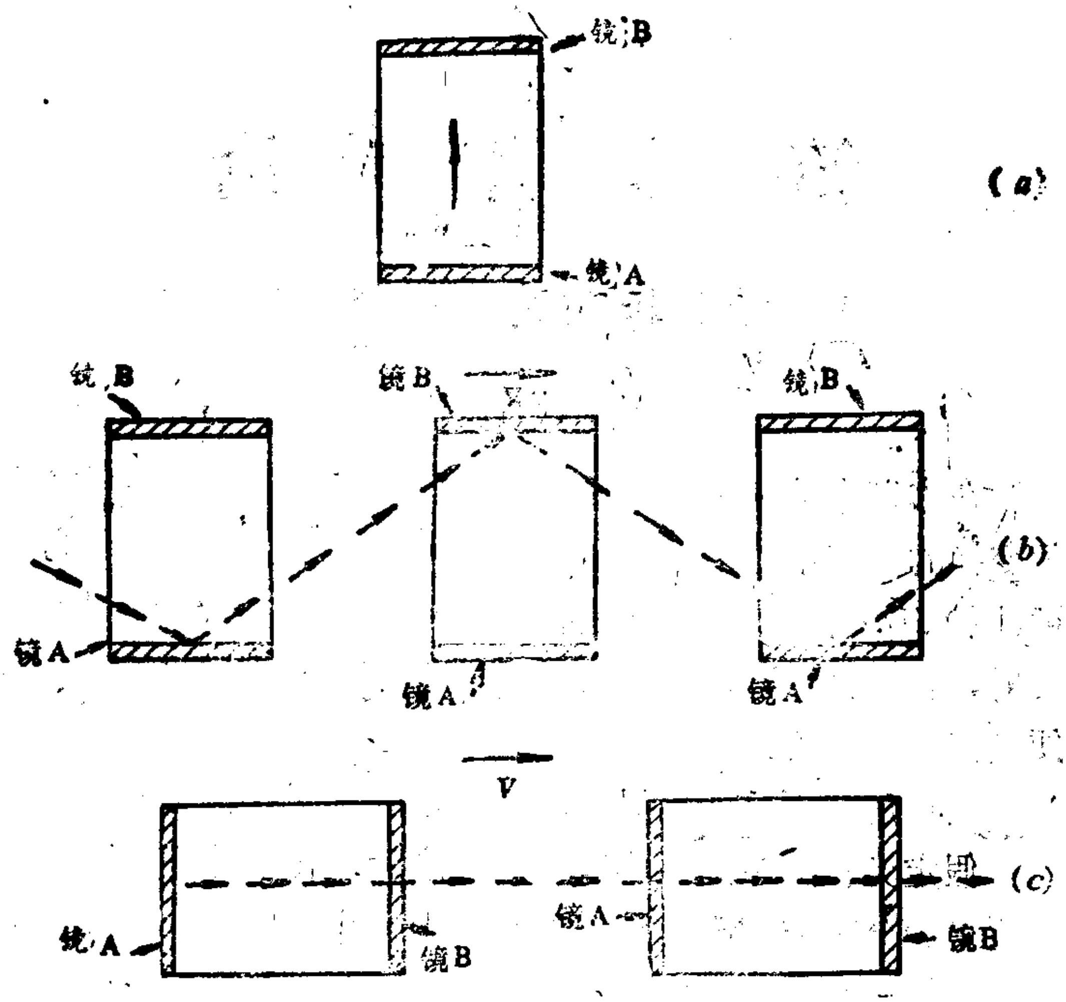

图 1.1

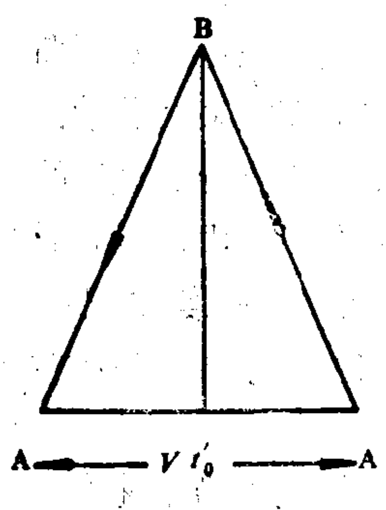

图 1.2

应比在其静止系中缩短多少才能使它在运动系中比在静止系中的滴答声减慢的程度与 (a) 中求出的时间膨胀因子相同?

解: (a) 见图 1.2, 假定A, B两镜相距 L, 在静止系中光走一个来回的时间 $t_0=\frac{2L}{c}$, 这就是钟在静止时一次滴答声的时间. 钟

运动时一次滴答声的时间设为t_0',如图. 则有

$$L^2+\left(\frac{1}{2}Vt_0'\right)^2=\left(c\frac{t_0'}{2}\right)^2,$$

$$t_0'=\frac{2L}{\sqrt{c^2-V^2}}=\frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=\frac{t_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

(b) 静系中，有质量的粒子在镜面间来回一次的时间为$t=\frac{2L}{v}$. 这是钟在其静止系中一次滴答声的时间. 设动系中，有质量的粒子速度为v'，则$L^2+\left(\frac{1}{2}Vt'\right)^2=\left(v'\frac{t'}{2}\right)^2$,

$$t'=\frac{2L}{\sqrt{v'^2-V^2}}.$$

要求 $t'=\frac{t}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=\frac{2L/v}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$，则最后可得

$$v'=\sqrt{v^2+V^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

(c) 设运动参照系中，A,B相距L'，则光由A到B时有 $L'+Vt_1'=ct_1'$，$t_1'=\frac{L'}{c-V}$， 再由B返回A时有

$L'-Vt_2'=ct_2'$，$t_2'=\frac{L'}{c+V}$， 所以

$$t_0'=t_1'+t_2'=\frac{(c+V+c-V)}{(c-V)(c+V)}L'=\frac{2L'}{c(1-V^2/c^2)},$$

依题意

$$t_0'=\frac{t_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=\frac{2L/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=\frac{2L'/c}{(1-V^2/c^2)},$$

所以 $$L' = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} L.$$

（王　平）

1002 (Pri, 1978)

宇宙射线：

(a) 静止的μ介子寿命为10^{-6}s,质量是$100\text{MeV}/c^2$. 若大气中（高度≈10^4m）的μ介子要到达地球表面.问它需要带有多大能量？

(b) 假定在零级近似下地球具有1G的磁场，方向沿着其轴向，延伸范围为10^4cm. 问在赤道处垂直射入能量为E的μ介子被磁场偏转的大小和方向？

(c) 宇宙线中的高能质子能通过过程$p + \lambda \to p + \pi$与3k辐射（宇宙背景）相碰撞而损失其能量. 问一个质子要具有多大的能量才能超过此反应的阀值？

解： (a) 由运动坐标系中的时间膨胀可知

$\Delta T = \Delta T_0 \Big/ \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$, ΔT_0是静止寿命. 但总能量

$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$，所以 $\Delta T = \Delta T_0 \frac{E}{mc^2}$. 欲使μ介子到达地面必

须使 $\Delta T = \frac{h}{v} = \Delta T_0 \frac{E}{mc^2}$, 即$E = \frac{mc^2}{\Delta T} \frac{h}{v}$.

假定μ介子的速度$v \approx c$，则

$$E = \frac{hmc}{\Delta T} = \frac{10^4 \times 100}{3 \times 10^8 \times 10^{-6}} \approx 3.3 \times 10^3 \text{MeV}.$$

(b) 取 z 轴 $/\!/ \boldsymbol{B}$, 由 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{e\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}}{c}$, 其中 e 为 μ 介子的电荷(等于电子电荷). 但 $\boldsymbol{P}=\frac{E\boldsymbol{V}}{c^2}$, 由于粒子的能量与时间无关, 所以 $\frac{E}{c^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\frac{e\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}}{c}$.

取x,y平面为赤道平面,坐标原点选在地球表面,而y轴为 μ 介子初始速度的方向,则 $x_0=0, y_0=10^4\mathrm{cm}$, $P_{0y}=-\boldsymbol{P}_0=-\frac{EV_0}{c^2}$. 解此初始条件的微分方程可得下述解:

$x=R_1\cos\omega t+\frac{cP_{0y}}{eB}$, $y=-R_1\sin\omega t+y_0$ 其中 $R_1=\frac{P_0c}{eB}$, $\omega=\frac{eBC}{E}$. 到达地球表面时 $y_e=0$, 所以 $\sin\omega t=\frac{y_0}{R_1}$, 故

$$x_e=R_1\sqrt{1-\left(\frac{y_0}{R_1}\right)^2}+\frac{cP_{0y}}{eB}\approx\frac{cP_0}{eB}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{y_0}{R_1}\right)^2\right]$$

因此电荷 e 的符号决定 x 的正负号.

因为 $cP_0=\sqrt{E^2-m^2c^4}$,所以偏转角 $\alpha=\frac{1}{2}\frac{eBy_0}{\sqrt{E^2-m^2c^4}}$, 代入已知数值得 $\alpha=5\times10^{-4}$ 弧度, 偏转方向则折向 x 轴的正方向.

(c) 反应前在实验室参考系由系统的总四度动量为 $P_i=\left((\boldsymbol{P}_p+\boldsymbol{P}_\lambda,\ i\frac{E_p}{c}+i\frac{E_\lambda}{c}\right)$, 其中 E_p 为质子的总能量, $\boldsymbol{P}_p$ 为其动量, $\boldsymbol{P}_\lambda$ 和 E_λ 分别为微波的动量和能量. 反应后在质心系内的四度动量为

$$P_f=(0,im_pc+im_\pi c).$$

由于四度矢量平方的不变性以及四度动量守恒定律， 所以 $P_i^2 = P_f^2$，展开此式，得

$$-(m_p + m_\pi)^2 c^2$$
$$= P_p^2 + P_\lambda^2 - 2|P_p||P_\lambda| - \frac{E_p^2}{c^2} - \frac{E_\lambda^2}{c^2} - 2\frac{E_p E_\lambda}{c^2}.$$

(显然最大能量转移发生在对心碰撞， 故

$\boldsymbol{P}_p \cdot \boldsymbol{P}_\lambda = -|P_p||P_\lambda|$).

解得 $$E_p \approx \frac{m_\pi (m_\pi + 2m_p) c^4}{2E_\lambda} = 2.7 \times 10^{14}\mathrm{MeV}.$$

（郭志椿）

1003 (MIT)

一束光通过折射率为n的玻璃块，如果玻璃块以恒定速度v沿入射光方向运动，试求玻璃块中光相对于实验室系的速度.

解：在固定于玻璃块的坐标系中，玻璃块中的光速为

$$u' = \frac{c}{n}.$$

根据相对论的速度变换公式，将u'变换到实验室系中，

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{(c/n)v}{c^2}} = \frac{c + nv}{n + \frac{v}{c}}.$$

此即玻璃块中的光在实验室系的速度.

（邱 岫）

1004 (Pri, 1979)

本题用狭义相对论求解.

相对于固定距离的星体为静止的观察者A在一个有限星系中看到各向同性的星体分布：在立体角 $d\Omega$ 中所见到的星体数为 $Pd\Omega=\frac{N}{4\pi}d\Omega$，其中 N 为A所能看到的全部星体个数。

另一个相对A沿 z 轴匀速运动的观察者 B 以很大速度 $v=\beta c$ 运动. 令 θ' 和 ϕ' 分别为B的惯性系中的极角(相对 z 轴）和方位角；$P'(\theta',\phi')d\Omega'$ 为在立体角元 $d\Omega'=\sin\theta' d\theta' d\phi'$ 中B所见到的星体个数.

(a) 求 P' 作为 θ',ϕ' 的函数（假定A所见到的每一个星体，B都能看到）.

(b) 当 $\beta\to1$ 的极限情况时讨论(1)在向前方向；(2) 在向后方向B所看到的情况.

解：(a) 因 $d\Omega'/d\Omega=d(\cos\theta')/d(\cos\theta)$，根据光行差公式可得 $\cos\theta'=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}$，或写成 $1+\beta\cos\theta'=\frac{1-\beta^2}{1-\beta\cos\theta}$. 对上式微分则得 $d\Omega'=\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}d\Omega$，或 $d\Omega=\frac{1-\beta^2}{(1+\beta\cos\theta')^2}d\Omega'$，所以

$$P'(\theta',\phi')=\frac{N}{4\pi}\frac{1-\beta^2}{(1+\beta\cos\theta')^2}.$$

(b) 当 $\beta\to1$ 时：

(1) 在向前方向 $\cos\theta_0'=1$，θ_0' 应为视线方向，它与光子运行方向 θ 正好相反，即 $\theta_0'=-\pi+\theta'$，$\theta'=\pi+\theta_0'$. 故有 $P'=\frac{1+\beta}{1-\beta}\to\infty$.

(2) 在向后方向 $\cos\theta_0'=-1$，$\therefore\cos\theta'=1$，$P'=0$.

即在正后方向见不到星体，而在正前方向星体却大量集中.

（郭志椿）

1005 (Pri, 1977)

一个相对于彼此间距固定不变的星体系统为静止的观察者看到一个各向同性的星体分布. 对任意立体角元 $\mathrm{d}\Omega$ 有 $\mathrm{d}N=\dfrac{N}{4\pi}\mathrm{d}\Omega$. 现考虑另一个以恒定加速度 a（相对其瞬时惯性坐标系）运动的观测者，假如他在时刻 $t=0$ 相对固定的观测者静止并开始运动. 试确定在时刻 t' 的星系分布 $\mathrm{d}N=N(\theta',\phi')\mathrm{d}\Omega'$. 这里 t' 为其自身系统中的时间.

解： 在瞬时惯性系中，$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=1$，$\dfrac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}=0$.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau^2}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

因此 $\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{a}$，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=0$. 可以表示为四度矢量形式.

即
$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau^2}=\boldsymbol{a},\quad \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}=0.$$

在静止观测者所在的参考系中，方程仍有上述形式，即

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}\tau^2}=\boldsymbol{a},\quad \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}=a_0'.$$

如果瞬时惯性系相对于静止系的速度为 v（这也是第二个观测者的速度），并选 $t=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 x 方向一致. 则

$$a_x'=\gamma a,\quad a_y'=0,\quad a_z'=0,\quad a_0'=-i\gamma\frac{v}{c}a.$$

其中 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，而且

$$U'_x=\gamma v,\quad U'_y=0,\quad U'_z=0,\quad U'_0=\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\tau}=\gamma.$$

所以 $\gamma\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\gamma v)=\gamma a$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\gamma v)=a$.

因此

$$\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=at',$$

即

$$v=at'\Big/\sqrt{1+\left(\frac{at'}{c}\right)^2}.$$

根据 $\mathrm{d}t'=\gamma\mathrm{d}\tau=\gamma\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，可以将时间转换成运动观测者自身的时间：

$$t=\int_0^t\mathrm{d}t=\int_0^{t'}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t'=\int_0^{t'}\frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1+\frac{a^2t'^2}{c^2}}}=\frac{c}{a}\operatorname{arsinh}\frac{at'}{c},$$

即

$$t'=\frac{c}{a}\sinh\left(\frac{at}{c}\right).$$

故

$$v=\frac{c\sinh\left(\frac{at}{c}\right)}{\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{at}{c}\right)}}=\frac{\sinh\left(\frac{at}{c}\right)}{\cosh\left(\frac{at}{c}\right)}c=c\tanh\left(\frac{at}{c}\right).$$