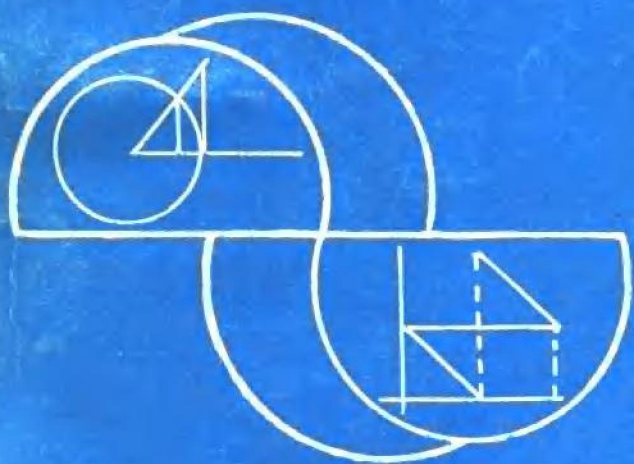


高等数学

第三册

林梦熊 编著



四川大学出版社

711/237/15

高等数学

(第三册)

林梦熊 编

四川大学出版社

一九八八年·成都

高等数学（第三册） **林梦熊 编**

四川大学出版社出版发行（成都四川大学内）

四川省新华书店发行 德阳报社印刷厂印装

开本787×1092毫米 1/32 张印18 字数370千

1987年12月第一版 1987年12月第一次印刷

印数：1—8000册

ISBN 7—5614—0038—1/o·7

定价：2.41元

内 容 提 要

本册包括线性代数与群的表示, 概率论与数理统计及数理方程简介等三个部分。叙述简洁, 重点突出, 举例富有代表性, 可作为综合大学化学类及工科院校相应专业的教材和参考书, 也可供自学者使用。

701/237/15

目 录

第一篇 线性代数与羣的表示

第一章 矩 阵	(1)
§1 矩阵的概念及其运算	(1)
§2 矩阵的乘法	(6)
§3 方阵的逆	(14)
§4 矩阵的其它运算	(33)
§5 酉矩阵和厄米特矩阵	(42)
习题	(46)
第二章 向量空间	(54)
§1 基本概念	(55)
习题	(64)
§2 向量空间中的线性变换	(65)
§3 向量的数量积	(85)
§4 特征值问题与矩阵的对角化	(96)
习题	(113)
第三章 群	(117)
§1 群的定义	(117)
§2 循环群	(128)
§3 置换群	(134)
§4 子群及陪集	(148)
§5 共轭类与群的共轭类分解	(154)
§6 同态与同构	(160)

§7	正规子群和商群	(167)
§8	正交变换群及晶体点群	(174)
	习题	(191)

第四章 群的表示

§1	定义及例子	(196)
§2	等价表示	(207)
§3	可约表示	(213)
§4	矩阵元的正交关系	(225)
§5	特征标	(240)
	习题	(258)

第二篇 概率论和数理统计

第五章 概率论基础

§1	随机事件及其运算	(260)
§2	概率的定义	(264)
§3	加法定理	(272)
§4	条件概率与乘法公式	(276)
§5	全概率公式、贝叶斯公式	(286)
	习题	(291)

第六章 随机变量及其概率分布

§1	随机变量的概念	(296)
§2	二项分布与卜阿松分布	(301)
§3	正态分布	(310)
§4	分布函数及随机变量的函数的分布	(319)
§5	随机变量的均值	(330)
§6	随机变量的方差	(338)
§7	多维随机变量简介	(343)

习题	(365)
第七章 数理统计	(371)
§1 总体和样本	(371)
§2 样本值的统计整理	(373)
§3 χ^2 分布、F 分布、t 分布	(382)
§4 总体的均值与方差的估计	(400)
§5 区间估计	(410)
§6 假设检验	(420)
§7 回归分析	(439)
习题	(473)

第三篇 数理方程初步

第八章 付氏级数和付氏积分	(478)
§1 周期函数的付氏级数	(478)
§2 奇函数和偶函数的付氏级数	(487)
§3 将定义于 $(0, T)$ 上的函数展为正弦级数或余弦级数	(492)
§4 付氏级数的复数形式	(495)
§5 付氏积分	(498)
§6 付氏变换的性质	(503)
习题	(508)
第九章 三类基本方程及定解问题	(510)
§1 热传导方程	(510)
§2 拉普拉斯方程	(515)
§3 波动方程	(516)
§4 一般概念	(519)
习题	(523)

第十章	定解问题的求解方法	(525)
§1	达朗贝尔法	(525)
§2	弦振动的混合问题	(529)
§3	热传导问题	(536)
§4	拉普拉斯方程的圆内边值问题	(541)
§5	付氏变换的应用	(546)
	习题	(552)

第一篇 线性代数与群的表示

本篇的宗旨是介绍群的表示理论。它与矩阵、向量空间、线性变换等代数知识有紧密的联系。这些知识不仅是群表示的理论基础，而且它们本身具有广泛的应用。为此先介绍它们。

第一章 矩 阵

§1. 矩阵的概念及其运算

我们在中学已经学过一元一次联立方程组，例如：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1-1)$$

其中 a_{ij} 和 b_i 是常数， x_j 是未知数。我们把左端未知数的系数以及右端的常数排列成如下形式：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (1-2)$$

再把未知数排列成

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

后面将要证明，方程组 (1-1) 可简写成

$$AX = B \quad (1-1')$$

方程组 (1-1) 能有 (1-1') 这样如此简单的形式，主要是引用了 (1-2) 及 (1-3) 中的表现形式。虽然它们形式各异，但可统一在下述定义中。

定义 1 将 mn 个数 (实数或复数) 排列成下述形式

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1-2)$$

就构成一个 m 行 n 列的矩阵。其中每一横排叫做行，每一竖排叫

做列；第*i*行与第*j*列相交处的元素是 a_{ij} ，($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$)，(例如 a_{23} 是第 2 行与第 3 列相处的元素，) 它们简称矩阵 A 的元。(1—4) 的 A 叫做 m 行 n 列矩阵，简称为 $m \times n$ 型矩阵。为了标明型号，也可记为： $A = A_{mn} = (a_{ij})_{mn}$ ，特别当 $m = n$ 时，叫做 n 阶方阵。(多数情况下用的是方阵。)

(1—2) 中的 A 是 3 阶方阵, B 是 3×1 型矩阵, (1—3) 的 X 是 3×1 型矩阵。

定义 2 两个矩阵 A 与 B 称为相等, 如果它们是同型的, 且对应的矩阵元分别相等。 A 与 B 相等记为 $A = B$ 。

现在我们介绍矩阵的运算。

定义 3 设有二同型矩阵 A 与 B , 其中

[illegible]

我们称矩阵

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \quad (1-5)$$

为 A 与 B 之和, 记为 $A+B=C$, 其中

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$$

例1 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

则

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+0 & 3+(-1) \\ 3+(-3) & 2+1 & 1+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

我们再引入两个特殊的矩阵。矩阵元均是0的矩阵称为零矩阵, 记为 $0 = 0_{mn}$ 。对于给定的矩阵 A , 我们称 A 的元的相反数所构成的矩阵 $(-a_{ij})$ 称为 A 的负矩阵, 记为 $-A = (-a_{ij})$ 。

从上述定义中我们知道, 两个矩阵的和实际上是它们的对应元素(是些数)相加, 因而有下列的运算性质:

命题 I 对于任意三个同型矩阵 A, B, C , 则

$$(1) \quad A+B=B+A$$

$$(2) \quad (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$(3) \quad A+0=A$$

$$(4) \quad A+(-A)=0$$

其中 0 是与 A 同型的零矩阵。

有了负矩阵的概念以后，我们把二同型矩阵的差定义为 $A-B=A+(-B)$ 。

例 2

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

现在介绍矩阵的数乘运算。

定义 4 设有矩阵 $A=(a_{ij})$ 和常数 k 。我们称矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} = (ka_{ij})$$

为矩阵 A 与常数 k 的数乘，记为 kA ，或 Ak 。

例 3

$$(-2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

由于矩阵 A 与常数 k 的数乘 kA 是将 A 的每一个元都乘以数 k 而得来的新矩阵，因此不难直接验证：

命题 I 设 A 与 B 是同型矩阵， k 和 l 是数，则

- (1) $k(A+B) = kA + kB$,
- (2) $(k+l)A = kA + lA$,
- (3) $(kl)A = k(lA)$ 。

§2. 矩阵的乘法

前节介绍的矩阵加法与数乘运算类似于普通三维空间中向量的加法与数乘，但矩阵的乘法是向量的运算中所没有的。

定义 1 设有二矩阵 A 和 B ，其中 A 是 p 行 m 列矩阵， B 是 m 行 n 列矩阵，即

$$A = (a_{ij})_{p \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pm} \end{pmatrix}$$

$$B = (b_{jk})_{m \times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

按照下述规则构造一个新的矩阵

$$C = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^m a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^m a_{1j}b_{jn} \\ \sum_{j=1}^m a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^m a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^m a_{2j}b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=1}^m a_{pj}b_{j1} & \sum_{j=1}^m a_{pj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^m a_{pj}b_{jn} \end{pmatrix} \equiv (C_{ik})_{p \times n}$$

则称 p 行 n 列矩阵 C 为 A 与 B 之积, 记为 $C = AB$ 。矩阵 C 的第 i 行第 k 列相交处的元素 C_{ik} 为

$$C_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk}.$$

$$(i = 1, 2, \cdots, p; \quad k = 1, 2, \cdots, n)$$

换句话说, 新矩阵 C 的元 C_{ik} 为 A 的第 i 行的元素与 B 的第 k 列的元素对应相乘后再相加。由此可见第一个矩阵 A 的

列数必需等于第二个矩阵 B 的行数，才能相乘。特别如 A 和 B 是同阶方阵，乘积 AB 是有意义的。

例 1 设 $A = (1 \quad -1 \quad 2)$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

则 A 与 B 是可乘的，且

$$\begin{aligned} AB &= (1 \quad -1 \quad 2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1 \times (-1) + (-1) \times 1 + 2 \times 2 \quad 1 \times 0 + (-1) \times 3 + 2 \times 1) \\ &= (2 \quad -1)。 \end{aligned}$$

即 AB 是 1×2 型矩，显然 BA 是没有意义的。

例 2 设有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

显然， AB 与 BA 均有意义，且

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

从上二例，我们可以看出下述二特点：

1° 一般来说, AB 与 BA 不一定都有意义, (如例 1) 即使二者均有意义, 但不一定相等 (如例 2)。这就表明矩阵乘法不满足交换律, 即 $AB \neq BA$ 。

这个特点是数的乘法所没有的，还有一个是数的乘法所没有的特点。

2° 我们知道二非零之数相乘, 其积必不为零。但在例 2 中, 二非零矩阵 A 和 B 的积 AB 是二阶零矩阵。

熟悉了矩阵乘法的概念后，把§1的方程组（1—1）改写成矩阵方程（1—1'），是十分自然的事。一般 n 个未知数 m 个方程的线性方程组

[illegible]

可改写成矩阵方程

$$AX=B, \quad (2-2)$$

其中