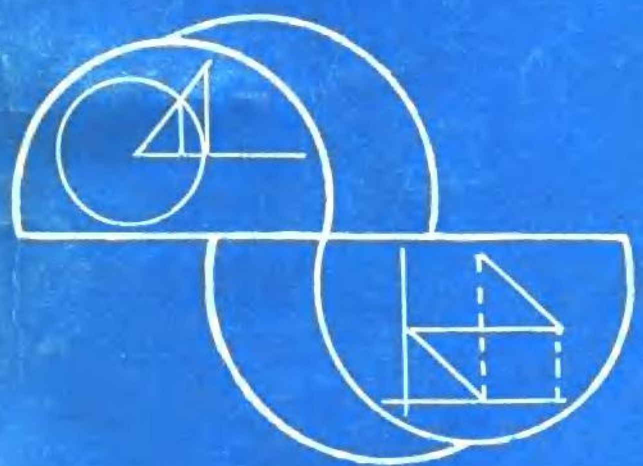
高等数学

第三册

林梦熊　编著



四川大学出版社

高 等 数 学

（第三册）

林梦熊　编

四川大学出版社

一九八八年·成都

高等数学（第三册）　　　　林梦熊　编

四川大学出版社出版发行（成都四川大学内）
四川省新华书店发行　　德阳报社印刷厂印装

开本787×1092毫米　1/32　张印18　字数370千
1987年12月第一版　　1987年12月第一次印刷
印数：1—8000册

ISBN　7—5614—0038—1/o·7
定价：2.41元

内 容 提 要

本册包括线性代数与群的表示，概率论与数理统计及数理方程简介等三个部分。叙述简洁，重点突出，举例富有代表性，可作为综合大学化学类及工科院校相应专业的教材和参考书，也可供自学者使用。

目　录

第一篇　线性代数与羣的表示 一

第二篇 概率论和数理统计

第三篇 数理方程初步

第一篇　线性代数与群的表示

本篇的宗旨是介绍群的表示理论。它与矩阵、向量空间、线性变换等代数知识有紧密的联系。这些知识不仅是群表示的理论基础，而且它们本身具有广泛的应用。为此先介绍它们。

第一章　矩　　阵

§1.　矩阵的概念及其运算

我们在中学已经学过一元一次联立方程组，例如：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad (1-1)$$

其中a_{ij}和b_i是常数，x_j是未知数。我们把左端未知数的系数以及右端的常数排列成如下形式：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad (1\text{—}2)$$

再把未知数排列成

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (1\text{—}3)$$

后面将要证明，方程组（1—1）可简写成

$$AX=B \qquad (1\text{—}1')$$

方程组（1—1）能有（1—1′）这样如此简单的形式，主要是引用了（1—2）及（1—3）中的表现形式。虽然它们形式各异，但可统一在下述定义中。

定义 1　将mn个数（实数或复数）排列成下述形式

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1\text{—}2)$$

就构成一个m行n列的矩阵。其中每一横排叫做行，每一竖排叫

做列；第i行与第j列相交处的元素是 a_{ij}，（$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$），（例如a_{23}是第2行与第3列相处的元素，）它们简称矩阵A的元。（1—4）的A叫做m行n列矩阵，简称为$m\times n$型矩阵。为了标明型号，也可记为：$A=A_{mn}=(a_{ij})_{mn}$，特别当$m=n$时，叫做n阶方阵。（多数情况下用的是方阵。）

（1—2）中的A是3阶方阵，B是3×1型矩阵，（1—3）的X是3×1型矩阵。

定义2 两个矩阵A与B称为相等，如果它们是同型的，且对应的矩阵元分别相等。A与B相等记为$A=B$。

现在我们介绍矩阵的运算。

定义3 设有二同型矩阵A与B，其中

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B=(b_{ij})=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

我们称矩阵

$$C=(C_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \tag{1-5}$$

为A与B之和，记为$A+B=C$，其中

$$C_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

例 1　设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

则

$$A+B=\begin{pmatrix}1+2 & 2+0 & 3+(-1)\\ 3+(-3) & 2+1 & 1+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

我们再引入两个特殊的矩阵。矩阵元均是0的矩阵称为**零矩阵**，记为$0=0_{mn}$。对于给定的矩阵A，我们称A的元的相反数所构成的矩阵$(-a_{ij})$称为A的**负矩阵**，记为$-A=(-a_{ij})$。

从上述定义中我们知道，两个矩阵的和实际上是它们的对应元素（是些数）相加，因而有下列的运算性质：

命题 I　对于任意三个同型矩阵A、B、C，则

（1）　$A+B=B+A$

（2）　$(A+B)+C=A+(B+C)$

（3）　$A+0=A$

（4）　$A+(-A)=0$

其中 0 是与A同型的零矩阵。

有了负矩阵的概念以后，我们把二同型矩阵的差定义为 $A-B=A+(-A)$。

例 2

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}
$$

现在介绍矩阵的数乘运算。

定义 4　设有矩阵$A=(a_{ij})$和常数k。我们称矩阵

$$
\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} = (ka_{ij})
$$

为矩阵A与常数k的**数乘**，记为kA，或Ak。

例 3

$$(-2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

由于矩阵A与常数k的数乘kA是将A的每一个元都乘以数k而得来的新矩阵，因此不难直接验证：

命题 Ⅱ 设A与B是同型矩阵，k和l是数，则

（1） $k(A+B)=kA+kB$，

（2） $(k+l)A=kA+lA$，

（3） $(kl)A=k(lA)$。

§2. 矩阵的乘法

前节介绍的矩阵加法与数乘运算类似于普通三维空间中向量的加法与数乘，但矩阵的乘法是向量的运算中所没有的。

定义 1 设有二矩阵A和B，其中A是p行m列矩阵，B是m行n列矩阵，即

$$A=(a_{ij})_{pm}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pm} \end{pmatrix}$$

$$B=(b_{jk})_{mn}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

按照下述规则构造一个新的矩阵

$$C=\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m}a_{1j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{m}a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m}a_{1j}b_{jn} \\ \sum\limits_{j=1}^{m}a_{2j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{m}a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m}a_{2j}b_{j1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m}a_{pj}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{m}a_{pj}b_{j2} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m}a_{pj}b_{jn} \end{pmatrix}\equiv(C_{ik})_{pn}$$

则称p行n列矩阵 C为A与B 之积，记为 $C=AB$。矩阵 C 的第i行第k列相交处的元素C_{ik} 为

$$C_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{im}b_{mk}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}\text{。}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ p;\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

换句话说，新矩阵C的元 C_{ik}为A 的第i行的元素与 B 的第 k列的元素对应相乘后再相加。由此可见第一个矩阵 A 的

列数必需等于第二个矩阵B的行数，才能相乘。特别如 A 和 B是同阶方阵，乘积AB是有意义的。

例 1 设 $A=(1\quad -1\quad 2)$

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

则A与B是可乘的，且

$$AB=(1\quad -1\quad 2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\left(1\times(-1)+(-1)\times 1+2\times 2\quad 1\times 0+(-1)\times 3+2\times 1\right)$$

$$=(2\quad -1)。$$

即AB是1×2型矩，显然BA是没有意义的。

例 2 设有

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

显然，AB与BA均有意义，且

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0,$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

从上二例，我们可以看出下述二特点：

1° 一般来说，AB与BA不一定都有意义，（如例 1 ）即使二者均有意义，但不一定相等（如例 2 ）。这就表明矩阵乘法不满足交换律，即$AB \neq BA$。

这个特点是数的乘法所没有的，还有一个是数的乘法所没有的特点。

2° 我们知道二非零之数相乘，其积必不为零。但在例 2 中，二非零矩阵A和B的积AB是二阶零矩阵。

熟悉了矩阵乘法的概念后，把§1的方程组（1—1）改写成矩阵方程（1—1′），是十分自然的事。一般 n个未知数m个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (2—1)$$

可改写成矩阵方程

$$AX=B\ , \qquad (2—2)$$

其中