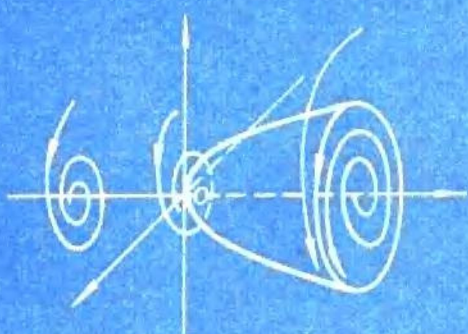
常微分方程的定性方法和分叉

陆启韶 编著



北京航空航天大学出版社

常微分方程的定性方法和分叉

陆启韶 编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书介绍常微分方程的定性理论、稳定性与分叉的基本原理和方法。其内容有：常微分方程的基本概念和定理、线性系统解的性质和稳定性、平面自治系统的定性理论和应用、非线性系统的稳定性理论和应用、微分动力系统初步、常微分方程分叉问题的主要研究方法和应用。

本书可作为高等院校工科研究生和应用数学、力学、控制等有关专业的高年级大学生的教学用书，也可供教师和科学技术人员自学或参考。

常微分方程的定性方法和分叉

CHANGWEIFEN FANGCHENG DE
DINGXING FANGFA
HE FENCHA

陆启韶 编著

责任编辑 郭维烈

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行　　各地新华书店经销

北京农业工程大学印刷厂印装

787×1092 1/16 印张： 22 字数： 563 千字

1989年9月第一版 1989年9月第一次印刷 印数： 3000 册

ISBN 7-81012-117-0/O·011 定价： 4.40元

序　言

本书是根据作者从1984年以来在北京航空航天大学研究生院为工科研究生讲授《常微分方程定性方法》和《分叉理论及应用》等课程的讲稿修订而成的。它可以作为理工科高等院校有关专业的研究生和高年级大学生的教材或参考书。

本书包括常微分方程的定性理论、稳定性和分叉等的基本内容。第一章介绍常微分方程的基本概念和定理。第二章研究线性系统解的主要性质和稳定性。在第三章中着重讨论平面自治系统的定性理论和应用。第四章论述n维非线性系统的稳定性理论，重点放在李雅普诺夫第二方法及其应用。第五章介绍微分动力系统的基本概念和一些定理，特别着重讨论与分叉研究有关的内容。最后，在第六章中讲述常微分方程分叉问题的一般概念、静态分叉和霍普夫分叉的研究方法与应用以及分叉研究的一些进展。

本书特别重视基本概念、原理与方法的引进和阐述。在保证必要的数学体系和严密性的前提下，尽量采用深入浅出的叙述方式，这样便于工科研究生和应用数学专业本科生学习和理解有关的数学理论。本书的内容密切结合力学、物理学、化学、生态学、控制、机电工程和航空航天技术等方面的应用，并且力求反映八十年代的一些研究进展，以培养读者利用数学工具去解决实际问题的能力。本书的每章都有相当数量的例题和习题，并在书末给出习题的答案或提示，用来帮助读者加深理解所学的知识和熟练运用重要的方法。本书还附有较详细的参考书籍目录，供读者进一步学习时使用。

在本书的准备和编写过程中始终得到北京航空航天大学研究生院和北航出版社的大力支持。黄克累教授热情关心和支持本书的编写，管克英教授审阅了前三章的部分原稿，梅冰清同志精心绘制了插图，作者谨向他们致以衷心的感谢。近年来作者在学术会议、讨论班和学术访问中得到国内外同行的不少有益的指教，本书的出版得到国家自然科学基金和航空科学基金的部分资助，在此一并表示谢意。

由于作者的水平和能力所限，书中错漏之处在所难免，请读者和同行不吝批评指正。

陆启韶

1989年2月

一些符号说明

$\mathbf{R}$	实数集、实数轴
$\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$	n维实欧氏空间
$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \cdots\}$	整数集
$\mathbf{N} = \{1, 2, \cdots\}$	自然数集
$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$	n维向量$\mathbf{x}$和$\mathbf{y}$的内积
$\Vert x \Vert = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$	n维向量的模（欧氏范数）
$d(x, M) = \inf_{y \in M} \Vert x - y \Vert$	点x到集M的距离
$\dim V$	空间V的维数
$V_1 \oplus V_2$	子空间V_1和V_2的直和
$\operatorname{codim} V_1$	子空间V_1的余维数
$\operatorname{span}\{a_1, \cdots, a_k\}$	由向量$a_1, \cdots, a_k$张成的线性子空间
$V_1^{\perp}$	子空间V_1的正交补空间
$A = [a_{ij}]$	元素为a_{ij}的矩阵
A^T	矩阵A的转置
A^*	矩阵A的复共轭转置
A^{-1}	矩阵A的逆
$\det A$	矩阵A的行列式
$t_r A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$	矩阵A的迹
I	单位矩阵、恒等算子
$\mathscr{N}(L)$	算子L的零空间（核）
$\mathscr{R}(L)$	算子L的值域
$C(M, N)$	由集M到集N的一切连续映射的集合
$C^r(M, N) \quad (r \geqslant 1)$	由集M到集N的一切r阶连续可微映射的集合
$\triangleq$	定义为…

目　录

第一章　基本概念和定理

§1.1　前言…………………………………………………………（1）
§1.2　解的存在性和唯一性定理……………………………………（4）
§1.3　解的延拓………………………………………………………（11）
§1.4　解对参数与初值的连续性和可微性…………………………（17）
§1.5　稳定性的概念…………………………………………………（25）
习题…………………………………………………………………（32）

第二章　线性系统

§2.1　基本定理………………………………………………………（35）
§2.2　线性齐次和非齐次系统………………………………………（38）
§2.3　线性常系数系统………………………………………………（48）
§2.4　线性周期系数系统……………………………………………（58）
§2.5　线性系统解的稳定性…………………………………………（66）
习　题………………………………………………………………（75）

第三章　平面自治系统

§3.1　前言和基本概念………………………………………………（80）
§3.2　平面线性常系数系统的奇点…………………………………（87）
§3.3　平面非线性自治系统的奇点…………………………………（97）
§3.4　中心和焦点判定………………………………………………（111）
§3.5　平面奇点的指数………………………………………………（120）
§3.6　平面系统的极限环……………………………………………（124）
§3.7　无穷远奇点和全局结构………………………………………（137）
§3.8　在非线性振动和控制问题中的应用…………………………（148）
§3.9　在生态学和化学中的应用……………………………………（166）
习　题………………………………………………………………（178）

第四章　非线性系统的稳定性

§4.1　基本概念………………………………………………………（182）
§4.2　自治系统的李雅普诺夫第二方法……………………………（185）
§4.3　李雅普诺夫函数的构造………………………………………（202）
§4.4　按第一近似判定稳定性………………………………………（211）
§4.5　吸引域的估计…………………………………………………（214）

§4.6 非自治系统的李雅普诺夫第二方法……(217)
§4.7 周期解的稳定性……(224)
习 题……(227)

第五章 微分动力系统基础

§5.1 流……(231)
§5.2 庞卡莱-班狄克逊定理及应用……(238)
§5.3 线性化流和双曲性……(244)
§5.4 中心流形定理……(253)
§5.5 离散动力系统……(258)
§5.6 庞卡莱映射及应用……(261)
§5.7 结构稳定性……(266)
习 题……(270)

第六章 分叉问题——方法和应用

§6.1 前言……(273)
§6.2 静态分叉……(277)
§6.3 奇异性理论方法……(287)
§6.4 PB规范形……(299)
§6.5 霍普夫分叉……(305)
§6.6 其他分叉问题概述……(319)
习 题……(325)

附 录

A1 点集拓扑的一些概念……(328)
A2 格朗瓦尔不等式……(329)
A3 导算子……(330)
A4 变换群的概念……(333)
A5 隐函数定理……(334)

参考文献……(335)

习题答案和提示……(338)

第一章　基本概念和定理

本章讨论常微分方程的与具体形式无关的一般性质。我们在§1.1中介绍常微分方程的初值问题的基本概念。在§1.2中利用毕卡逐次近似法建立解的存在性和唯一性定理，然后在§1.3中讨论解的延拓问题。§1.4讲述解对初值与参数的连续依赖性和可微性。最后在§1.5中介绍李雅普诺夫稳定性等的基本概念。

§1.1　前　言

微分方程（或**微分方程组**）是一个（或一组）包含自变量、未知函数以及未知函数的导数的方程。如果微分方程（组）只有一个自变量，就称为**常微分方程（组）**。在本书中除非特别指明，我们都是讨论实数域上的常微分方程（组），并简称为微分方程（组）。

在本书中，我们主要研究已解出一阶导数的一阶微分方程组（下面我们用$\dot{x}_i$表示$\frac{dx_i}{dt}$，等等）：

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \cdots, x_n), \quad (i=1, \cdots, n) \tag{1-1}$$

其中$x_1, \cdots, x_n$是t的未知函数，$f_1, \cdots, f_n$是$t, x_1, \cdots, x_n$的已知函数。(1-1)称为**一阶标准形微分方程组**。为方便起见，我们通常都把(1-1)改写成向量形式

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1-2}$$

其中$t \in \mathbf{R}$，$x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$（$n$维实欧氏空间），$f = (f_1, \cdots, f_n)^T \in \mathbf{R}^n$是定义在$(n+1)$维的$(t, x)$-空间中的某个区域$\Omega$上的$n$维向量函数，即$f: \Omega \subseteq \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$。在$\mathbf{R}^n$中我们定义**内积**：

$$\langle x, y \rangle \triangleq x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x, y \in \mathbf{R}^n$$

并规定向量$x \in \mathbf{R}^n$的**模（范数）**为

$$\| x \| \equiv \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

我们有时也称(1-2)为一个**微分系统**，称f为系统(1-2)的**向量场（方向场）**。如果f与t无关，即对于所有$(t, x) \in \Omega$，$f(t, x) = f(x)$，即(1-2)变为$\dot{x} = f(x)$，称为**自治（或定常）微分方程**（即**自治（定常）系统**）；否则称为**非自治（非定常）微分方程**（即**非自治（非定常）系统**）。如果$f(t, x)$是x的线性函数，则称(1-2)为**线性微分方程（线性系统）**；否则称为**非线性微分方程（非线性系统）**。

如果$f(t, x) = A(t)x$，其中$A(t) = [a_{ij}(t)]$是以$a_{ij}(t)$为元素的$n \times n$矩阵，(1-2)变为

$$\dot{x} = A(t)x$$

称为**线性齐次微分方程组（线性齐次系统）**。如果$f(t, x) = A(t)x + g(t)$，其中$g(t)$

$=(g_1(t),\ \cdots,\ g_n(t))^T$，(1-2)变为

$$\dot{x}=A(t)x+g(t)$$

称为**线性非齐次微分方程组（线性非齐次系统）**。特别地，当 $f(t,\ x)=Ax$，A是$n\times n$常数矩阵时，(1-2)变为**线性齐次常系数微分方程组**：

$$\dot{x}=Ax$$

它亦称为**线性齐次自治微分方程组（线性齐次常系数系统、线性齐次自治系统）**。

假设$x=\varphi(t)$是定义在开区间$J=(a,\ b)\subset\mathbf{R}$上的可微函数（$J$可以是有限区间或无限区间），对于一切$t\in J$有$(t,\ \varphi(t))\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^{n+1}$，并有

$$\dot{\varphi}(t)=f(t,\ \varphi(t))$$

成立，则称$\varphi(t)$为方程(1-2)在J上的一个**解**。解$x=\varphi(t)$在$(t,\ x)$-空间中的几何图形是一条曲线，称为方程(1-2)的一条**积分曲线**。

我们要指出，任何一个n阶标准形微分方程：

$$x^{(n)}=f(t,\ x,\ \dot{x},\ \cdots,\ x^{(n-1)}),\quad x\in\mathbf{R} \tag{1-3}$$

都与下面的一阶标准形微分方程组等价：

$$\begin{cases}\dot{x}=x_1\\ \dot{x}_1=x_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ \dot{x}_{n-1}=f(t,\ x,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n-1})\end{cases} \tag{1-4}$$

大家知道，物理、力学、几何、工程技术以至生物科学、化学、经济学等都提出各种常微分方程问题，其中包括大量的非线性微分方程。下面我们举出一些重要的例子（以后再作进一步的说明和讨论），它们都可写成(1-1)的形式：

例1 n个自由度的保守动力学系统（哈密尔顿(Hamilton)系统）

假设$q=(q_1,\ \cdots,\ q_n)^T$表示系统的n个广义坐标，$p=(p_1,\ \cdots,\ p_n)^T$表示系统的n个广义动量，$H=H(p,\ q)$是系统的哈密尔顿函数，则保守系统由$2n$个一阶微分方程描述：

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i=1,\ \cdots,\ n) \tag{1-5}$$

例2 机械和电路的振动问题

机械系统和电路系统通常可以用微分方程（组）描述。一个典型的方程形式是二阶方程

$$\ddot{x}+p(t,\ x,\ \dot{x})=q(t),\qquad x\in\mathbf{R} \tag{1-6}$$

其中p，q是已知函数，许多著名的振动方程都是(1-6)的特殊情形，例如单自由度强迫线性谐振子方程：

$$\ddot{x}+2\mu\dot{x}+k^2x=A\cos\omega t$$

李纳德(Lienard)方程：

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$$

范德坡(Van der Pol)方程：

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0$$

瑞利(Rayleigh)方程：

$$\ddot{x}-\mu f(\dot{x})+k^2x=0$$

强迫杜芬（Duffing）方程：

$$\ddot{x}+2\mu\dot{x}+k^2x+\alpha x^3=A\cos\omega t$$

希尔（Hill）方程：

$$\ddot{x}+(a+\varphi(t))x=0,\qquad \varphi(t+T)=\varphi(t)$$

马蒂厄（Mathieu）方程

$$\ddot{x}+2\mu\dot{x}+(a+b\cos\omega t)x=0$$

等等。我们将在第三章§3.8中进一步讨论。二阶方程（1-6）可以写成标准形方程组：

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-p(t,\ x,\ y)+q(t),\end{cases}\qquad (x,\ y)\in\mathbf{R}^2 \tag{1-7}$$

例3 生态学问题

若有两个相互作用的种群，它们的成员数分别为 x 和y。由于种群之间的相互作用和内部的制约作用的影响，一般来说，x和y的增长率都会与x和y有关，即有

$$\begin{cases}\dot{x}=f_1(x,\ y)\\ \dot{y}=f_2(x,\ y)\end{cases},\qquad (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0) \tag{1-8}$$

一个重要的例子是伏泰拉-洛特卡（Volterra-Lotka）方程（参看第三章§3.9）：

$$\begin{cases}\dot{x}=x(A-By)\\ \dot{y}=y(Cx-D)\end{cases} \tag{1-9}$$

例4 化学和生物化学问题

普里戈京（Prigogine）和列费尔（Lefever）在1968年提出所谓布鲁塞尔振子（Brusselator）的三分子化学反应模型。设浓度分别为x和y的两种反应物质是空间均匀的，则有化学反应速率方程（参看第三章§3.9）：

$$\begin{cases}\dot{x}=a-(b+1)x+x^2y,\\ \dot{y}=bx-x^2y,\end{cases}\qquad (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0) \tag{1-10}$$

贝洛索夫-查波丁斯基（Belousov-Zhabotinsky，1958）反应是一种存在周期性化学振荡行为的化学反应。费尔德（Field）和诺伊斯（Noyes）在1974年提出所谓俄勒冈振子（Oregonator）模型去描述这种化学反应。它包含三种化学反应物质，假设其浓度x，y，z是空间均匀的，则有反速率方程：

$$\begin{cases}\dot{x}=k_1Ay-k_2xy+k_3Ax-2k_4x^2\\ \dot{y}=-k_1Ay-k_2xy+k_5Bz\\ \dot{z}=k_3Ax-k_5z\end{cases} \tag{1-11}$$

其中$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$，A，B，k_1，k_2，k_3，k_4，k_5都是正常数。

例5 生物学问题

在细胞中，令 x 代表一种稳定蛋白质，y 代表这个蛋白质的活性形态。于是两个耦合的细胞中x_i与y_i的变化满足下面的方程组：

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = A - Bx_1 - x_1y_1^2 + \delta_1(x_2 - x_1) \\
\dot{x}_2 = A - Bx_2 - x_2y_2^2 + \delta_1(x_1 - x_2) \\
\dot{y}_1 = Bx_1 + x_1y_1^2 - y_1 + \delta_2(y_2 - y_1) \\
\dot{y}_2 = Bx_2 + x_2y_2^2 - y_2 + \delta_2(y_1 - y_2)
\end{cases} \tag{1-12}
$$

我们知道，微分方程的基本问题在于求解和研究解的各种属性。在常微分方程课程的初等部分中，读者已经学过一些求微分方程的通解的方法。但是经过深入的研究后发现，绝大多数的微分方程都求不出通解。例如黎卡提（Riccati）方程

$$
\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)
$$

除了个别特殊情形之外，对于一般的函数P，Q，R，其通解不可能用初等函数或初等函数的积分表示。当然，对于一般非线性微分方程更是如此。而在物理、力学等和工程技术中提出的微分方程问题中，大多数是寻求满足某些附加条件的特解，即所谓**“定解问题”的解**。因此人们重视定解问题的研究。

最基本的定解问题是**“初值问题”**，也称为**柯西（Cauchy）问题**。微分方程（1-2）的初值问题就是对给定的（t_0，x_0）$\in \Omega \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$，求方程（1-2）的一个解$x = \varphi(t)$，它在包含$t_0$的某个区间$I$上可微，并满足条件

$$
\varphi(t_0) = x_0 \tag{1-13}
$$

我们称（t_0，x_0）为**初值**，称条件（1-13）为**初始条件**。若存在满足上述条件的函数$\varphi(t)$，则称$\varphi(t)$为方程（1-2）的满足初始条件$\varphi(t_0) = x_0$（或过（t_0，x_0）点）的一个解，或简称为这个初值问题的一个解。$x = \varphi(t)$的图形是过点（t_0，x_0）的一条积分曲线。

在解的属性的研究中，最根本的是定解问题的解的存在性和唯一性。显然，如果解根本不存在，那么这个定解问题就没有意义。如果解虽然存在但不唯一，因为这时有多个解甚至无穷多个解同时出现，这个定解问题是不明确的。因此解的存在性和唯一性定理是求解的前提，也是整个微分方程理论的基础。

由于在用微分方程描述实际过程时，方程本身和定解条件往往只能是近似的。我们自然关心当方程本身或定解条件发生变化时，相应的解发生怎样的变化。这是**解对初值或参数的依赖性问题**。此外，我们还特别关心解的各种稳定性问题。值得注意的是，由于能够求出解的解析表达式的情形是很少的，因此我们需要根据微分方程本身的结构而不是靠解的表达式去研究解的各种属性。

§1.2 解的存在性和唯一性定理

本节研究初值问题

$$
\begin{cases}
\dot{x} = f(t, x) \\
x(t_0) = x_0
\end{cases} \tag{1-14}
$$

其中$t \in \mathbf{R}$，$x \in \mathbf{R}^n$，$f: \Omega \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$。

首先看两个例子：

例1 $\dot{x}=x^2$，$x(0)=a$，$(t, x)\in\mathbf{R}^2$。

利用初等积分法，得知此初值问题的特解为：当 $a\neq 0$ 时，$x(t)=\dfrac{a}{1-at}$；当 $a=0$ 时，$x(t)=0$。

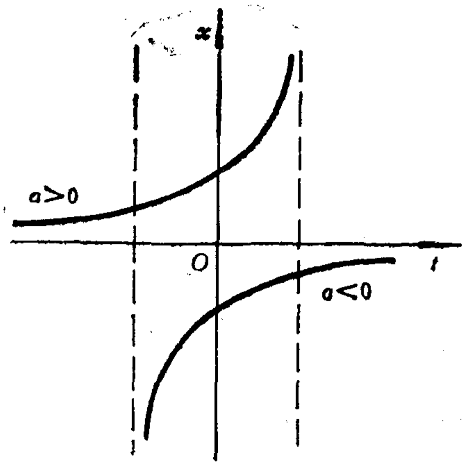


图 1·1

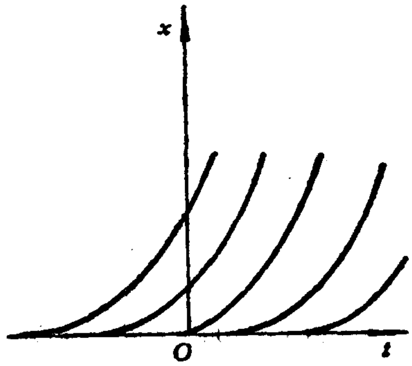


图 1·2

由图 1·1 见到，当 $a=0$ 时，初值问题的解在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在；而当 $a<0$ 时，此解在 $(1/a, +\infty)$ 上存在，当 $a>0$ 时，此解在 $(-\infty, 1/a)$ 上存在。由此可见，虽然对于任何 $a\in\mathbf{R}$，本例的初值问题的解都是存在且唯一的，但它的存在区间与 a 有关，并且可能不是整个实轴。

例2 $\dot{x}=\sqrt{x}$ $(-\infty<t<+\infty,\ x\geqslant 0)$，$x(0)=0$。

显然，$x=0(-\infty<t<+\infty)$ 是此初值问题的一个解。此外，对任何 $c\geqslant 0$，函数

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{(t-c)^2}{4} & (t\geqslant c)\\[2ex] 0 & (t<c)\end{cases}$$

也都是本例的初值问题的解，故有无穷多个解，即解的唯一性破坏。

在叙述解的存在性和唯一性定理的时候，我们要用到函数的李普希兹（Lipschitz）条件的概念。

定义1.1 假设向量函数 $f(x)$ 定义在区域 $D\subseteq\mathbf{R}^n$ 上，且存在 $L>0$，使得对于任何 x，$y\in D$，有

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant L\|x-y\| \tag{1-15}$$

则称 f 在 D 上满足**李普希兹条件**（以后简称**李氏条件**），并称 L 为 f 在 D 上的一个**李氏常数**。

如果 f 在 D 上满足李氏条件，显然它是 D 上的连续函数。但是即使 f 在区域 D 上一致连续，它也不一定满足李氏条件。例如取

$$f(x)=|x|^{\alpha},\qquad x\in(-1, 1)$$

其中$\alpha\in(0, 1)$是一个常数。它是一致连续的，但是对$|x|\neq 0$，有

$$|f(x)-f(0)|=|x|^{\alpha}=|x|^{\alpha-1}\cdot|x-0|$$

由于$|x|\to 0$时，$|x|^{\alpha-1}\to+\infty$，因此$f(x)$不满足李氏条件。

下面给出f满足李氏条件的一个充分条件：

命题 设在凸域$D\subseteq\mathbf{R}^n$上，n维向量函数$f(x)$的所有一阶偏导数存在且有界，则f在D上满足李氏条件。

证 由假设知道有常数$K>0$，使得在D上有

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\leqslant K \qquad (i, j=1, \cdots, n)$$

利用微分中值定理，对于x，$y\in D$有

$$|f_i(x)-f_i(y)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi)\right||x_j-y_j|$$

其中$\xi=x+\theta(y-x)$，$0<\theta<1$。因为D是凸域，所以当x，$y\in D$时，$\xi\in D$。于是由上面的不等式得到

$$|f_i(x)-f_i(y)|\leqslant nK\|x-y\|$$

从而

$$\|f(x)-f(y)\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)-f_i(y)|^2\right)^{1/2}\leqslant n^{3/2}K\|x-y\| \quad (1\text{-}16)$$

由此可见$f(x)$在D上满足李氏条件。证毕。

附注 即使f的一阶偏导数在D上不是处处存在的，它也可能满足李氏条件。例如在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)=|x|$就是如此。

现在给出解的存在和唯一性定理：

定理1.1 设$f(t, x)$在闭区域

$$G=\{(t, x)|\ |t-t_0|\leqslant a,\ \|x-x_0\|\leqslant b\}\subset\mathbf{R}^{n+1}$$

上连续，且对x满足李氏条件：

$$\|f(t, x)-f(t, y)\|\leqslant L\|x-y\|, \qquad \forall(t,x),(t,y)\in G \quad (1\text{-}17)$$

其中$L>0$是与t无关的常数。令

$$M=\max_{(t,x)\in G}\|f(t, x)\|, \qquad h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right) \quad (1\text{-}18)$$

则初值问题（1-14）在区间$I=\{t\,|\,|t-t_0|\leqslant h\}$上有一个解$x=\varphi(t)$，并且它是唯一的。

证 我们用毕卡逐次近似法证明这个定理。整个证明可以分成五个步骤：

(1) 把初值问题（1-14）化为等价的积分方程。

设$x=\varphi(t)$是初值问题（1-14）的解，即有

$$\dot{\varphi}(t)=f(t,\ \varphi(t))$$

且 $\varphi(t_0)=x_0$。对 t 积分之后，得到

$$\varphi(t)-\varphi(t_0)=\int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi(s))\mathrm{d}s$$

即 $\varphi(t)$满足积分方程

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi(s))\mathrm{d}s \tag{1-19}$$

反之，如果$\varphi(t)$ 是积分方程（1-19）的解，由上式知道$\varphi(t)$ 是连续的，从而$f(t,\ \varphi(t))$也是连续的。于是$\varphi(t)$ 是可微的，把（1-19）对 t 求导，得到

$$\dot{\varphi}(t)=f(t,\ \varphi(t))$$

此外在（1-19）中令$t=t_0$，有$\varphi(t_0)=x_0$。由此可见，$\varphi(t)$ 确实是初值问题（1-14）的解。

（2）构造毕卡近似函数序列$\{\varphi_k(t)\}$。

我们在区间 I 上按以下方法构造一个函数序列（当 $x\in\mathbf{R}$时，参看图1·3）：

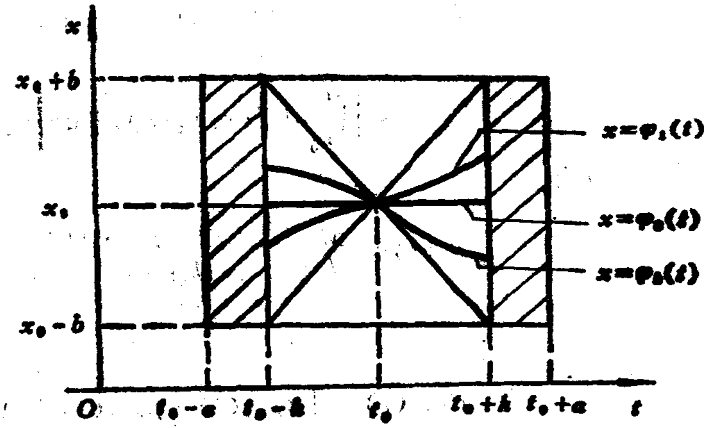


图 1·3

令零阶近似函数$\varphi_0(t)\equiv x_0$，$t\in I$。由于当$t\in I$ 时，$\varphi_0(t)$ 的图形始终在域G内，因此可以令一阶近似函数

$$\varphi_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi_0(s))\mathrm{d}s,\quad t\in I$$

由于当$t\in I$时，

$$\|\varphi_1(t)-x_0\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|f(s,\ \varphi_0(s))\|\,\mathrm{d}s\right|\leqslant M\cdot|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b$$

因此$\varphi_1(t)$ 的图形也在域G内。我们利用归纳的程序继续构造近似函数。如果 $\varphi_k(t)$已经得到，并且当$t\in I$时，$\|\varphi_k(t)-x_0\|\leqslant b$，即$\varphi_k(t)$ 的图形在域G内，则令（$k+1$）阶近似函数

$$\varphi_{k+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi_k(s))\mathrm{d}s,\quad t\in I \tag{1-20}$$

由于当$t\in I$时，

$$\|\varphi_{k+1}(t)-x_0\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|f(s,\ \varphi_k(s))\|\,\mathrm{d}s\right|\leqslant M\cdot|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b$$

可见这个近似函数序列可以继续构造下去，于是得到毕卡近似函数序列 $\{\varphi_k(t)\}$。它们都是 t 的连续函数。

（3）证明序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 在 I 上的一致收敛性。

函数序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 的收敛问题等价于级数

$$\varphi_0(t)+\sum_{k=0}^{\infty}[\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)] \tag{1-21}$$

的收敛问题，因此我们只要用维尔斯特拉斯的 M-判别法去证明（1-21）在 I 上一致收敛即可。

记 $d_k(t)=\|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)\|$，我们用归纳证明对于 $k=0,1,2,\cdots$ 有

$$d_k(t)\leqslant\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!},\qquad t\in I \tag{1-22}$$

其中 L 为（1-17）中的李氏常数。事实上，对 $k=0$ 有

$$d_0(t)=\|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)\|=\|\varphi_1(t)-x_0\|=\left\|\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_0(s))\mathrm{d}s\right\|$$

$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|f(s,\varphi_0(s))\|\mathrm{d}s\right|\leqslant M\cdot|t-t_0|$$

假设对 $t\in I$ 有

$$d_k(t)\leqslant\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!}$$

则

$$d_{k+1}(t)=\|\varphi_{k+2}(t)-\varphi_{k+1}(t)\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|f(s,\varphi_{k+1}(s))\right.$$

$$\left.-f(s,\varphi_k(s))\|\mathrm{d}s\right|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}L\|\varphi_{k+1}(s)-\varphi_k(s)\|\mathrm{d}s\right|$$

$$=L\left|\int_{t_0}^{t}d_k(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant L\frac{M}{L}\cdot\frac{L^{k+1}}{(k+1)!}\left|\int_{t_0}^{t}|s-t_0|^{k+1}\mathrm{d}s\right|$$

$$=\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|t-t_0|)^{k+2}}{(k+2)!}$$

于是对 $t\in I$，级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)\|=\sum_{k=0}^{\infty}d_k(t)\leqslant\frac{M}{L}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(L|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$\leqslant\frac{M}{L}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Lh)^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{M}{L}(\mathrm{e}^{Lh}-1) \tag{1-23}$$

于是由维尔斯特拉斯的 M-判别法知道级数（1-21）在 I 上一致收敛。从而函数序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 亦在 I 上一致收敛。记 $\varphi(t)=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(t)$，$t\in I$。由数学分析的定理知道，因为 $\varphi_k(t)$ 在 I 上连

续且一致收敛，所以$\varphi(t)$也在I上连续。此外，$\|\varphi(t)-x_0\|\leqslant b\quad(t\in I)$，即对$t\in I$的$\varphi(t)$的图形在域$G$内。

(4) 证明$x=\varphi(t)$是积分方程（1-19）的解，从而它就是初值问题（1-14）的一个解。

在（1-20）的两端令$k\to\infty$，得到

$$\varphi(t)=x_0+\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t}f(s,\ \varphi_k(s))\mathrm{d}s \tag{1-24}$$

我们利用李氏条件（1-17）证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t}f(s,\ \varphi_k(s))\mathrm{d}s=\int_{t_0}^{t}f(s,\ \varphi(s))\mathrm{d}s \tag{1-25}$$

事实上，任给$\varepsilon>0$，总可找到$N=N(\varepsilon)>0$，使得当$t\in I$时，对$k\geqslant N$有

$$\|\varphi_k(t)-\varphi(t)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{Lh}$$

于是当$t\in I$时，对$k>N$有

$$\left\|\int_{t_0}^{t}f(s,\ \varphi_k(s))\mathrm{d}s-\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s\right\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|f(s,\ \varphi_k(s))\right.$$

$$\left.-f(s,\ \varphi(s))\|\mathrm{d}s\right|\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}\|\varphi_k(s)-\varphi(s)\|\mathrm{d}s\right|\leqslant L\cdot\frac{\varepsilon}{Lh}\cdot h=\varepsilon$$

即（1-25）成立。由（1-24）和（1-25）见到，$x=\varphi(t)$满足积分方程（1-19）。

(5) 证明积分方程的解的唯一性，从而$x=\varphi(t)$是初值问题（1-14）在I上的唯一解。

事实上，如果初值问题（1-14）有两个解$x=\varphi(t)$和$x=\psi(t)$，则它们分别满足积分方程（1-19），即：

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\ \varphi(s))\mathrm{d}s$$

和

$$\psi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\ \psi(s))\mathrm{d}s$$

因为$\varphi(t)$和$\psi(t)$都在I上连续，故存在$A>0$，使得对$t\in I$有

$$\|\varphi(t)-\psi(t)\|\leqslant A \tag{1-26}$$

但是由李氏条件（1-17）有

$$\|\varphi(t)-\psi(t)\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|f(s,\ \varphi(s))-f(s,\ \psi(s))\|\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}\|\varphi(s)-\psi(s)\|\mathrm{d}s\right| \tag{1-27}$$

将（1-26）用于（1-27）右端，便得到

$$\|\varphi(t)-\psi(t)\|\leqslant LA\,|t-t_0|. \tag{1-28}$$

再将（1-28）用于（1-27）右端，如此继续下去，我们可以用归纳法证明对$t\in I$有

$$\| \varphi(t)-\psi(t) \| \leqslant \frac{A(L|t-t_0|)^m}{m!} \tag{1-29}$$

其中 m 为任意正整数。由于 m 的任意性，只有

$$\| \varphi(t)-\psi(t) \| = 0 \tag{1-30}$$

（1-29）才能成立。于是我们证明了对 $t\in I$ 有 $\varphi(t)=\psi(t)$。证毕。

附注1 本定理还可以利用泛函分析中的巴拿赫（Banach）压缩映象原理去证明（例如参看〔1〕或〔3〕）。

附注2 本定理关于 f 满足李氏条件（1-17）的假设可以用较强的条件：$\partial f_i/\partial x^j$（$i, j=1, \cdots, n$）在 G 上存在且有界（或连续）代替。这个条件虽然比李氏条件强一些，但易于验证，便于使用。

附注3 如果 f 对 t 和 x 连续，那么已经足以保证初值问题（1-14）的解的存在性。在此有下面的定理（参看〔3〕）：

定理1·2 设 $f(t, x)$ 在闭区域

$$G=\{(t, x) \mid |t-t_0| \leqslant a, \ \|x-x_0\| \leqslant b\}$$

上连续，令

$$M=\max_{(t, x)\in G} \|f(t, x)\|, \quad h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

则初值问题（1-14）在区间 $I=\{t \mid |t-t_0| \leqslant h\}$ 上有解 $x=\varphi(t)$。

但是单有 f 的连续性并不一定能得到解的唯一性，请看下面的例子：

例3 方程 $\dot{x}=x^{1/3}, \quad x\in \mathbf{R}$。

它的右端函数 $f=x^{1/3}$ 在 (t, x)-平面上是连续的，但在包含 $(t_0, 0)$ 的任何区域上都不满足李氏条件（1-17）（请读者自行证明）。这个方程有通解

$$x=\pm\left[\frac{2}{3}(t+C)\right]^{3/2} \qquad (-\infty<C<+\infty)$$

和奇解 $x=0$。由图1·4可见，过任一点 $(t_0, 0)$ 总有三条积分曲线，从而解的唯一性破坏。

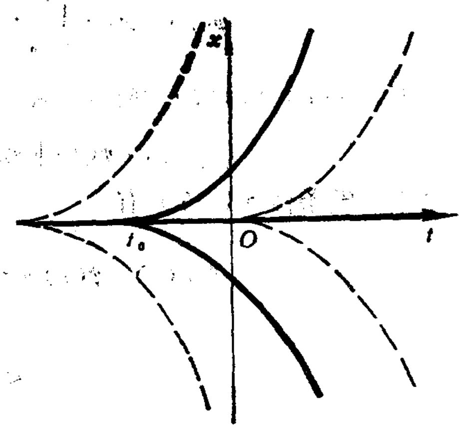


图 1·4

由此可见在定理1.1上李氏条件（1-17）是用来证明解的唯一性。然而李氏条件并非唯一性的必要条件，请看下面的例子：

例4 方程（$x\in\mathbf{R}$）

$$\dot{x}=\begin{cases} x\ln|x|, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

它的右端函数在包含 $(t_0, 0)$ 的任何区域上都不满足李氏条件（1-17），但是这个方程有通解 $x=\pm e^{Ce^t}$（$-\infty<C<+\infty$）和特解 $x=0$。由图1·5见到，对于 C 的任何有限值，通解对应的积分曲线都不与 $x=0$ 相遇。因此，对任一点 $(t_0, 0)$ 仍只有唯一的积分曲线经过。