解析几何习题集

华东师范大学
数学系几何教研室 编

华东师范大学出版社

解析几何习题集

华东师范大学
数学系几何教研室 编

华东师范大学出版社出版
（上海市中山北路3663号）
新华书店上海发行所发行　东台印刷厂印刷

开本787×1092 1/32　印张9 1/8　260千字
1981年11月初版　1981年11月第1次印刷
印数1-50,000

书号：13135·002　定价：0.95元

前　　言

由于教学上的需要，我组教师在讲授解析几何课程的过程中积累了一部分习题的资料，又从国内外的书刊中选择了一些习题，编了一本习题集供我校数学系学生使用，经过一段时期的试用，现在把它进一步整理补充，成为本习题集正式出版。

本习题集的内容包括平面与空间两部分，共十四章，计一千余道题，都在直角坐标系中讨论。每章开始都有内容提要与必要的公式，然后按照不同类型集中一定数量的习题，编排次序基本上是由易到难，并将一部分较难的杂题附在后面。在本习题集的末尾还附有各章习题的答案(包括某些题的提示)。

本习题集可供大学生和中学教师参考，也可供中学生学习提高用。

参加本习题集编写工作的有钱端壮、何福升、顾鹤荣、陈信漪、唐瑞芬、俞建新等同志，由何福升同志负责主编。

由于时间匆促，水平有限，习题集中的缺点错误在所难免，热忱欢迎同志们提出宝贵意见，以便进一步充实完善。

华东师范大学数学系几何教研室

目　　录

第一章　平面直角坐标系与直线

平面直角坐标系

（一）在平面上取定一点O，称为原点，过点O作两条互相垂直的轴，每条轴上的度量单位相等，这两条轴记以Ox轴、Oy轴（通常Ox轴的正半轴依反时针方向旋转90°与Oy轴的正半轴可以重合，称为右手系），这样得到的直角坐标系记以$\{O—xy\}$。

（二）平面上一点M关于$\{O—xy\}$系的坐标

设点M在Ox轴上的垂足是M_1，在Oy轴上的垂足是M_2，则有向线段OM_1的值x、OM_2的值y，构成一对有序的实数(x, y)，(x, y)与点M一一对应，于是称(x, y)是点M的直角坐标，记成$M(x, y)$。

（三）两点间的距离

设点$M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$，则两点间的距离d是

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

（四）线段的定比分点

设点$M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$，在点M_1与M_2的连线上有一个分点M，满足

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda\ (\text{常数}),$$

这里$\lambda\neq-1$，M_1M是有向线段M_1M的值，MM_2是有向线段MM_2的值，则分点M的坐标(x, y)是

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{cases}$$

（五）三角形的面积

已知三角形的顶点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, 且 A, B, C 按反时针方向排列，则三角形 ABC 的面积 S 是

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

（六）调和共轭

设共线的四个点 M_1, M_2, M, N，满足

$$\frac{M_1M}{MM_2} = -\frac{M_1N}{NM_2},$$

则称 M, N 关于点对 M_1, M_2 成为调和共轭。

直　　线

在直角坐标系中，两个变量 x, y 的一次方程的图象是一条直线；反之，任何直线在直角坐标系中，都可由 x, y 的一次方程表示。

（一）直线的斜率与截距

(1) 如果直线 l 关于 Ox 轴的倾角是 α，则 $\mathrm{tg}\alpha$ 称为直线 l 的斜率。

(2) 如果直线 l 与 Ox 轴交于点 M_1，则 OM_1 的值称为 l 在 Ox 轴上的截距。同理，如 l 与 Oy 轴交于点 M_2，则 OM_2 的值称为 l 在 Oy 轴上的截距（注意截距不一定是正

值)。

(二) 直线方程的各种形式

(1) 点斜式 $y-y_1=k(x-x_1)$。

(x_1, y_1) 表示直线上一个点，k 表示直线的斜率（当直线平行于 Oy 轴时，不用此式）。

(2) 斜截式 $y=kx+b$。

k 表示直线的斜率，b 表示直线在 Oy 轴上的截距（当直线平行于 Oy 轴时，不用此式）。

(3) 截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$。

a、b 分别表示直线在 Ox 轴、Oy 轴上的截距（当直线平行于一条坐标轴，或通过原点时，不用此式）。

(4) 二点式 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$。

(x_1, y_1)，(x_2, y_2) 表示直线上的两点（当直线平行于坐标轴时，不用此式）。

(5) 法线式 $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$。

设原点在 l 上的垂足是 N，则 ON 称为 l 的法线，Ox 轴正向转到 ON 正向的角是 θ，$|ON|=p$。

(6) 参数式 $\begin{cases} x=x_1+t\cos\alpha \\ y=y_1+t\sin\alpha \end{cases}$。

α 是直线关于 Ox 轴的倾角，(x_1, y_1) 是直线上一个已知点 M_1，参数 t 表示点 M_1 到直线上点 M (x, y) 的有向线段 M_1M 的值，显然 $|t|=|M_1M|$。

(7) 一般式 $Ax+By+C=0$。

其中 A，B，C 为常数，而且 A，B 不同时为零。

直线的一般式方程要化成法线式方程时，只要乘上一个

法化因式$\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$。当直线不通过原点时，法化因式符号的选取是以与 C 异号为准。当直线通过原点时，则符号取得与 B 同号（如果 B 也等于零，则取得与 A 同号）。

（三）直线与点的位置关系

(1) 点 $M_3(x_3, y_3)$ 在直线 $Ax+By+C=0$ 上的充要条件是点 M_3 的坐标(x_3, y_3)满足直线方程，也就是有等式 $Ax_3+By_3+C=0$ 成立。

(2) 点 $M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$，$M_3(x_3, y_3)$ 在一条直线上的条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

(3) 设直线 l 的方程是法线式 $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$，点 M_1 的坐标为(x_1, y_1)，如果点 M_1 在 l 上的垂足为 N，则有向线段 NM_1 的值 δ 称为点 M_1 关于直线 l 的离差，则

$$\delta=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-p,$$

当点 M_1 与原点是在直线 l 的两侧时，点 M_1 的离差 δ 取正值，当点 M_1 与原点是在直线 l 的同侧时，点 M_1 的离差 δ 取负值。若点 M_1 到直线 l 的垂直距离是 d，则$d=|\delta|$。

（四）两直线的相互位置关系

设直线 l_1 的方程是 $y=k_1x+b_1$，直线 l_2 的方程是 $y=k_2x+b_2$，则直线 l_1 转到 l_2 的角 ϕ 可由下式决定：

$$\operatorname{tg}\phi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

当 $k_1=k_2$ 时，直线 l_1 平行于直线 l_2；

当 $k_1k_2=-1$ 时，直线 l_1 垂直于直线 l_2；

当 $k_1=k_2$，$b_1=b_2$ 时，两直线重合。

（五）直线束

（1）$\lambda(y-y_1)=\mu(x-x_1)$。

当 λ，μ 为参数，x_1，y_1 为已知值，则方程表示过定点 $M_1(x_1, y_1)$ 的全体直线。

（2）$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0$。

当 λ,μ 为参数，A_1，B_1，C_1，A_2，B_2，C_2 为已知值时，则方程表示过两条定直线交点的全体直线。这两条定直线的方程是 $A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$。但当这两条定直线互相平行时，则方程表示平行于这两条直线的全体直线。

（3）当(1)或(2)中的两个参数的比值 $\lambda:\mu$ 为定值时，则(1)或(2)表示直线束中一条确定的直线。

1.1. 已知 $A(4,5)$，$B(1,2)$，$C(4,-1)$，求证三角形 ABC 是直角三角形。

1.2. 求证 $A(a, b+c)$，$B(b, c+a)$，$C(c, a+b)$ 三点在一条直线上。

1.3. 求证三角形两边中点所连的线段长等于第三边边长的一半。

1.4. 求证平行四边形的对角线相互平分。

1.5. 已知五边形 $ABCDE$ 的顶点 $A(0,0)$，$B(2,1)$，$C(3, 2)$，$D(1, 4)$，$E(-1, 3)$，求五边形 $ABCDE$ 的面积 S。

1.6. 求证到三角形的三个顶点的距离平方和为最小的

点是这个三角形的重心。

1.7. 已知三角形 ABC 的顶点 $A(0, 0)$，$B(4, 8)$，$C(6, -4)$，点 M 内分 AB 所成的比是3，点 P 是 AC 边上的一个点，且三角形 APM 的面积等于三角形 ABC 面积的一半，求点 P 分 AC 所成的比 λ。

1.8. 试确定下列直线的斜率和 Oy 轴上的截距：

(1) $5x-y+3=0$；

(2) $2x+3y-6=0$；

(3) $3x+2y=0$；

(4) $2y+5=0$。

1.9. 一直线过点(2, 1)，且在两轴上的截距相等，求该直线方程。

1.10. 一直线过点(2, 3)，且截两坐标轴成等长线段(从原点量起)，求该直线方程。

1.11. 一直线过点(8,6)，且截象限角所成三角形的面积等于12，求该直线方程。

1.12. 过点(1, 4)引一直线，使其在两坐标轴上的截距为正，且截距之和为最小，试求这直线方程。

1.13. 求直线方程，已知它被包含在第一象限的坐标轴间的线段长度等于它到原点距离的二倍，它与两条轴构成的三角形的面积等于$\frac{9}{2}$。

1.14. 写出下列直线方程，并作图：

(1) 过点(2,5)，斜率为 $\frac{3}{4}$；

(2) 过点(−2,3)，倾角为 $\frac{\pi}{4}$；

(3) 过点(4, 2)，平行于 x 轴；

(4) 过点(0, 5)，且和斜率为 $\frac{1}{4}$ 的直线垂直；

(5) 斜率为 -3，在 y 轴上的截距为 -7；

(6) 在 y 轴和 x 轴上的截距分别为 6 和 5；

(7) 过两点 $(2, -1)$ 和 $(1, -3)$；

(8) 过点 $(3, 4)$ 和原点。

1.15. 一直线通过 $(-2,4)$，倾角的正弦是 $\frac{3}{5}$，求该直线方程。

1.16. 一直线通过点 $(-1, 3)$，倾角是已知直线 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+9$ 的倾角的二倍，求该直线方程。

1.17. 求下列各对直线间的交角 φ：

(1) $5x-y+7=0$，$3x+2y=0$；

(2) $3x-2y+1=0$，$2x+3y-3=0$；

(3) $x-2y-4=0$，$3x-6y+1=0$；

(4) $3x+2y-1=0$，$5x-2y+3=0$。

1.18. 通过点 $(8,6)$ 引四条直线与 Ox 轴的夹角之比为 $1:2:3:4$，已知第二条直线的方程为 $3x-4y=0$，求其余三条直线的方程。

1.19. 已知平行四边形两个相邻顶点的坐标为 $A(-4\frac{1}{2}, -7)$，$B(2, 6)$，对角线的交点为 $M(3, \frac{3}{2})$，求其余两个顶点所确定的边的方程。

1.20. 已知菱形的两个相对的顶点 $A(-3,1)$，$C(5,7)$，它的面积等于25，求菱形各边的方程。

1.21. 三角形 ABC 的顶点是 $A(1,1)$，$B(5,3)$，$C(4,$

5)，一条平行于 Oy 轴的直线将三角形分成等积的两部分，求这直线的方程。

1.22. 求下列各对直线的交点：

(1) $x+5y-35=0$，$3x+2y-27=0$；

(2) $12x+15y-8=0$，$16x+9y-7=0$；

(3) $3x+5y-4=0$，$6x+10y=-7$；

(4) $y+3=0$，$5y-7=0$；

(5) $x-\sqrt{2}y+1=0$，$\sqrt{2}x-2y+\sqrt{2}=0$。

1.23. 试确定系数 a 和 b，使两直线：

$$ax-2y-1=0, \quad 6x-4y-b=0$$

(1) 有一个公共点；

(2) 平行；

(3) 重合。

1.24. 已知直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}$，试作通过点 $(2,1)$ 且分别满足以下条件的直线方程：

(1) 平行于已知直线；

(2) 垂直于已知直线；

(3) 与已知直线交成 $45°$ 角。

1.25. 证明三角形三边的垂直平分线交于一点。

1.26. 已知三角形 ABC 的两个顶点 $A(3,-1)$，$B(5,7)$ 和垂心 $H(4,-1)$，求三角形三条边的方程。

1.27. 试证明以 $A(3,1)$，$B(6,4)$，$C(5,8)$，$D(2,5)$ 为顶点的四边形 $ABCD$ 是平行四边形，并计算它在 AB 边上的高。

1.28. 一条直线过点 $(1,3)$，这点又恰是这条直线被两坐标轴所截线段 AB 的中点，求这直线方程。

1.29. 已知三角形 ABC 的两个顶点 $A(2, -3)$, $B(5,1)$, BC 边的方程是 $x+2y-7=0$,中线 AM 的方程是 $5x-y-13=0$, 求从顶点 C 到 AB 边的高的方程,并计算高的值 h。

1.30. 试在直线 $2x-y-5=0$ 上求一点 P, 使它到点 $A(-7, 1)$ 和点 $B(-5,5)$ 的距离之和为最小.

1.31. 试在直线 $3x-y-1=0$ 上求一点 P, 使它到点 $A(4,1)$ 和 $B(0, 4)$ 的距离之差为最大。

1.32. 当 k 为任意常数时，证明:

(1) 平行于直线 $Ax+By+C=0$ 的所有直线都可写成

$$Ax+By+k=0;$$

(2) 垂直于直线 $Ax+By+C=0$ 的所有直线都可写成

$$Bx-Ay+k=0.$$

1.33. A 和 C 取什么数值时,直线 $Ax-2y-1=0$ 和直线 $6x-4y+C=0$ (1)平行; (2)重合; (3)相交; (4)垂直。

1.34. 证明动直线 $Ax+By+C=0$ 过一定点或互相平行的充分必要条件为: 存在不全为零的常数 l, m, n, 使等式 $lA+mB+nC=0$ 成立($n\neq0$ 时,动直线过一定点,$n=0$ 时,则互相平行)。并由此推出三条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3=0$ 共点或互相平行的充分必要条件为:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

1.35. 已知一动点到两平行直线间的距离相等，试求动点的轨迹方程:

(1) $3x-4y=0$, $6x-8y+10=0$;

(2) $x+3y-7=0$, $x+3y-6=0$;

(3) $2x-5y+8=0$, $6x-15y-9=0$;

(4) $5x-12y+26=0$, $5x-12y-13=0$;

(5) $24x-10y+39=0$, $12x-5y-26=0$。

1.36。在直线 $x+3y=0$ 上求一点，使这点和原点之间的距离等于这点和直线 $x+3y-2=0$ 之间的距离。

1.37。已知直线过点(2,3)，它被两平行直线 $3x+4y-7=0$ 和 $3x+4y+8=0$ 所截得的线段长为 $3\sqrt{2}$，求该直线方程。

1.38。试确定下列直线方程中，哪些是法线式：

(1) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$;　　(2) $\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$;

(3) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+2=0$;　　(4) $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$;

(5) $x-2=0$;　　(6) $y+2=0$。

1.39。将下列直线方程化成法线式：

(1) $4x-3y-10=0$;　　(2) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$;

(3) $12x-5y+13=0$;　　(4) $x+2=0$;

(5) $x-y=0$。

1.40。确定点关于直线的离差，已知：

(1) $A(2,\ -1)$, $4x+3y+10=0$;

(2) $A(0,\ -3)$, $5x-12y-23=0$;

(3) $A(1,\ -2)$, $x-2y-5=0$。

1.41。试判定点 $A(1,-3)$ 及坐标原点在下列各直线的同侧还是异侧：

(1) $2x-y+5=0$;　　(2) $x-3y-5=0$;

(3) $10x+24y+15=0$。

1.42. 求下列各对平行直线之间的距离：

(1) $3x-4y=0$， $6x-8y+10=0$；

(2) $x+3y-7=0$，$x+3y-6=0$；

(3) $2x-5y+8=0$，$6x-15y-9=0$；

(4) $5x-12y+26=0$，$5x-12y-13=0$；

(5) $24x-10y+39=0$，$12x-5y-26=0$。

1.43. 试判定 $A(1,-2)$ 和坐标原点是在下列各对相交直线所成的同一个角内，还是在邻角内，还是在对顶角内：

(1) $2x-y-5=0$，$3x+y+10=0$；

(2) $4x+3y-10=0$，$12x-5y-5=0$；

(3) $x-2y-1=0$，$3x-y-2=0$。

1.44. 过原点以及点(1，3)分别作两条平行直线，使这两条平行线之间的距离为$\sqrt{5}$，求它们的方程。

1.45. 试判定 $A(2,3)$，$B(5,-1)$是在下列各对相交直线所成的同一个角内，还是在邻角内，还是在对顶角内：

(1) $x-3y-5=0$，$2x+9y-2=0$；

(2) $2x+7y-5=0$，$x+3y+7=0$；

(3) $12x+y-1=0$，$13x+2y-5=0$。

1.46. 已知三角形三条边的方程是$x+y-4=0$，$3x-7y+8=0$，$4x-y-31=0$，试判定点 $A(-3,2)$ 在三角形的内部还是外部。

1.47. 试判定由两直线 $3x-5y-4=0$，$x+2y+3=0$所交成的各个角中，包含点(2，-5)的是锐角还是钝角。

1.48. 试作由下列两直线所成的锐角的平分线方程：

$3x+4y-5=0$，$5x-12y+3=0$。

1.49. 已知三角形的三条边的方程是 $18x+6y-17=0$，$14x-7y+15=0$，$5x+10y-9=0$，求三角形的三个内角。

1.50. 求证由直线 $x+2y-5=0$, $2x+4y+5=0$, $2x-y=0$, $7x-11y-35=0$ 构成的四边形是一个直角梯形。

1.51. 已知正方形两个相邻顶点是 $A(2,3)$ 和 $B(6,6)$，求其它两个顶点 C 和 D 的坐标。

1.52. 过点(1, 2)引一直线，使与点(2,3)和点(4, -5)的距离相等，求该直线方程。

1.53. 光线通过点(2,3)入射到直线 $x+y+1=0$ 上后反射，反射光线通过点(4, 1)，试求入射线和反射线的方程。

1.54. 光线沿直线 $x-2y+5=0$ 的方向射入，到直线 $3x-2y+7=0$ 即反射，试求反射光线的方程。

1.55. 已知直线 l: $y=4x$ 和点 $P(6,4)$，在直线 l 上求一点 M，使直线 PM、直线 l 以及 Ox 轴在第一象限内围成的三角形面积最小。

1.56. 有一条光线从点 $A(-3,5)$ 入射到直线 l: $3x-4y+4=0$ 即反射，反射光线通过点 B (2, 15)，求这条光线从点 A 到点 B 的距离。

1.57. 光线从点 $A(-5,6)$ 沿斜率是 -2 的直线射入，被 x 轴反射，反射光线遇到 y 轴又再次被反射，求这三条直线方程。

1.58. 已知直线 $y=x-2$，点 $A(-1,1)$ 和点 $B(1,1)$，在直线上找一点 P，使 $\angle APB$ 为最大，求 P 点坐标。

1.59. 求证三角形的三条高交于一点。

1.60. 求证三角形的三条中线交于一点。

1.61. 已知正方形 $ABCD$ 的一个顶点 $A(2, -4)$，中心 $M(5, 2)$，求各边的方程。

1.62. 已知正方形的中心是 $M(-1, 0)$，一条边的方程是 $x+3y-5=0$，求其余三条边的方程。

1.63. 求证三角形的三条内分角线交于一点.

1.64. 已知等腰三角形的两腰为$7x-y-9=0$, $5x+5y-35=0$, 底边过点$(3, -8)$, 求三角形的内心与重心.

1.65. 设$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$为两个定点, 过点P_1任作一直线交Oy轴于点B, 过点P_2作垂直于P_1B的直线, 它交Ox轴于点A, 求线段AB中点M的轨迹.

1.66. 在锐角三角形ABC中作内接矩形, 且矩形的一条边平行于AB, 求证矩形中心的轨迹是一直线段.

1.67. 平行于已知三角形ABC的底边AB任作一截线, 交AC于点D, 交BC于点E, 求AE和BD的交点M的轨迹.

1.68. 设点O是$\triangle ABC$底边BC的中点, 过O任作一直线交直线AB于点D, 交直线AC于点E, 求证CD、BE的交点轨迹是直线.

1.69. 已知直线l_1, l_2与另一平行于定直线l_3的动直线交于点M_1及M_2, 分别过点M_1、M_2作l_1、l_2的垂线, 求两条垂线交点P的轨迹.

1.70. k为什么值时, 三直线 $x+y=2$, $x+3y=4$和$4x-ky=3$交于一点.

1.71. 通过两直线$x-2y+2=0$和$3x+4y-14=0$的交点M作两条直线, 分别平行和垂直于已知直线$3x-y-8=0$, 求这两条直线的方程(不求出交点的坐标).

1.72. 求通过直线$2x-3y+2=0$及$3x-4y-2=0$的交点且分别满足下列条件的直线方程:

(1) 通过原点;

(2) 平行于$2x+5y+3=0$;

(3) 垂直于$3x+2y+4=0$;