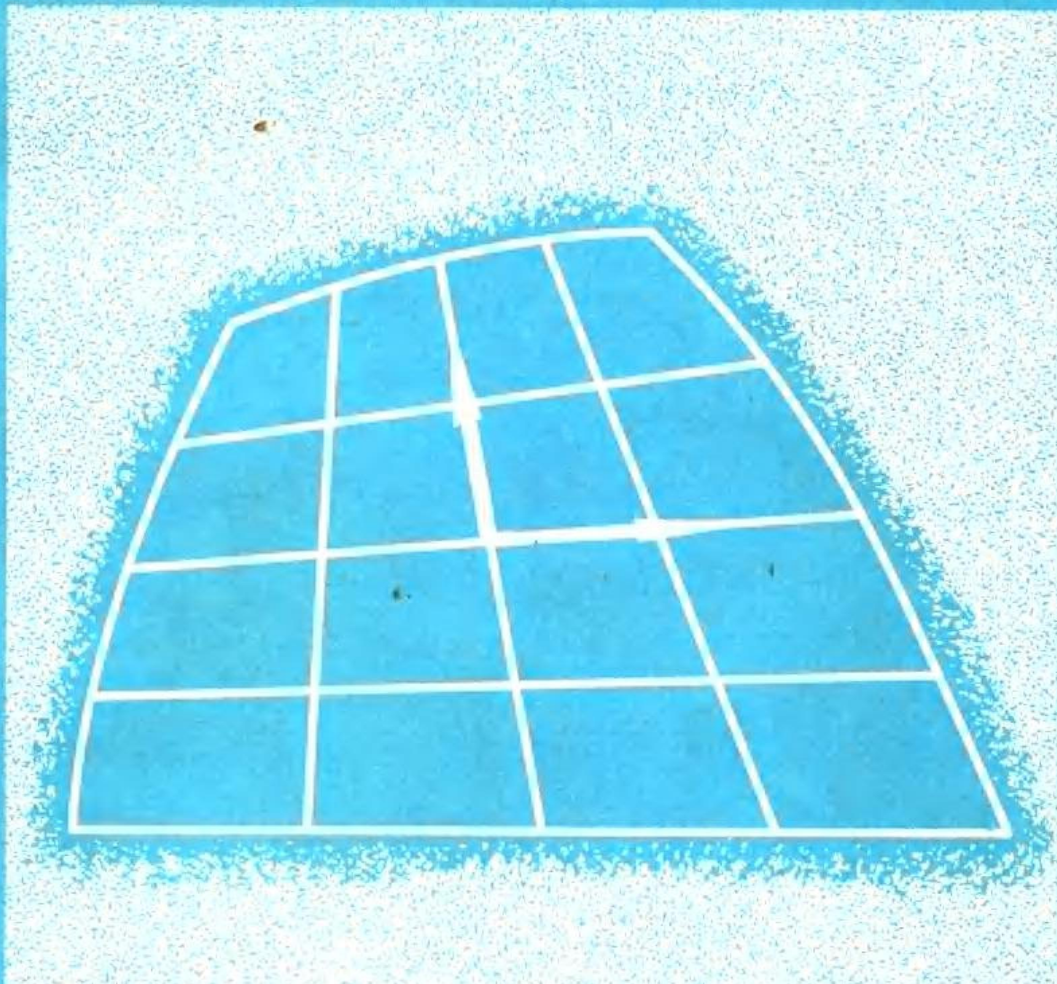
水文地质学的数值法

薛禹群　谢春红　编著



煤炭工业出版社

水文地质学的数值法

薛禹群　谢春红 编著

煤 炭 工 业 出 版 社

内 容 简 介

本书专门论述水文地质问题的数值计算方法。对有限差分法、有限单元法、反求水文地质参数的基本理论、各种计算方法和应用作了系统阐述。内容涉及平面渗流和空间渗流问题以及稳定流、非稳定流、承压流、无压流、承压-无压流等水流状态。全书共九章。第一、二章为绪论和渗流理论基础。第三章介绍有限差分法和几种主要的迭代方法。第四、五章论述平面渗流问题的里兹有限单元法，迦辽金有限单元法以及以局部质量守恒为基础的均衡法。第六章论述空间问题有限单元法。第七章介绍解逆问题反求参数的几种最优化方法。第八章论述计算需要的资料和勘探要求。第九章各种数值方法述评。书中附有例题和五个计算机程序。书末附录对书中用到的数学知识矩阵代数、矢量空间、函数空间等作了扼要介绍。

本书可供水文地质专业的工程技术和研究人员、研究生、大专院校师生阅读，也可供计算数学工作者和温度场研究人员参考。

水文地质学的数值法

薛禹群　谢春红 编著

*

煤炭工业出版社　出版

（北京安定门外和平北路16号）

煤炭工业出版社印刷厂　印刷

新华书店北京发行所　发行

*

开本787×1092 1/16　印张 20 5/8

字数 482 千字　印数1—3,000

1980年 9 月第 1 版　1980年 9 月第 1 次印刷

书号15035·2310　定价2.65元

前　　言

高速数字电子计算机的出现，使得一些复杂问题的求解可以采用各种数值离散化方法来求它的数值解。实践证明数值方法能够成功地用来解决水文地质领域中的许多问题，并逐渐被广大水文地质工作者所接受。

为了通过电子计算机用数值法来解决各种复杂的水文地质问题，需要熟悉这一方法的基本理论和方法。然而目前这方面的著作还很少，给有志于从事这方面工作的同志增添了很多困难。因此，应煤炭工业出版社的约稿，根据已有的文献资料和这几年我们从事这方面工作的一些研究成果和体会，写作了这本书。本书系统地叙述有关这方面的基本理论和主要方法，并附了一些实例。考虑到煤炭工业系统的业务特点，书中略去了有关饱气带地下水运动和水质（水化学、地下水污染等）的数值模拟问题。

全书包括渗流理论基础、有限差分法、有限单元法、解逆问题反求参数、对水文地质资料和勘探工作的要求这几部份内容，并附有框图和部份程序和实例，供读者参考。考虑到当前国际上数值法在水文地质中应用的趋势，特别是一九七六年、一九七八年连续召开了二次水资源中有限单元法国际会议以来的一些情况，本书把重点放在论述有限单元法及其在水文地质的应用上。书中涉及数学知识较多的关于一些理论问题的讨论，如第四章§12，初学者可以暂时不看。另外，本书有些章节是独立的，对读者暂时用不着的部分，可以先搁着不看。例如研究有限单元法的读者，第三章有限差分法可以跳过去不看；不研究空间问题的读者，第六章空间问题的有限单元法也可以不看。

此外，本书对研究温度场、电场等问题也有一定的参考价值。

全书承南京大学数学系孙慧澄同志仔细审阅，提出了很多宝贵意见，数学系张天岭、罗亚平和地质系戴水汉同志对全书也提出了很多宝贵意见，在此谨向他们致以衷心的感谢。

由于我们理论水平不高，实践经验又少，书中缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正，以便修改、更正。

编著者

1979年5月20日建校77周年于南京大学

九二五 D号

符 号 表

下列一览表中定义了本书所用的主要符号（不包括源程序中的标识符）和量纲。矩阵用方括号〔 〕表示，列矢量（列向量）用大括号｛ ｝表示。矢量（向量）用粗黑体表示。

符 号	说 明	量 纲
$[A]$	1. 一般矩阵	
	2. 总体合成后的系数矩阵或总渗透矩阵(稳定渗流问题)	
	3. 由$f_i(k)$对参数k的导数组成的矩阵	
a	压力传导系数	L^2T^{-1}
a_i, a_j, a_m	系数。其中$a_i=x_jy_m-x_my_j$，$a_j=x_my_i-x_iy_m$， $a_m=x_iy_j-x_jy_i$	L^2
B	含水层厚度。承压水流区$B=M$，无压水流区 $B=H-Z$	L
$[B]$	1. 一般矩阵	
	2. 反求水文地质参数$k_i(i=1,2,\cdots,n)$时，由k_i前的系数构成的系数矩阵	
$[B]^e$	$[B]^e=[d]^e+[p]^e+[mp]^e$或$[B]^e=[d]^e+[p]^e$	
b_i, b_j, b_m	系数。其中$b_i=y_j-y_m$，$b_j=y_m-y_i$，$b_m=y_i-y_j$	L
C	常数	
C_0	泛函I的容许函数类(在区域D上有连续的一阶导数，且在边界Γ上取定值)	
C_{01}	泛函I的容许函数类(在区域D上有连续的一阶导数，且仅在一部分边界Γ_1上取定值)	
C_e	任意单元e的边界	
c_i, c_j, c_m	系数。其中$c_i=x_m-x_j$，$c_j=x_i-x_m$，$c_m=x_j-x_i$	L
D	研究的渗流区（计算区）	
D_i	共有结点i的所有单元组成的集合	
$[D]$	1. 一般的对角线矩阵	
	2. 渗透矩阵$[D]=\sum\limits_e[d]^e$	
$[d]^e$	单元渗透矩阵	
d_z	越流补给的渗透路程长度，即弱透水层厚度	L
d_z^e	单元e上d_z的平均值	L
E	1. 总剩余(剩余函数ε的平方和)	
	2. 目标函数(评价函数)	
e	1. 任意单元	
	2. 误差	
$\{F\}$	线性代数方程组的自由项(“右端项”)	
$\{f\}$	1. 一般的列矢量	
	2. 单元的垂向、侧向补给量，外加流量之和	
f	一般函数	

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

符号	说　　明	量　纲
$f_l^2(\boldsymbol{k})$	$f_l^2(\boldsymbol{k})=\omega_l(H_l-H_l^{ob})^2$	
g	重力加速度	LT^{-2}
H	水头	L
H_b	在边界Γ_1上的水头函数	L
H_d	总水头	L
$H_{i,j}$	结点(i,j)处的水头	L
$H_{i,j,k}$	结点(i,j)处k时刻的水头	L
$H_{i,j,l,k}$	结点(i,j,l)处k时刻的水头	L
H_l	用一组水文地质参数$\boldsymbol{k}$解正问题后所得的计算水头值	L
H_l^{ob}	水头的实际观测值	L
H_0	水头初值（初始水头）	L
H^0	水头初值（初始水头）	L
H_+	Δt时段终了时刻$(t=t_0+\Delta t)$的水头	L
H_-	Δt时段开始时刻$(t=t_0)$的水头	L
H^*	1. 浸润面上各点的水头	L
	2. 实测水头值	
$\bar{H}$	Δt时段内水头的平均值	L
$\widetilde{H}$	1. 水头的插值函数	L
	2. 有关水头的差分方程的解	L
	3. 水头的近似值	L
$\widetilde{H}'$	差分方程的近似解	L
$\hat{H}$	Δt时间段内$\widetilde{H}$的平均值	L
$\{H\}$	水头的列矢量	
H_m	稳定渗流问题的解	L
H_z	补给层的水头	L
H_z^e	单元 e 内 H_z 的平均值	L
$\bar{H}_z$	Δt时段内H_z的平均值	L
h	无压含水层（潜水流）的厚度	L
I	1. 一般泛函	
	2. 观测时刻总数	
I^e	单元 e 上的泛函	
$[I]$	单位矩阵	
J	1. 水力坡度	无量纲
	2. 雅可比行列式	
	3. 观测点总数	
K	渗透系数	LT^{-1}
$\bar{K}$	K的平均值	LT^{-1}
K_x、K_y、K_z	x、y、z方向的渗透系数	LT^{-1}
K_z^e	单元 e 上K_z的平均值	LT^{-1}
k	1. 迭代次数	
	2. 反求的水文地质参数	
$\{\boldsymbol{k}\}$	反求的水文地质参数矢量	

符　号	说　　明	量　纲
L, l	1. 距离	L
	2. $L=IJ$	
M	1. 承压含水层厚度	L
	2. 函数f，f_{xx}的最大值	
$\bar{M}$	承压含水层厚度M的平均值	L
$M[i]$	系数矩阵$[A]$中第i行对角线元素的编号	
m	单元总数	
m'	D_i内的单元总数	
$[mp]^e$	单元的释放矩阵	
mR	总带宽	
N	1. 结点总数	
	2. 基函数	
N_i、N_j、N_m、N_p	对应于结点i、j、m、p的基函数	
n	1. 岩石的孔(空)隙度	
	2. 渗流区边界的外法线方向	
	3.未知结点总数(不包括第一类边界结点在内的结点总数)	
	4. 高斯点数目	
	5. 待求参数总数	
nn	带宽	
$[NP]$	释放矩阵(贮水性矩阵)	
$[NP^*]$	释放矩阵(纽曼法)，$[NP^*]=\sum_e[NP^*]^e$	
$[np]^e$	单元释放矩阵	
$[np^*]^e$	单元释放矩阵(纽曼法)	
$[0]$	零矩阵	
p	压强	$ML^{-1}T^{-2}$
$[p]^e$	单元越流补给矩阵	
Q	流量	L^3T^{-1}
$\bar{Q}$	Q的平均值	L^3T^{-1}
q	单位宽度(单宽)或单位面积侧向补给流量	L^2T^{-1}或LT^{-1}
$\bar{q}$	Δt时段内q的平均值	L^2T^{-1}
r	径向距离	L
r_w	井径	L
r,θ,z	柱坐标	
S	贮水系数	无量纲
S^e	单元e上贮水系数的平均值	无量纲
$S_{i、j}$	结点(i、j)处的贮水系数	无量纲
S_s	贮水率	L^{-1}
s	1. 弦长变量	
	2. 渗流区的边界面	
s_1	第一类边界面	
s_2	第二类边界面	
T	导水系数	L^2T^{-1}

符　号	说　　明	量　纲
T^e	单元 e 上导水系数的平均值	L^2T^{-1}
$T_{i、j}$	1. 结点(i、j)处的导水系数	L^2T^{-1}
	2. 结点i和结点j间的导水系数(IFDM法)	L^2T^{-1}
T_{sum}	总时间	T
t	时间	T
t_0	初始时刻(即$t=0$时)	T
Δt	时间步长	T
u	1. 实际流速	LT^{-1}
	2. 一般因变量	
V	1. 岩土体积	L^3
	2. 四面体体积	L^3
ΔV_0	典型单元体积	L^3
v	渗透速度	LT^{-1}
v_x、v_y、v_z	x、y、z 方向的渗透速度分量	LT^{-1}
W	单位时间单位水平面积(或单位体积)上进入含水层的水量	$LT^{-1}(T^{-1})$
W^e	单元 e 上W的平均值	LT^{-1}
x, y, z	笛卡儿坐标	
x_i、x_j、x_m	结点 i、j、m 处 x 方向的坐标值	L
y_i、y_j、y_m	结点 i、j、m 处 y 方向的坐标值	L
z_i、z_j、z_m	结点 i、j、m 处 z 方向的坐标值	
Δx、Δy	空间步长	L
z	隔水底板高程	L
A_i、A_j、A_m	高斯积分的加权系数	
α	1. 含水层固体骨架的垂向压缩系数	$M^{-1}LT^2$
	2. 参数的下限(约束条件)	
β	1. 液体的体积压缩系数	$M^{-1}LT^2$
	2. 参数的上限(约束条件)	
γ	水的容重	$ML^{-2}T^{-2}$
Γ	渗流区的边界	
Γ_1	第一类边界	
Γ_2	第二类边界	
Γ_{w_j}	第 j 口井的周界	
$\triangle$	三角形单元的面积	L^2
ε	1. 误差	
	2. 剩余函数	
	3. 单位时间单位水平面积上的入渗量或蒸发量	LT^{-1}
θ	1. 角度	
	2. 权因子	
κ	某时刻 κ 的代号	T
λ	$\lambda=\dfrac{T\Delta t}{S(\Delta x)^2}$	无量纲
μ	给水度或饱和差	无量纲

符　号	说　　明	量　纲
ν	1．井数	
	2．阻尼因子	
ξ，η，ζ	参数坐标	
ρ	密度	ML^{-3}
σ_z	垂向应力	$ML^{-1}T^{-2}$
φ	边界 Γ_1 或 s_1 上已知的水头函数	L
$\overline{\varphi}$	Δt 时段内 φ 的平均值	L
ψ	1．试验函数(基函数)	
	2．流函数	
ω	1．松弛因子	
	2．加速参数	
	3．权因子	
	4．面积	L^2
ω_I	权因子	

目录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　绪　　论

自一九三五年以泰斯（C.V.Theis）公式为代表的非稳定运动理论问世以来，解地下水运动问题的解析法有了很大发展，建立了一系列的方程、公式和图表，并被广泛地应用到生产实践中去。它不仅推动了地下水运动理论的发展，还解决了大量的生产实际问题。但解析法由于在确立定解问题时，对地质、水文地质条件进行了大量的简化，因而限制了它的应用范围。例如泰斯公式就是在下列假设条件下推导出来的：

1. 含水层是均质、各向同性和等厚的；
2. 水和含水层均假设为弹性体，当水位下降时，含水层中水的释放是瞬时完成的；
3. 含水层水平分布，侧向无限延伸；
4. 含水层顶、底板完全不透水；
5. 抽水前的水头面是水平的；
6. 定流量抽水，井径无限小；
7. 抽水井为完整井。

然而，完全符合上述条件的理想情况在自然界是不存在的。虽然有些条件可以近似地加以考虑，但是一般说来，解析法只适用于含水层几何形状简单，并且是均质、各向同性的情形，因而在很大程度上限制了这些解析解的应用范围。

实际水文地质条件往往比上述理想情况要复杂得多，在岩溶地区更是如此。例如：（1）含水层是非均质的，同一地区不同地段岩性变化很大；（2）顶、底板起伏不平，厚度有变化，或含水层是倾斜的；（3）边界形状复杂，边界条件多种类型同时存在；（4）含水层之间有水力联系，有越流和"天窗"的垂直补给；（5）承压水转变为无压水；（6）地下水是三维运动，渗透速度的垂直分量明显存在，不能忽略等等。出现这些情况在自然界是很普遍的，特别是第1、2、3种情况，可以说是比比皆是。对于这样的地区用解析方法求解就很困难，暂时还无法解决。如果勉强地大量简化水文地质条件，在近似、平均的意义下使用解析解公式，那也只能得到一个极其粗略的结果，很难符合实际情况。因而失去了它的实用意义。所以不顾具体条件套用非稳定流解析解公式必然会得出不正确的结论。

高速数字电子计算机的出现和数值法的应用为解决这类问题开辟了新的途径。上述各种复杂的水文地质条件都可以在高速数字计算机上模拟出来。根据一定的数学模型在数字电子计算机上用数值法模拟地下水的运动状态称为数值模拟。实践证明，许多过去难以解决的复杂问题用电子计算机依靠数值法求数值解往往可以取得虽然是近似的，然而却是满意的解答。数值法就是在这样的背景下发展起来的。目前数值模拟在水文地质计算中已占有十分重要的地位，并使地下水的定量评价进入了一个崭新的发展阶段。这种方法的研究也愈来愈受到人们的重视。

数值法事实上可以在不同的水平上建立起对它的理解。人们可以通过非常直观的途径来学习和应用这一方法。另一方面也可以建立这种方法的严格的数学解释。考虑到已经有

同志从事了前一方面的工作，而且为了给读者打下阅读国内外专门文献的基础，本书基本上是从遵循严格数学解释的途径出发的。但为了适应广大读者的需要，我们省略了涉及数学知识较多的一些理论部分，同时对所涉及的数学知识也尽可能地从我国广大水文地质工作者的实际情况出发，改用比较容易理解的写法，但又要尽可能设法保持数学上的严密性。

运用数值模拟首先要建立数学模型。一个或几个描述地下水运动的数学方程式联同表示该研究地区特定条件（初始条件、边界条件）的数学表达式就构成了一个研究具体地下水运动的数学模型。对这一数学模型进行运算就能再现或预测这一运动的过程。

在数值法中，解仅仅是在研究对象（在渗流问题中就是渗流区）中的离散点上给出未知量的满足一定精度要求的近似值。在研究区内选择一定数量的离散点的过程通常称为离散化。离散化的一种办法是将研究区在空间上分割为较小区域（或单元）的等价系统（图1-1）。这些单元的集合体就代表原来的渗流区。在时间上则划分成许多时段。这些时段的集合就是原来所要研究的时间段。接着建立某时段每个单元的计算公式，然后集合起来，便得到该时段原来渗流区的解，而不是一下子解出渗流区整个流态的问题。这个时段解决了，按划分的时段，一个时段一个时段的算下去，直到把划分的时段全部算完为止。这样未知量（渗流问题中通常是水头）随空间和时间变化的过程就给模拟出来了。所以这种分析方法的特点就是把全体分割成很多部分，然后从部分到全体。因此，分析过程大为简化，但是要处理的数据总量却要看原来的渗流区所分割成的较小区域（单元）有多少，如果分得细，用人工来处理这么多数据就是一项很艰巨的工作，因而不得不求助于电子计算机。事实上，如果为了能人工处理这些数据，尽量减少分割的区域数，计算出来的结果就不可能符合生产部门的精度要求，因而是没有实际意义的。所以数值模拟的工作量一般都是很大的，有时甚至是惊人的，例如要解几百甚至一千多阶的线性代数方程组，没有高速、大容量的现代计算工具要做这样的计算是难以想像的。像显微镜和望远镜起了扩大人类眼界的作用那样，高速数字计算机则起了扩大人类智力的作用，它为使用数值法提供了重要的物质条件。

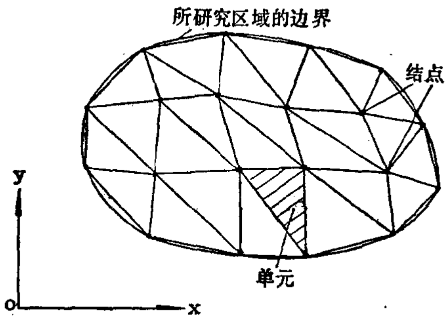


图 1-1　用三角形单元的集合体来表示二维渗流区域

和其他方法比较，数值模拟有很多优越性。其中主要有：（1）模拟在通用数字电子计算机上进行，计算中心或计算技术研究所可以提供这类计算机，而不需要像物理模拟那样建立复杂的专门设备；（2）不仅可以解线性问题，非线性问题也比较容易处理，而且可以用于水文地质的很多领域，如水位预报、水量计算、水质以及水温的计算、地下水的合理开发等，而水质的问题目前还缺乏成功的物理模型；（3）修改算法、修改模型都比较方便；（4）可以程序化，对某一类问题只要编出通用程序后，对不同的具体问题只要按程序整理好数据就可以直接上机计算。当然，这种方法也有它的不足之处：如不如物理模拟来得“逼真”、“直观”；对于非稳定流问题，如前述要把时间分段，一步一步地计算，在水头变化较快的时段时间步长取得要小，结果不

仅计算工作量增大，而且有可能带来一定的误差。前者对于一个熟练的水文地质工作者来说不是一个主要的问题；后者可以通过不断改进数值法和使用高速计算机来解决。

目前在地下水计算中使用的数值法主要有有限差分法和有限单元法（也叫有限元法或有限元素法）两种。

虽然在三十年代就开始把有限差分法应用到地下水研究中来，但由于那时还没有电子计算机，因而限制了它的应用和发展。和电子计算机结合，全面系统地解决地下水运动的问题还是六十年代的事。六十年代末期数值法在地下水研究中得到迅速的推广，一些新的算法不断引入地下水计算中。有限单元法也是这个阶段引入的。进入七十年代以来，发展就更快了，而且越出了地下水运动问题的研究，把数值模拟应用到水化学和地下水污染问题的研究中来。

随着我国社会主义建设事业的发展，一九七三年以来，数值模拟方法也逐渐应用到水文地质中来，并取得了可喜的成果。由单个含水层的研究发展到多个含水层组成的含水组的研究，由二维模型发展到三维模型。研究课题涉及地下水资源评价、矿坑涌水量预测、供水或排水疏干方案的探讨、水坝和渠道渗漏等多个领域。不仅有正问题的研究，还有解逆问题的各种最优化方法的探讨。但是从首届“全国地下水资源评价学术会议”的论文看来，发展是不平衡的，应用也不够普及，有必要迅速推广和发展这种方法以适应四个现代化的需要。本书就是为适应这一要求而编写的。

为了透彻地理解数值法的理论和应用，应当首先具备某些基本知识。这些知识包括矩阵代数、地下水动力学、算法语言和计算机的使用。我们假定在这些领域中读者已有一定的基础知识。但是为了便于读者学习，我们在第一章中综述了基本的渗流理论和有关方程，在附录中编写了有关矩阵代数和矢量空间的知识。

第二章 渗透理论基础

§1 渗流的基本概念

地下水存在于岩石的孔隙、裂隙和溶洞中，并在其中运动。地下水在岩石孔隙、裂隙和溶洞中运动的情况比较复杂。

岩石中孔隙和裂隙的形状、大小、连通性等等各不相同。它们是一些形状复杂，大小不一、弯弯曲曲的通道。因而在不同的空隙中或同一空隙的不同部位地下水运动的情况各不相同。所以研究个别孔隙或裂隙中地下水的运动特征不仅困难，而且实际价值也很小。因此，人们通常不去直接研究个别液体质点的运动规律，而去研究岩石内液体的平均运动，即具有平均性质的渗透规律。这种方法的实质是用和真实水流属于同一流体的、充满整个含水层（包括全部的空隙空间和岩石颗粒所占据的空间）的假想水流来代替仅仅在岩石空隙内运动的真实水流，通过对这一假想水流的研究来达到了解真实水流平均渗透规律的目的。这种假想水流同时还应具有下列性质：它通过任一断面的流量应与真实水流通过同一断面的流量相等；它在某断面上的压力或水头应等于真实水流的压力或水头；它在任意岩石体积内所受的阻力应等于真实水流所受的阻力。满足上述条件的这种假想水流称为渗透水流，简称渗流。假想水流所占有的空间区域称为渗流区（渗流场）。这么一来，渗流就可以当做连续水流来研究了。

为了描述渗流的特征，采用一些物理量如流量、速度、水头等来说明它。在计算时，把它看作是空间坐标 x、y、z 和时间 t 的连续函数。

渗流在垂直于渗流方向的岩石断面（即过水断面）上的平均流速通常称为渗透速度。渗透速度是一种假想速度。它与地下水流在岩石空间的实际平均流速有下列关系

$$v = nu \tag{2-1}$$

式中 v ——渗透速度（米/天，厘米/秒）；

u ——实际平均流速（米/天，厘米/秒）；

n ——岩石的空隙度。

显然，仅仅有这样定义的渗透速度还是不够的。在多孔介质水动力学中是这样定义渗透速度的[23]

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\Delta V_0}\int_{(\Delta V_V)_0} \boldsymbol{u}\, dV_V \tag{2-2}$$

式中 $\boldsymbol{u}$ ——水流速度矢量；

$\boldsymbol{v}$ ——渗透速度矢量；

ΔV_0 ——是这样一个体积：如令 P 是多孔介质内的一个数学点，考虑一个体积 ΔV_i（P 是它的重心），它较单个孔隙或颗粒要大。在此体积内有一部分是孔隙所占有的体积，设为 $(\Delta V_V)_i$。若以 n_i 表示比值

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com