编 者 的 话

根据中国船舶工业总公司1981年教材工作会议的决定，为加强船舶高等院校及有关专业的教材建设，进一步提高教材质量，陀螺教材编审组决定在清华大学、南京工学院、上海交通大学，哈尔滨船舶工程学院四校现有陀螺教材的基础上，进一步充实、提高后，编写一套陀螺丛书以适应今后教学的需要。1982年陀螺教材编审组南京工作会议上确定该丛书分为“陀螺力学基础”、“陀螺仪表原理与结构”、“陀螺稳定系统”、“惯性导航系统”等四册。各分册之间既要保持自己独立的完整系统，又要保持整套丛书的统一、连惯性。以便各院校可根据教学大纲的要求选用部分或全套丛书作为陀螺导航课程的基本教材。

该丛书第一册“陀螺力学基础”由清华大学陀螺导航与控制教研组刘希珠、雷田玉、徐远超、辛暖编写。该书主审人雷渊超教授对原稿提出了许多宝贵意见，在此谨致以诚挚的谢意。

本书在编写和出版过程中曾得到清华大学贾书惠付教授、哈尔滨船舶工程学院罗超付教授的热情帮助和支持，这里一并致谢。

由于我们水平有限，本书必然存在缺点和错误，期望各方面的读者给予批评指正。

编　者

1984年5月于清华大学

内容提要

本书是船舶工业总公司所属高等院校统编教材，陀螺技术丛书之一。是以清华大学所用陀螺力学基础讲义为基础，进一步充实编写而成，内容包括：物体在空间的位置和运动、刚体动力学基本原理、陀螺的运动微分方程，陀螺相对参考坐标系的运动、陀螺漂移与测试及新型陀螺的简要介绍，书后附有习题。

本书阐述陀螺仪基本原理时不仅运用了传统的力学原理，而且引入了现代控制理论的分析方法。可作为大专院校有关专业本科生教材，亦可作为有关专业研究生及科技人员参考用书。

陀螺力学基础
刘希珠 雷田玉等 编
☆
清华大学出版社出版
北京 清华园
轻工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
☆
开本：787×1092 1/16 印张：15 字数：371千字
1987年3月第1版 1987年3月第1次印刷
印数：00001—4000
书号：15235·267 定价：2.50元

目 录

绪　言

所谓陀螺，从仪表工程的角度上讲，是指绕自己的对称轴高速旋转的对称物体。一个高速旋转的物体具有很大的角动量。因此早在1852年付科（L.Foucault）就把陀螺定义为一种具有大角动量的装置。这种被称为陀螺的物体运转起来以后，常常表现出一种出乎人们预料的、也是十分有趣的运动形式而引人注目。

陀螺装置的重要意义是它在导航技术领域中的应用。理论力学的角动量定理告诉我们，在没有外力矩作用时，角动量向量在惯性空间保持不变的方位，从而陀螺可以为运载体的导航系统提供一个方向基准，这就是陀螺的定轴性。另一方面，利用施加修正力矩的方法，可以控制角动量向量按要求相对惯性空间改变方向，这就是陀螺的进动性。

利用陀螺的这些特性，人们不断的研究、设计和制造了一系列的陀螺仪表，供水上和水下，陆地和空中的运载体作为方位测量和方位控制，轨道测量和轨道控制使用。早期的陀螺仪表有船舶稳定器，陀螺罗盘，人工地平仪等。随着航海、航空和航天技术的发展，世界各主要国家都投入大量的人力和物力开展了改善陀螺仪表性能和研制新型陀螺的工作。因而出现了高精度的液浮陀螺，静电陀螺，挠性陀螺，激光陀螺以及陀螺稳定平台，惯性导航系统等。

从力学的角度来看，物体形状是否对称，转动角速度的大小并不是陀螺的最本质的特征。一个典型的例子是每昼夜只转动一周的地球，转速与通常每分钟上万转的陀螺仪表相比，是很小的。但地球的转动仍然服从陀螺的运动规律。所以从广义上讲，陀螺定义为：绕一固定点作转动运动的任意形状的刚体。陀螺力学的任务则是研究定点转动刚体的运动规律。这里要说明的是，将只有极小变形的物体简化为刚体是必要的。由于刚体的假定。使得用来描述物体在空间位置和运动的参数只是单变量时间的函数。从而避免了偏微分方程的出现。所以在陀螺理论中采用常微分方程即可。然而物体的高速旋转及其对称性的条件可以使分析计算大为简化。这对于工程实际的应用是很有意义的。正是这个原因，在古典刚体动力学的基础上，加上高转速和对称条件发展起来的实用陀螺理论获得广泛的、实际的应用。因此本书大致由以下两部分内容组成：

第一部分是作为陀螺理论基础的刚体动力学。内容包括：物体位置和运动参数在不同参考系中的转换，方向余弦矩阵，刚体定位的方向余弦法，欧拉角及四元素法。刚体质量分布的惯性矩阵，角动量与动能，欧拉动力学方程，重力矩作用下刚体的定点运动等。

第二部分是实用陀螺仪理论。内容包括：陀螺仪运动微分方程，传递函数，状态方程的建立，典型力矩作用下陀螺的运动规律。陀螺仪简化方程，进动方程，陀螺相对动参考系的运动，陀螺漂移测试等。

本书是陀螺丛书的第一册，考虑到作为陀螺的基础理论部分以及学习后续教材的连续性，本书着重点是用数学和力学原理分析陀螺的运动规律，而不涉及各种陀螺仪表的具体结构、材料和工艺等问题。

阅读本书的读者只需具有一般工科大学的高等数学，理论力学，线性代数以及随机过程的基本知识。

本书可作为陀螺及导航等有关专业陀螺理论课的教材，亦可供有关技术人员参考。

第一章　物体在空间的位置和运动

物体在空间的位置和运动，是相对一定的参考坐标系而言的。在分析陀螺及陀螺导航系统的时候，往往要涉及到几个不同的参考坐标系。我们知道，在刚体的假定条件下，物体及物体上点的位置和运动，只是时间的函数，通常用点的位置向量，速度向量和加速度向量以及物体旋转时的角速度向量和角加速度向量等来描述。本章的主要内容就是讨论这些重要物理量的意义及它们在不同参考坐标系之间的转换关系。

§1-1　点的位置向量及其表示法

如图1-1-1所示，在直角坐标系$o-xyz$中，P点的位置可以用向量$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{oP}$来表示。向量$\boldsymbol{r}$就定义为质点$P$相对$o-xyz$坐标系原点$o$的位置向量。

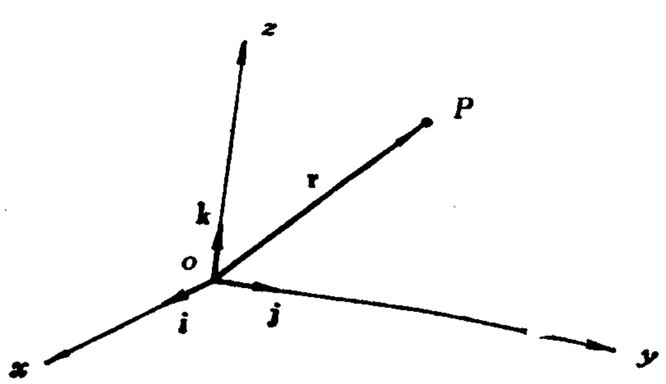

图 1-1-1

为了便于分析讨论，向量$\boldsymbol{r}$通常用它在坐标轴ox，oy，oz上的投影r_x，r_y，r_z和沿ox，oy，oz轴正方向上的单位向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$来表示，即

$$\boldsymbol{r}=r_x\boldsymbol{i}+r_y\boldsymbol{j}+r_z\boldsymbol{k} \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

这就是位置向量$\boldsymbol{r}$的单位向量表达式。

如果将表示$\boldsymbol{r}$的三个分量r_x,r_y,r_z排列成3×1阶的列矩阵或其转置矩阵，那么就得到位置向量$\boldsymbol{r}$的矩阵表达式：

$$\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}=[r_x,r_y,r_z]^T \qquad (1\text{-}1\text{-}2)$$

等式右边的上标“T”表示转置矩阵的意思。式（1-1-1）和（1-1-2）虽然同样表示了P点在$o-xyz$坐标中的相对位置，但二者在数学上的意义是不相同的，它们应分别服从向量运算和矩阵运算法则。

向量$\boldsymbol{r}$的三个投影分量r_x,r_y,r_z可用向量$\boldsymbol{r}$的模$|\boldsymbol{r}|=r$以及$\boldsymbol{r}$相对ox，oy，oz三轴正方向的方向余弦$\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{x})$，$\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{y})$，$\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{z})$来表示，即

$$\begin{aligned} r_x&=r\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{x}) \\ r_y&=r\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{y}) \\ r_z&=r\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{z}) \end{aligned} \qquad (1\text{-}1\text{-}3)$$

式中（$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{x}$），（$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{y}$），（$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{z}$）分别表示向量$\boldsymbol{r}$与ox，oy，oz轴的夹角；r是向量$\boldsymbol{r}$的模，应满足

$$r^2=r_x^2+r_y^2+r_z^2 \qquad (1\text{-}1\text{-}4)$$

从以上分析不难看出，P点在坐标系$o-xyz$中的相对位置，可以用式（1-1-1）或（1-1-2）中的三个参数r_x,r_y,r_z来表示；也可以用式（1-1-3）中的四个参数r，$\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{x})$，

$\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, $\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{z})$ 来表示。显然前者是三个完全独立的参数，而后者有四个参数，肯定其中有一个是不独立的，或者是四个参数必然满足某个依从关系。这个依从关系，要将式（1-1-3）代入（1-1-4）即可得到：

$$\cos^2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{x})+\cos^2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})+\cos^2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{z})=1 \tag{1-1-5}$$

即$\boldsymbol{r}$相对$o\text{-}xyz$的三个方向余弦的平方和等于1。已知其中的两个即可得出第三个。也就是三个方向余弦只有两个是完全独立的。通常把式（1-1-5）称为参数之间的约束方程。

由此可见，一个空间的自由质点，相对参考系的位置，可以用三个独立的参数表示，也可以用多于三个的不完全独立的参数来表示。后者必须附加约束条件。对于前者，不但参数的数量少，而且没有附加的约束方程，用起来自然要方便一些，在分析力学中广为采用，称为系统的广义坐标。

下面我们讨论在同一参考系中，不同向量之间的代数运算，如图1-1-2所示。向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$在$o\text{-}xyz$中，用单位向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$分别表示为：

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

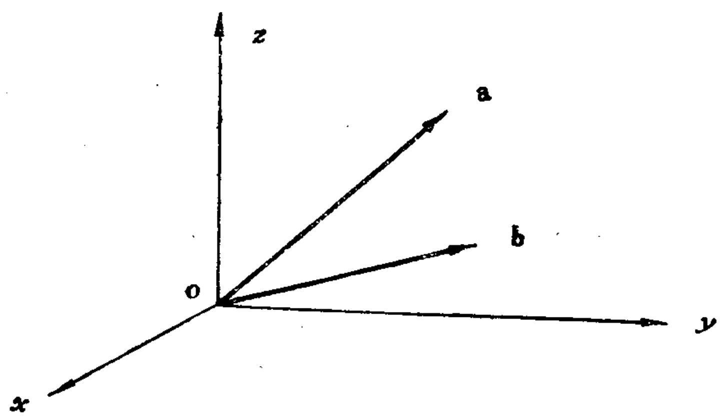

图 1-1-2

式中a_x, a_y, a_z；b_x, b_y, b_z分别是$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$在ox, oy, oz轴上的投影分量。按向量代数运算法则，向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$之间可以进行向量的加减运算：$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$；向量的数量积运算：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，向量的向量积运算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，分别表示如下：

向量的加减运算：

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x+b_y)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k} \tag{1-1-6}$$

向量的数量积运算：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{1-1-7}$$

向量的向量积运算：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$
$$=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-b_xa_z)\boldsymbol{k} \tag{1-1-8}$$

如果将$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$表示成列矩阵形式，

$$\boldsymbol{a}=\begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{b}=\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}$$

那么上述的各种运算应按矩阵的运算法则进行，分别表示如下：

向量的加减运算：

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}\pm\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{bmatrix} \tag{1-1-9}$$

向量的数量积运算：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=[a_x\ \ a_y\ \ a_z]\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{1-1-10}$$

即$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积等于$\boldsymbol{a}$的转置矩阵与$\boldsymbol{b}$的列矩阵相乘，可简写为：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{a}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{b}] \tag{1-1-10'}$$

向量的向量积运算：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_yb_z-a_zb_y \\ a_zb_x-a_xb_z \\ a_xb_y-a_yb_x \end{bmatrix} \tag{1-1-11}$$

这里我们定义了一个新的矩阵，用A表示：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \tag{1-1-12}$$

称矩阵A为向量$\boldsymbol{a}$的反对称矩阵。这样向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的向量积就可以表示为向量$\boldsymbol{a}$的反对称矩阵A与向量$\boldsymbol{b}$的列矩阵$\boldsymbol{b}$的矩阵乘积。通常将式（1-1-11）简写为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{b} \tag{1-1-11'}$$

这里要说明的是，任何一个向量都可以表示为列矩阵形式，因而相应的也有它的反对称矩阵，前者通常用小写字母表示；后者则用相应的大写字母表示。

例如单位向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$可表示成：

$$\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{j}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{k}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

相应的反对称矩阵为

$$I=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\qquad J=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\qquad K=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

那么

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=[1\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=1$$

$$i \cdot j = (1\ 0\ 0)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = 0$$

$$i \times j = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

下面举两个具体的例子

例一：求定轴转动圆盘上一点P的速度v_p，如图1-1-3所示。

解：P点的位置用向量r表示，圆盘绕定轴转动的角速度用ω表示，它们的列矩阵形式分别表示如下：

$$r = \begin{bmatrix}r_x\\r_y\\r_z\end{bmatrix};\qquad \omega = \begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}$$

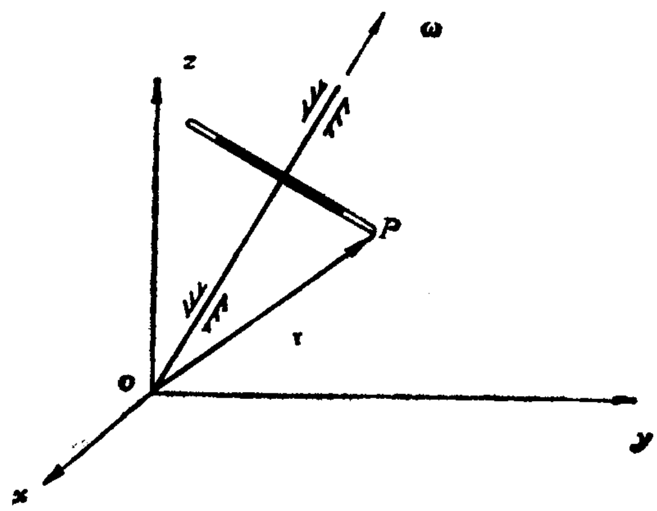

图 1-1-3

其中r_x，r_y，r_z和ω_x，ω_y，ω_z分别为r和ω在$0\text{-}xyz$轴上的投影分量。根据理论力学中的公式，P点的速度v_p可表示为

$$v_p = \omega \times r$$

如果用反对称矩阵来表示，那么有

$$v_p = \Omega r$$

式中Ω为ω的反对称矩阵，利用式（1-1-12），则可得到：

$$v_p = \begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\\omega_z & 0 & -\omega_x\\-\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_x\\r_y\\r_z\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-r_y\omega_z + r_z\omega_y\\r_z\omega_x - r_x\omega_z\\-r_x\omega_y + r_y\omega_x\end{bmatrix}$$

如果ω是沿z轴的特殊情况，那么

$$\omega = \begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix};\qquad \Omega = \begin{bmatrix}0 & -\omega & 0\\\omega & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

相应的速度v_p为

$$v_p = \begin{bmatrix}0 & -\omega & 0\\\omega & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_x\\r_y\\r_z\end{bmatrix} = \omega\begin{bmatrix}-r_y\\r_x\\0\end{bmatrix}$$

例二：求重力P对单摆的支点o的力矩M_o，如图1-1-4所示。

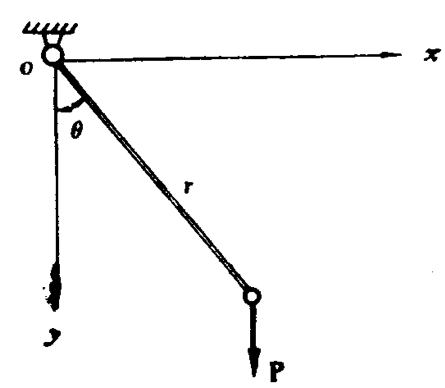

图 1-1-4

解：P力对o点之矩可以表示为：

$$M_o = r \times P$$

式中

$$\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix} r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}$$

利用式（1-1-12），得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_o=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{P}\\ &=\begin{bmatrix} 0 & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 0 & -r\sin\theta \\ -r\cos\theta & r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Pr\sin\theta \end{bmatrix}\end{aligned}$$

这个结果说明图示重力$\boldsymbol{P}$对o点之矩大小为$Pr\sin\theta$，方向沿z的正方向。

§1-2　方向余弦矩阵及其正交性

上一节我们讨论了在同一参考系中的向量及向量之间的代数运算。这一节则讨论向量在不同参考坐标系之间的转换关系。这一转换关系通常是通过方向余弦矩阵来完成的。

一、方向余弦矩阵

如图1-2-1所示，位置向量$\boldsymbol{r}$在共原点o的两个参考坐标系$o\text{-}x_ny_nz_n$与$o\text{-}x_by_bz_b$中，可分别表示为：

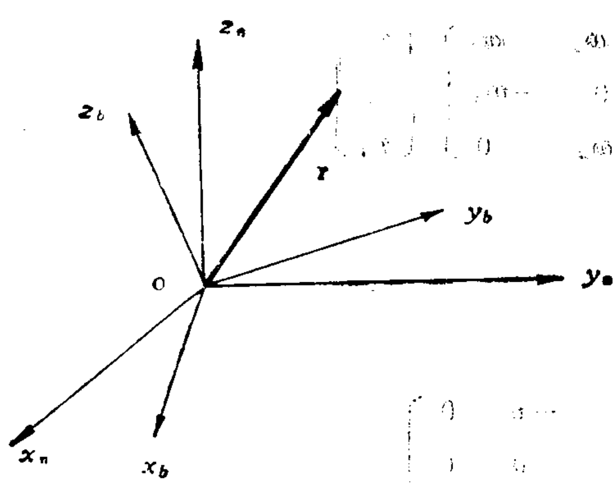

图 1-2-1

$$\boldsymbol{r}=r_{x_n}\boldsymbol{i}_n+r_{y_n}\boldsymbol{j}_n+r_{z_n}\boldsymbol{k}_n$$
$$\boldsymbol{r}=r_{x_b}\boldsymbol{i}_b+r_{y_b}\boldsymbol{j}_b+r_{z_b}\boldsymbol{k}_b$$

式中r_{x_n}，r_{y_n}，r_{z_n}和$\boldsymbol{i}_n$，$\boldsymbol{j}_n$，$\boldsymbol{k}_n$分别表示$\boldsymbol{r}$沿$o\text{-}x_ny_nz_n$坐标轴上的投影分量和相应的单位向量；r_{x_b}，r_{y_b}，r_{z_b}和$\boldsymbol{i}_b$，$\boldsymbol{j}_b$，$\boldsymbol{k}_b$分别表示$\boldsymbol{r}$沿$o\text{-}x_by_bz_b$坐标轴上的投影分量和相应的单位向量。这些参数既然表示同一个向量$\boldsymbol{r}$，那么它们之间必然有一定的转换关系，下面就来讨论这个问题。

我们首先看$\boldsymbol{r}$在ox_b轴上的投影分量r_{x_b}。因为向量$\boldsymbol{r}$是三个分向量$r_{x_n}\boldsymbol{i}_n$，$r_{y_n}\boldsymbol{j}_n$，$r_{z_n}\boldsymbol{k}_n$的向量和，即

$$\boldsymbol{r}=r_{x_n}\boldsymbol{i}_n+r_{y_n}\boldsymbol{j}_n+r_{z_n}\boldsymbol{k}_n$$

那么r_{x_b}也可以看成是上述三个分量在ox_b轴上投影分量的代数和，如果这些分量在ox_b轴上的投影用式（1-1-3）的方向余弦形式来表示，那么r_{x_b}可以表示为

$$r_{x_b}=r_{x_n}\cos(x_b,\ x_n)+r_{y_n}\cos(x_b,\ y_n)+r_{z_n}\cos(x_b,\ z_n)$$

为书写方便，用以下符号来表示方向余弦：

$$\cos(x_b,\ x_n)=C_{x_bx_n}$$

$$\cos(x_b,\ y_n)=C_{x_b y_n}$$
$$\cos(x_b,\ z_n)=C_{x_b z_n}$$

这样上式可以简写成

$$r_{x_b}=r_{x_n}C_{x_b x_n}+r_{y_n}C_{x_b y_n}+r_{z_n}C_{x_b z_n} \tag{1-2-1}$$

同理可以得到r_{y_b}，r_{z_b}的表达式如下：

$$r_{y_b}=r_{x_n}C_{y_b x_n}+r_{y_n}C_{y_b y_n}+r_{z_n}C_{y_b z_n} \tag{1-2-2}$$
$$r_{z_b}=r_{x_n}C_{z_b x_n}+r_{y_n}C_{z_b y_n}+r_{z_n}C_{z_b z_n} \tag{1-2-3}$$

不难看出，得到的式（1-2-1），(1-2-2) 和 (1-2-3)，可以综合起来，用如下的矩阵形式表示：

$$\begin{bmatrix} r_{x_b} \\ r_{y_b} \\ r_{z_b} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_{x_b x_n} & C_{x_b y_n} & C_{x_b z_n} \\ C_{y_b x_n} & C_{y_b y_n} & C_{y_b z_n} \\ C_{z_b x_n} & C_{z_b y_n} & C_{z_b z_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{x_n} \\ r_{y_n} \\ r_{z_n} \end{bmatrix} \tag{1-2-4}$$

这个矩阵表达式左边是向量$\boldsymbol{r}$在$o-x_b y_b z_n$坐标系中的投影分量，右边第一部分是由$o-x_n y_n z_n$与$o-x_b y_b z_b$各坐标轴之间的九个方向余弦为元素的 3 × 3 阶的矩阵，右边第二部分则是向量$\boldsymbol{r}$在$o-x_n y_n z_n$坐标系中的投影分量。如果用以下符号表示：

$$\boldsymbol{r}^b=\begin{bmatrix} r_{x_b} \\ r_{y_b} \\ r_{z_b} \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{r}^n=\begin{bmatrix} r_{x_n} \\ r_{y_n} \\ r_{z_n} \end{bmatrix} \tag{1-2-5}$$

$$C_n^b=\begin{bmatrix} C_{x_b x_n} & C_{x_b y_n} & C_{x_b z_n} \\ C_{y_b x_n} & C_{y_b y_n} & C_{y_b z_n} \\ C_{z_b x_n} & C_{z_b y_n} & C_{z_b z_n} \end{bmatrix} \tag{1-2-6}$$

那么式（1-2-4）可以简化为

$$\boldsymbol{r}^b=C_n^b\boldsymbol{r}^n \tag{1-2-4$'$}$$

由式（1-2-6）表示的矩阵C_n^b是由两个坐标系坐标轴之间的九个方向余弦组成，所以经常被称为方向余弦矩阵。而式（1-2-4）或（1-2-4′）则是通过方向余弦矩阵表示的同一向量在两个不同参考坐标系投影分量之间的转换关系。

注意式（1-2-4′）所用符号的规则是：方向余弦矩阵C_n^b的上标b应与等式左边的上标相同，C_n^b的下标应与其右相邻项的上标相同。例如我们要通过方向余弦矩阵表示向量$\boldsymbol{r}$在$0-x_i y_i z_i$与$0-x_p y_p z_p$之间的转换关系，则应写成

$$\boldsymbol{r}^i=C_p^i\boldsymbol{r}^p$$

如果反过来用$\boldsymbol{r}^i$表示$\boldsymbol{r}^p$则应为

$$\boldsymbol{r}^p=C_i^p\boldsymbol{r}^i$$

方向余弦矩阵的上下标与其九个元素的下标之间的规则是：方向余弦矩阵C_n^b的上标对应矩阵元素的第一个下标；方向余弦矩阵的下标对应元素的第二个下标。而第一个下标的三个不同元素按行的次序排列，列不变；第二个下标按列的次序排列而行不变，如下表所示：

$$
C_n^b:\quad
\begin{array}{c|ccc}
 & x_n & y_n & z_n \\
\hline
x_b & C_{x_b x_n} & C_{x_b y_n} & C_{x_b z_n} \\
y_b & C_{y_b x_n} & C_{y_b y_n} & C_{y_b z_n} \\
z_b & C_{z_b x_n} & C_{z_b y_n} & C_{z_b z_n}
\end{array}
$$

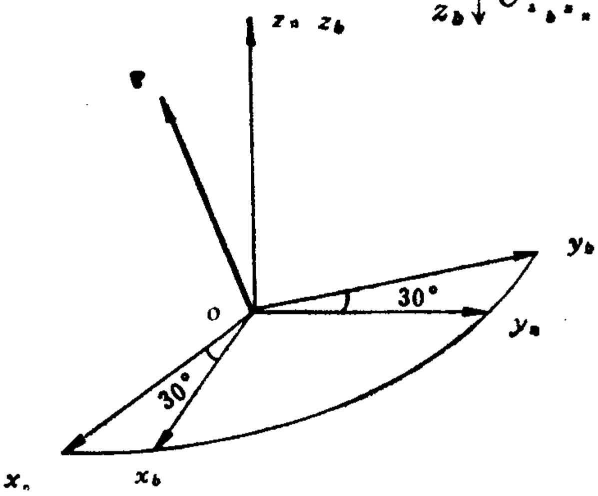

图 1-2-2

例：$o\text{-}x_n y_n z_n$ 与 $o\text{-}x_b y_b z_b$ 的相对位置如图 1-2-2所示，$o\text{-}x_b y_b z_b$绕oz_n轴向右旋转 30°，已知：

$$
r^n=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix};\qquad \text{求}\qquad r^b=\begin{bmatrix}r_{x_b}\\r_{y_b}\\r_{z_b}\end{bmatrix}=?
$$

解：利用式（1-2-4′），已知r^n，则可求出r^b

$$r^b=C_n^b r^n$$

下面求C_n^b中的诸元素：

$$C_{x_b x_n}=\cos(x_b,\ x_n)=\cos30°=0.866$$
$$C_{y_b x_n}=\cos(y_b,\ x_n)=\cos120°=-0.5$$
$$C_{z_b x_n}=\cos(z_b,\ x_n)=\cos90°=0$$
$$C_{x_b y_n}=\cos(x_b,\ y_n)=\cos60°=0.5$$
$$C_{y_b y_n}=\cos(y_b,\ y_n)=\cos30°=0.866$$
$$C_{z_b y_n}=\cos(z_b,\ y_n)=\cos90°=0$$
$$C_{x_b z_n}=\cos(x_b,\ z_n)=\cos90°=0$$
$$C_{y_b z_n}=\cos(y_b,\ z_n)=\cos90°=0$$
$$C_{z_b z_n}=\cos(z_b,\ z_n)=\cos30°=1$$

将这九个元素代入C_n^b中，则得

$$
\begin{aligned}
r^b&=C_n^b r^n\\
&=\begin{bmatrix}0.866 & 0.5 & 0\\ -0.5 & 0.866 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}2.232\\-0.134\\3.000\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

解毕。

二、方向余弦矩阵的正交性

通过上面的分析，我们得到了由方向余弦矩阵表示的两个坐标系之间的转换关系

$$r^b=C_n^b r^n \tag{1-2-4′}$$

按照前面讲的规则，可以反过来写成

$$r^n=C_b^n r^b$$

如果前者表示了用r^n来求得r^b，那么后者则表示用r^b来求得r^n。不难看出，这两个表达式

中的方向余弦矩阵上下附标的位置颠倒了。现在我们来看看C_a^b与C_b^a之间有什么关系。

为此我们用前面得到式（1-2-1），（1-1-2）、（1-1-3）的同样方法，求得用r_{x_b}，r_{y_b}，r_{z_b}表示r_{x_a}，r_{y_a}，r_{z_a}的表达式如下：

$$r_{x_a}=r_{x_b}C_{x_a x_b}+r_{y_b}C_{x_a y_b}+r_{z_b}C_{x_a z_b}$$
$$r_{y_a}=r_{x_b}C_{y_a x_b}+r_{y_b}C_{y_a y_b}+r_{z_b}C_{y_a z_b}$$
$$r_{z_a}=r_{x_b}C_{z_a x_b}+r_{y_b}C_{z_a y_b}+r_{z_b}C_{z_a z_b}$$

同样可以综合起来写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} r_{x_a} \\ r_{y_a} \\ r_{z_a} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_{x_a x_b} & C_{x_a y_b} & C_{x_a z_b} \\ C_{y_a x_b} & C_{y_a y_b} & C_{y_a z_b} \\ C_{z_a x_b} & C_{z_a y_b} & C_{z_a z_b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{x_b} \\ r_{y_b} \\ r_{z_b} \end{bmatrix} \tag{1-2-7}$$

如果用简写符号，那么上述矩阵式可简写为

$$r^a=C_b^a r^b \tag{1-2-8}$$

这样只要比较式（1-2-4）与（1-2-7）中方向余弦矩阵的诸元素，即可得到C_a^b与C_b^a之间的关系。

我们注意到，方向余弦矩阵中的元素是坐标轴之间的方向余弦，各元素的两个下标即表示相应的两个轴，显然两个下标交换位置并不影响方向余弦的大小，例如

$$C_{x_b x_a}=\cos\ (x_b,\ x_a)$$
$$C_{x_a x_b}=\cos\ (x_a,\ x_b)$$

显然x_a与x_b的夹角与x_b与x_a的夹角指的同一个角，自然有$\cos\ (x_b,\ x_a)\ =\cos\ (x_a, x_b)$，亦即有$C_{x_b x_a}=C_{x_a x_b}$。

由此可见，如果把式（1-2-7）中方向余弦矩阵C_b^a中诸元素两个下标的位置互换一下，矩阵内容不变，即

$$C_b^a=\begin{bmatrix} C_{x_b x_a} & C_{y_b x_a} & C_{z_b x_a} \\ C_{x_b y_a} & C_{y_b y_a} & C_{z_b y_a} \\ C_{x_b z_a} & C_{y_b z_a} & C_{z_b z_a} \end{bmatrix} \tag{1-2-9}$$

将式（1-2-9）表示C_b^a的诸元素与式（1-2-6）表示C_a^b的诸元素比较一下，不难发现：C_a^b中的元素与C_b^a中的元素只是行和列的位置转置了。也就是说C_a^b和C_b^a是互为转置矩阵。如果用通常的转置矩阵符号T，那么上述关系可表示为

$$C_b^a=[C_a^b]^T \tag{1-2-10}$$

这一关系说明了方向余弦矩阵符号上下附标的物理意义，它们的位置不能随意交换，否则就变成原矩阵的转置矩阵了。利用这个关系很容易推出方向余弦矩阵的正交性。

因有

$$r^a=C_b^a r^b \tag{1-2-11}$$
$$r^b=C_a^b r^a \tag{1-2-12}$$

利用式（1-2-10），式（1-2-12）可写成

$$r^b=[C_b^a]^T r^a \tag{1-2-12'}$$

在式（1-2-11）两边，同时左乘以C_b^a的逆矩阵$[C_b^a]^{-1}$，得

$$[C_b^a]^{-1}r^a=[C_b^a]^{-1}C_b^a r^b$$

注意到矩阵乘以自身的逆矩阵是单位矩阵，即

$$[C_b^a]^{-1}C_b^a=[I]$$

代入上式得

$$r^b = [C_b^s]^{-1} r^s \tag{1-2-13}$$

将式（1-2-13）与式（1-2-12′）比较，不难看出

$$[C_b^s]^{-1} = [C_b^s]^T \tag{1-2-14}$$

这一结论证明了方向余弦矩阵的一个重要性质："方向余弦矩阵的逆矩阵等于它自身的转置矩阵"。这个重要的性质称方向余弦矩阵的正交性。亦称方向余弦矩阵为正交矩阵。具有正交性的矩阵，在求其逆矩阵时，可省去许多繁琐的运算，只要简单的转置一下就行了。这里还要不加证明地说明一下，两个正交矩阵之和．一般不再具有正交性；但两个正交矩阵之积仍然是正交矩阵。

三、方向余弦矩阵的约束条件

下面我们利用正交性推出方向余弦矩阵中九个元素之间的约束关系。

在式（1-2-14）的两边同时左乘以C_b^s，并注意到$C_b^s[C_b^s]^{-1}=[I]$，那么得到

$$[C_b^s][C_b^s]^T = [I]$$

即方向余弦矩阵与其转置矩阵之积是单位矩阵，这一点由方向余弦矩阵具有的正交性而很容易理解。为了书写方便，我们将上述关系中方向余弦矩阵中的诸元素，分别用 c_{ij}来表示，i，$j=1$，2，3。这样上述关系的展开式为

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将左边作矩阵乘法运算得到

$$\begin{bmatrix} c_{11}^2+c_{12}^2+c_{13}^2 & c_{11}c_{21}+c_{12}c_{22}+c_{13}c_{23} & c_{11}c_{31}+c_{12}c_{32}+c_{13}c_{33} \\ c_{21}c_{11}+c_{22}c_{12}+c_{23}c_{13} & c_{21}^2+c_{22}^2+c_{23}^2 & c_{21}c_{31}+c_{22}c_{32}+c_{23}c_{33} \\ c_{31}c_{11}+c_{32}c_{12}+c_{33}c_{13} & c_{31}c_{21}+c_{32}c_{22}+c_{33}c_{23} & c_{31}^2+c_{32}^2+c_{33}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

两个矩阵相等，意味着各对应的元素相等。那么由上述矩阵等式可得九个等式，由于对称关系，只有六个等式是独立的，列写如下：

$$\begin{cases} c_{11}^2+c_{12}^2+c_{13}^2=1 \\ c_{21}^2+c_{22}^2+c_{23}^2=1 \\ c_{31}^2+c_{32}^2+c_{33}^2=1 \end{cases} \tag{1-2-15}$$

$$\begin{cases} c_{11}c_{21}+c_{12}c_{22}+c_{13}c_{23}=0 \\ c_{11}c_{31}+c_{12}c_{32}+c_{13}c_{33}=0 \\ c_{21}c_{31}+c_{12}c_{32}+c_{23}c_{33}=0 \end{cases} \tag{1-2-16}$$

这就是方向余弦矩阵中的九个元素必须满足的六个关系式，即九个元素中只有三个是独立的，故式（1-2-15）和（1-2-16）中的六个关系式称方向余弦矩阵元素的约束方程。

例：如图1-2-3所示的o-$x_s y_s z_s$与o-$x_b y_b z_b$坐标系的相对位置是绕z轴转动α角得到的。

二者之间的方向余弦矩阵为：

$$C_a^b=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

将其代入式（1-2-15）和（1-2-16），例如式（1-2-15）中的第一等式有

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

代入式（1-2-16）中的第一等式有

$$\cos\alpha\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=0$$

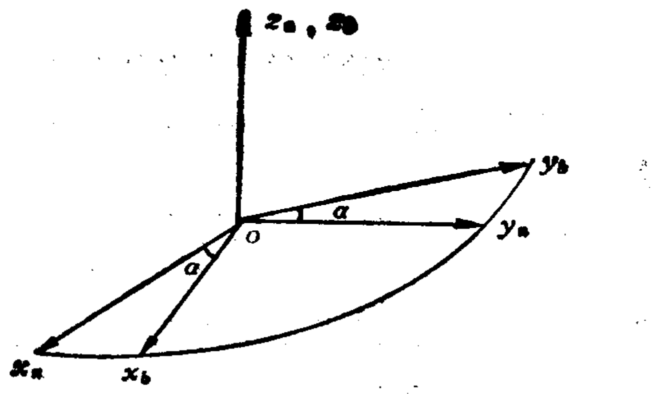

图 1-2-3

其余诸等式也同样满足，不再一一列举了。

式（1-2-15）中的三个关系式分别表示了坐标轴相对另一坐标系的三个方向余弦的平方和等于1，这是我们在式（1-1-5）中已得到过的结论；式（1-2-16）中的三个关系式则分别表示了两个互相垂直的坐标轴相对另一坐标系三个方向余弦两两相乘之和为零

在以后的章节中，我们还将进一步讨论方向余弦矩阵及其元素之间的约束关系在刚体定位中的实际应用。

§1-3 坐标变换的基本公式

上述两个参考坐标系之间的转换关系，自然可以推广到两个以上的坐标系之间的转换。

如果向量r在$o\text{-}x_1y_1z_1$和$o\text{-}x_2y_2z_2$之间的转换关系表示为

$$r^2=C_1^2r^1 \tag{1-3-1}$$

那么r在$o\text{-}x_2y_2z_2$和$o\text{-}x_3y_3z_3$中的转换关系可写成

$$r^3=C_2^3r^2 \tag{1-3-2}$$

将式（1-3-1）代入式（1-3-2）得：

$$r^3=C_2^3C_1^2r^1$$

令

$$C_1^3=C_2^3C_1^2 \tag{1-3-3}$$

那么上式可表示为

$$r^3=C_1^3r^1 \tag{1-3-4}$$

这是向量r相对$o\text{-}x_3y_3z_3$和$o\text{-}x_1y_1z_1$之间的转换关系，其转换矩阵为C_1^3。显然C_1^3可以直接从$o\text{-}x_3y_3z_3$和$o\text{-}x_1y_1z_1$之间的九个方向余弦得到；也可以利用式（1-3-3），通过中间矩阵$o\text{-}x_2y_2z_2$，由C_2^3和C_1^2间做乘法运算来得到，当然结果是完全相同的。而后者往往比较方便，这一点在后面的有关章节可以看到。要注意的是，$C_1^3=C_2^3C_1^2$式中乘法的次序不能交换。因为在一般情况下，矩阵乘法没有交换律。

推广到一般情况，对任意两个坐标系之间的转换关系，也可以通过一个或一个以上的中间坐标系来表示，例如

$$C_b^a=C_G^aC_p^GC_t^pC_b^t \tag{1-3-5}$$

这里要注意一般关系式的书写规则是：

（1）等式右边第一个方向余弦矩阵的上标，应与等式左边方向余弦矩阵的上标相

同。

（2）等式右边最后一个方向余弦矩阵的下标，应与左边矩阵的下标相同。

（3）等式右边除首尾以外的各中间矩阵，则前面一个的下标应与相邻的后一个矩阵的上标相同。

（4）按上述规则写成的关系式，矩阵乘的次序不能交换。

掌握上述这些规则，就可以根据具体情况，灵活选用中间转换坐标，从而把一个一般的坐标转换简化成几个简单变换的合成。下面我们举例说明这个基本坐标变换式的应用。

例：如图1-3-1所示，求地球自转角速度向量ω_e在$o-x_b y_b z_b$上的投影分量。$o-x_b y_b z_b$是绕当地垂线顺时针偏离正北方向ψ角。

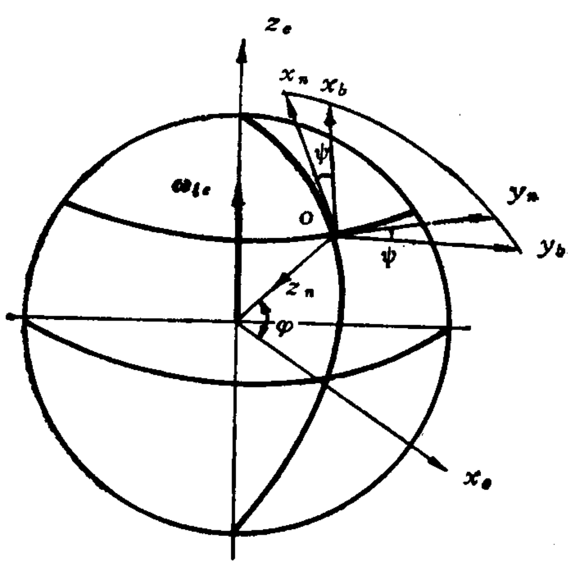

图 1-3-1

解：建立中间坐标系$o'-x_e y_e z_e$，z_e沿ω_e方向，x_e，y_e在地球赤道平面内（注意y_e在图上未画出），建立这个中间坐标系的好处是：

ω_e在它上面的分量很简单

$$\omega_e^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix}$$

我们要求的是$\omega_e^b = ?$，利用坐标变换式只要建立e坐标系与b坐标系之间的方向余弦矩阵C_e^b，则可得到

$$\omega_e^b = C_e^b \omega_e^e$$

为了得到C_e^b，我们在纬度为φ的地面点o建立第二个中间坐标系$o-x_n y_n z_n$，其中ox_n指正北，oy_n指正东，oz_n指地垂线向下。这个中间坐标系当$\varphi = -\pi/2$时与$o'-x_e y_e z_e$的方向重合，也就是当$o'-x_e y_e z_e$绕y_e轴转动$\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$角以后，$o'-x_e y_e z_e$与$o-x_n y_n z_n$（对应的坐标轴）相互平行。而$o-x_n y_n z_n$绕$z_n$轴顺时针转$\psi$角后与$o-x_b y_b z_b$重合。这样我们通过$o-x_n y_n z_n$很容易得到方向余弦矩阵

$$C_e^b = C_n^b C_e^n$$

式中C_e^n是n与e坐标系之间的方向余弦矩阵，两个坐标系的差别如前所述，只是绕y_e轴转了$\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$角，如图1-3-2所示，由此很容易得方向余弦矩阵

$$C_e^n = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix}$$

而方向余弦矩阵C_n^b是n坐标系与b坐标系之间的转换，两个坐标系的差别仅仅是绕z_n轴转ψ

角，如图1-3-3所示。由此得到

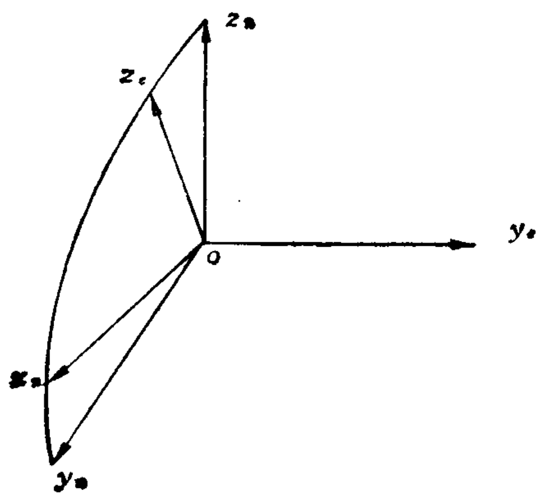

图 1-3-2

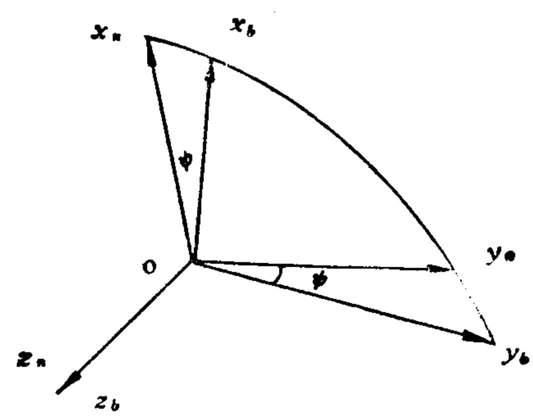

图 1-3-3

$$C_n^b=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

这样可求得ω_e在$o-x_by_bz_b$上的分量为

$$\omega_e^b=C_n^b\omega_e^n=C_n^bC_e^n\omega_e^e$$

即
$$\omega_e^b=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \omega_e\end{bmatrix}$$

$$=\omega_e\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\psi\\ -\cos\varphi\sin\psi\\ -\sin\varphi\end{bmatrix}$$

§1-4 刚体在空间的位置

上面几节，我们讨论了质点在空间的位置及其分析方法。这一节将进一步讨论刚体在空间的位置。所谓刚体是指：如果有某些不等于零的力系作用在一个系统的某些质点或所有的质点上，并且对于任意时刻，两点之间的距离始终保持不变时，该系统称为刚体。因此，一个刚体上的点，对于固结于刚体上的坐标系是没有相对运动的。由于这个原因，在很多情况下，利用固结在刚体上的坐标系相对参考坐标系的位置和运动，以表示刚体相对同一参考坐标系的位置和运动是很方便的。

一个在空间自由运动的刚体，如果将刚体上的一个点固定，那么这个自由刚体将受到该固定点的约束，只能绕固定点转动，从而失去平动的自由。如果我们再固定一个点，那么定点转动的刚体将进一步受到约束，只能作定轴转动（即绕上述两个固定点的连线转动)。这时如果再固定第三点（当然第三点不在上述两点的连线上)，那么刚体的定轴转动也不再可能了，从而完全失去运动的自由。从以上简要的分析中，我们可以得到一个重要的结论：刚体的位置和运动，可以用刚体上三个不共线的点的位置和运动来表示。