单复变函数

上海科学技术出版社

单复变函数

J·B·康威 著
吕以辇 张南岳 译
张顺燕 校

上海科学技术出版社

John B. Conway

Functions of

One Complex Variable

Springer-Verlag

New York Heidelberg Berlin

1978 2nd. Edition

单复变函数

J·B·康威 著

吕以辇 张南岳 译

张顺燕 校

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 江苏溧水印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 12.25 字数 821,000

1985年5月第1版 1985年5月第1次印刷

印数：1—10,000

统一书号：13119·1223 定价：3.00 元

序　　言

本书试图作为复变函数论的入门教程，供在数学上真正理解，并会熟练地运用 ε–δ 论证方法的学生使用. 阅读本书所需要的预备知识是很少的，它不会多于一本扎实严格的基础微积分教程的内容和关于偏导数的一些事实. 凡涉及到高等微积分的内容，本书都给出详细的证明(如积分号下求微商的 Leibniz 法则).

复变函数论中有些题材是与所有数学家有关的，它除了对于分析的其它一些分支有应用外，可以恰当地说，它还是许多数学领域(如同伦论，流形)中研究对象的来源之一. 把复分析看作是"数学入门"这种观点影响着我的写作和选材. 本书所遵循的另一个指导原则是：所有的定义，定理等等的叙述都应当是清晰，精确的. 我在给出各种证明时，考虑到了学生的实际情况，大部份是相当详细的，否则，就明确地告诉读者略去了什么，并要求读者作为习题补上这个空缺. 习题中有难有易，有的在于使读者巩固该节的概念，有的要求作推广，而其它一些指出某个理论在其它数学分支中的应用. (偶而，习题中使用一些没有事先给出定义的术语，如群、整环等.)

书中第一章到第五章以及第六章的 § 1, § 2 是基本内容，只有在略去其中的许多证明，才能在一学期内讲授完这些材料. 除了第六章 § 3 的开始关于凸函数的内容外，本书的其余部分与第六章的 § 3, § 4 无关.

书中第七章的内容在于引导学生把函数看作度量空间中的点. 这一章的前三节的结果重复地用于本书的其余部分. § 4, § 5 的意义自不待言. 此外，Weierstrass 因子分解定理对于第十一章是必要的. § 6 是因子分解定理的一个应用. 这一章的最后两节

对于本书的其它部分不是必需的，不过，它是经典数学的一部分，读者不应当完全忽视.

至于本书中其余各章的内容，都是独立的论题，它们的顺序是可以任意安排的.

Runge 定理对于函数代数的许多理论是有启发性的. 但是在第八章 § 1 中给出的证明涉及到“极点推移”(pole pushing) 的经典证法. § 2 应用 Runge 定理得到 Cauchy 定理的一个更一般的形式，对 § 2, § 3 的主要结果，尽管可以不看证明，但应当是必读的.

第九章研究解析开拓，并把解析流形和覆盖曲面介绍给读者. 可以把 § 1 到 § 3 看作是一个单元，而不需要看完整个第九章就将使读者对于解析开拓有一个了解.

第十章研究调和函数，包括 Dirichlet 问题的解和对 Green 函数的介绍. 如果能够把这些称为应用数学的话，那么它们就是应用数学中人人都应当知道的一部分.

书中最后两章虽然是相互独立的，但是可以把它们合成一章，叫做“整函数”. 不过，Hadamard 因子分解定理与 Picard 大定理看上去是很不相同的，值得各列一章. 另外，这两方面的结果也是互不依赖的.

应当指出的是，关于 Picard 定理可以采用另一种证法，这里给出的证明是初等的，而大部分别的书中的证明是用模函数给出的.

还有一些别的论题可以放到书本中. 下述内容的部分或全部可以考虑放进去：共形映照，圆内的函数，椭圆函数，Hilbert 空间的方法对于复变函数的应用. 但是总得在某个地方划一条线，所以这些论题就被忍痛割爱了. 希望研究这些材料或进一步研究本书所包含的论题的读者，参考本书末尾所列文献中为他们提供的许多适当入门书.

本书中使用的记号大部分是标准的，符号 ▌表示证明的结束. 当讨论到一个函数(而不是一条路径)时，拉丁字母表示定义域，希

腊字母表示值域.

本书是作者在 Indiana 大学执教过程中逐步写就的. 我要感谢该校数学系在我准备过程中所提供的资料方便. 特别要感谢我班上的学生, 事实上, 正是他们对我复分析课的反映促使我断然决定来写这本书. (下为誌谢部份, 译略.)

J. B. 康威

第二版序言

本书自出版后所获得的成功使我极为高兴．当本书的第二次印刷本即将售完时，Springer-Verlag 出版社要我为第三次印刷准备勘误表．在我谈到打算对本书作更多实质性的修改时，他们热忱表示欢迎．

这一版与第一版有四个主要的不同．首先，这一版中包括了 J. Dixon 的关于 Cauchy 定理的处理方法．这一方法的好处在于它可以给出一般形式的 Cauchy 定理一个简捷的证明．但是我很偏爱第一版中的同伦形式，所以仍在新版本中证明了这种形式的 Cauchy 定理．这种形式很有几何色彩并且十分便于应用，而且同伦的概念对于后面处理单值性定理也是需要的．因此，包含这种形式所得到的好处远远超过为讨论它而付出的代价．

其次，这一版中 Rungė 定理的证明是新的．这一证明是属于 S. Grabiner 的，而且没有用到"极点推移"法．在某种意义上说，"极点推移"法隐含在一致逼近的概念和来自 Banach 代数的某些思想之中．但是，应当强调的是，这个证明完全是初等的，它只依赖于本书所提供的材料．

第三，本版增加了附录 B．这个附录包含了一些文献资料和对进一步阅读的指南．

最后，现版本增加了若干习题．

其它地方也作了一些小的变动．数学界的几位同事给了我很大的帮助，他们提出了建设性的批评，并指出了印刷上的一些错误．（下为誌谢部份，译略．）

最后，我还要感谢 Springer-Verlag 出版社纽约分部的编辑人员，他们不仅出版了我的书，而且也出版了许多数学方面的好

书. 在当前压缩研究生入学人数，随之许多出版社不愿意出版高等教科书和专题著作之际，Springer-Verlag 出版社却为了传播数学方面的新进展，更加努力地为这个学科做出贡献。

J. B. 康威

目　录

第一章 复 数 系

§1. 实　　数

我们用$\mathbb{R}$表示所有实数组成的集．作者假定读者熟悉实数系及其性质，特别地，假定读者具备下面的知识：$\mathbb{R}$ 的序，上确界和下确界的定义和性质，以及 $\mathbb{R}$ 的完备性($\mathbb{R}$中的每一个有上界的集必有上确界)．我们也假定读者熟知 $\mathbb{R}$ 中的序列的收敛性与无穷级数．最后，一个人只有在单变量实函数方面有了坚实的基础之后，才可以着手学习复变函数．虽然在学习解析函数理论之前，传统上是先学习多变数实函数．但是对于本书来说，本质上这不是必要的条件，因为本书中任何地方都不需要这个领域里深入的结果．

§2. 复　数　域

我们把复数集 $\mathbb{C}$ 定义为所有有序数对(a, b)的集，其中 a, b 是实数．加法和乘法由下式定义：

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d),$$
$$(a, b)(c, d)=(ac-bd, bc+ad).$$

容易验证，这样定义后，$\mathbb{C}$ 满足域(field)的所有公理．这就是说，$\mathbb{C}$ 满足加法和乘法的结合律、交换律、分配律；$(0, 0)$和$(1, 0)$分别是加法和乘法的单位元素，并且 $\mathbb{C}$ 内的每一个非零元素有加法和乘法的逆元素．

对于复数$(a, 0)$，我们将写为 a．这个映照 $a\rightarrow(a, 0)$定义了一个 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{C}$ 的域同构，所以我们可以把 $\mathbb{R}$ 考虑为 $\mathbb{C}$ 的一个子集．如果令 $i=(0, 1)$，那么$(a, b)=a+ib$．从现在起，我们对复数就不再使用有序数对的记号了．

注意到 $i^2=-1$，所以方程 $z^2+1=0$ 在 $\mathbb{C}$ 内有根．事实上，对于 $\mathbb{C}$ 内的每个 z，$z^2+1=(z+i)(z-i)$．更一般地，如果 z 和 w 是复数，我们得到

$$z^2+w^2=(z+iw)(z-iw).$$

令 z 和 w 是实数 a 和 b(a 和 b 都不为 0)，我们得到

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right),$$

这样我们就有了一个复数的倒数的公式．

当我们写 $z=a+bi(a,\ b\in\mathbb{R})$ 时，我们称 a, b 为 z 的实部和虚部，并且用 $a=\operatorname{Re} z$, $b=\operatorname{Im} z$ 表示．

作为本节的结尾，我们在 $\mathbb{C}$ 内引进两个运算．这两个运算不是域的运算．如果 $z=x+iy(x,\ y\in\mathbb{R})$，那么我们定义 $|z|=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ 为 z 的绝对值，$\bar{z}=x-iy$ 为 z 的共轭数．注意：

2.1 $$|z|^2=z\bar{z}.$$

特别地，如果 $z\neq 0$，那么

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

下面是绝对值和共轭数的基本性质，其证明留给读者．

2.2 $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\qquad \operatorname{Im} z=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

2.3 $(\overline{z+w})=\bar{z}+\bar{w}$, $\qquad \overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$.

2.4 $$|zw|=|z|\,|w|.$$

2.5 $$|z/w|=|z|/|w|.$$

2.6 $$|\bar{z}|=|z|.$$

读者在证明后面三个式子时，应当尽量避免将 z 和 w 展开为它们的实部和虚部，而最好利用(2.1)，(2.2)和(2.3)．

习　　题

1．求下列各复数的实部和虚部：

$\frac{1}{z}$； $\frac{z-a}{z+a}(a\in\mathbb{R})$； z^3； $\frac{3+5i}{7i+1}$； $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$；

$\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$; i^n; $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$, $2\leqslant n\leqslant 8$.

2. 求下列各复数的绝对值和共轭数:

$-2+i$; -3; $(2+i)(4+3i)$; $\dfrac{3-i}{\sqrt{2}+3i}$; $\dfrac{i}{i+3}$; $(1+i)^6$; i^{17}.

3. 证明:当且仅当 $z=\bar{z}$ 时,z 才是实数.

4. 若 z 和 w 是复数,证明下列等式:

$$|z+w|^2=|z|^2+2\operatorname{Re} z\bar{w}+|w|^2,$$

$$|z-w|^2=|z|^2-2\operatorname{Re} z\bar{w}+|w|^2,$$

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2).$$

5. 设 $z=z_1+\cdots+z_n$, $w=w_1w_2\cdots w_n$. 利用归纳法证明:

$$|w|=|w_1|\cdots|w_n|;\quad \bar{z}=\bar{z}_1+\cdots+\bar{z}_n;\quad \bar{w}=\bar{w}_1\cdots\bar{w}_n.$$

6. 设 $R(z)$ 是 z 的有理函数,如果 $R(z)$ 的所有系数是实数,则 $\overline{R(z)}=R(\bar{z})$.

§3. 复 平 面

从复数的定义易见,$\mathbb{C}$ 中的每一点 z 都可以和平面 $\mathbb{R}^2$ 上唯一确定的点$(\operatorname{Re}z, \operatorname{Im}z)$相等同. 复数的加法恰好就是向量空间 $\mathbb{R}^2$ 的加法. 如果 z 和 w 是 $\mathbb{C}$ 中的点, 那么从 z 和 w 到 $0(=(0,0))$画两条直线,这两条直线形成了以 0、z、w 为三个顶点的平行四边形的两条边,平行四边形的第四个顶点就是 $z+w$.

注意,$|z-w|$ 恰好是 z 和 w 之间的距离,理会到这一点,上节习题 4 中的最后一个等式说的就是**平行四边形法则**:平行四边形各边长的平方和等于其对角线的平方和.

距离函数的基本性质是它满足三角不等式(见下一章). 在这种情况下,对复数 z_1, z_2, z_3, 这个不等式变为

$$|z_1-z_2|\leqslant|z_1-z_3|+|z_3-z_2|.$$

利用 $z_1-z_2=(z_1-z_3)+(z_3-z_2)$，容易看出，我们只需证明

3.1 $$|z+w|\leqslant|z|+|w|\quad(z,\ w\in\mathbb{C})$$

为了证明这个不等式，首先看出，对于 $\mathbb{C}$ 中的任意 z，

3.2 $$-|z|\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant|z|,$$
$$-|z|\leqslant\operatorname{Im}z\leqslant|z|.$$

因此，$\operatorname{Re}(z\bar{w})\leqslant|z\bar{w}|=|z||w|$。于是

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=|z|^2+2\operatorname{Re}(z\bar{w})+|w|^2\\&\leqslant|z|^2+2|z||w|+|w|^2=(|z|+|w|)^2,\end{aligned}$$

由此推出(3.1)。(这个式子称为三角不等式，因为如果我们把 z 和 w 表示在平面上，(3.1)式表明，三角形$[0,\ z,\ z+w]$的一边的长度小于另外两边长度的和．或者说两点间的最短距离是直线)．在遇到一个不等式时，人们总应当问一问等号成立的必要充分条件是什么，考察一个三角形并考虑到(3.1)的几何意义，我们就引出条件 $z=tw$，对某一$t\in\mathbb{R}$，$t\geqslant0$．(或者如果 $w=0$，则 $w=tz$)．显然，当这两点和原点共线时，等号成立．事实上，如果我们看一下(3.1)式的证明，便知道 $|z+w|=|z|+|w|$ 成立的必要充分条件是$|z\bar{w}|=\operatorname{Re}(z\bar{w})$．这等价于 $z\bar{w}\geqslant0$(即 $z\bar{w}$ 是非负实数)．如果 $w\neq0$，两边乘以 w/w，我们得到$|w|^2(z/w)\geqslant0$，令

$$t=z/w=\left(\frac{1}{|w|^2}\right)|w|^2(z/w),$$

那么 $z=tw$，$t\geqslant0$．

由归纳法，我们也有

3.3 $$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$$

不等式

3.4 $$\big||z|-|w|\big|\leqslant|z-w|$$

也是有用的．

既然我们给出了绝对值的几何解释，让我们再来看一看，平面上一点的共轭复数是什么．这是容易的，事实上，$\bar{z}$ 是 z 关于 x 轴(即实轴)的对称点．

习 题

1. 证明(3.4)并给出等号成立的必要充分条件.

2. 证明:(3.2)中的等号成立,当且仅当,对任意整数 k 和 l, $1\leqslant k,\ l\leqslant n$,只要 $z_l\neq 0$,就有 $z_k/z_l\geqslant 0$.

3. 设 $a\in\mathbb{R}$, $c>0$ 是固定的. 对于每个可能选取的 a 和 c,试描画出满足条件

$$|z-a|-|z+a|=2c$$

的点集. 现在设 a 是任意复数,利用平面的旋转画出满足上述方程的点的轨迹.

§4. 复数的极坐标表示与复数的方根

考虑复平面 $\mathbb{C}$ 的点 $z=x+iy$. 这个点有极坐标 $(r,\ \theta)$: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. 显然 $r=|z|$, θ是正实轴与从 0 到 z 的直线段的夹角. 注意,在上述等式中的 θ 可以代之以 θ 加上 2π 的任意整数倍,角 θ 称为 z 的幅角,记为 $\theta=\arg z$. 由于 θ 的不确定性,“arg”不是一个函数. 我们引进记号

4.1 $$\operatorname{cis}\theta=\cos\theta+i\sin\theta.$$

设 $z_1=r_1\operatorname{cis}\theta_1$, $z_2=r_2\operatorname{cis}\theta_2$, 那么

$$z_1z_2=r_1r_2\operatorname{cis}\theta_1\operatorname{cis}\theta_2=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1)].$$

由正弦和余弦的和角公式,我们得到

4.2 $$z_1z_2=r_1r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2).$$

换句话说 $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$(什么实函数把乘积变为和?). 由归纳法,对于 $z_k=r_k\operatorname{cis}\theta_k$, $1\leqslant k\leqslant n$, 我们有

4.3 $$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n\operatorname{cis}(\theta_1+\cdots+\theta_n).$$

特别地,对于每个整数 $n\geqslant 0$, 有

4.4 $$z^n=r^n\operatorname{cis}(n\theta).$$

进而若 $z\neq 0$, 则 $z[r^{-1}\operatorname{cis}(-\theta)]=1$; 所以如果 $z\neq 0$, 那么对于一切

整数 n，正的、负的、或 0，(4.4) 也成立。作为 (4.4) 的一个特别情形，我们得到 de Moivre 公式：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

现在我们可以来考虑下面的问题了。对于给定的一个复数 $a\neq 0$，和一个整数 $n\geqslant 2$，你能否找到满足 $z^n=a$ 的数 z？这样的 z 你能找到多少个？由于 (4.4) 式，解答这个问题是容易的。设 $a=|a|\operatorname{cis}\alpha$；由 (4.4)，$z=|a|^{\frac{1}{n}}\operatorname{cis}(\alpha/n)$ 就满足要求。但是这个解不是唯一解，因为 $z'=|a|^{\frac{1}{n}}\operatorname{cis}\frac{1}{n}(\alpha+2\pi)$ 也满足 $(z')^n=a$。事实上，每一个数

$$\textbf{4.5}\qquad |a|^{\frac{1}{n}}\operatorname{cis}\frac{1}{n}(\alpha+2\pi k),\quad 0\leqslant k\leqslant n-1.$$

都是 a 的 n 次方根。借助 (4.4) 我们得到下述结果：对于 $\mathbb{C}$ 中的每一个不等于零的数 a，都有 a 的 n 个不同的 n 次方根，它们由公式 (4.5) 给出。

例子 计算 n 次单位根。由于 $1=\operatorname{cis}0$，(4.5) 式给出如下这些根：

$$1,\ \operatorname{cis}\frac{2\pi}{n},\ \operatorname{cis}\frac{4\pi}{n},\ \cdots,\ \operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}(n-1).$$

特别地，立方单位根是

$$1,\ \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}).$$

习 题

1. 求出 6 次单位根。

2. 计算：(a) i 的平方根；(b) i 的立方根；(c) $\sqrt{3}+3i$ 的平方根。

3. n 次单位原根是一复数 a，使得 $1, a, a^2, \cdots, a^{n-1}$ 是 n 个不同的 n 次单位根。证明：如果 a, b 分别是 n 次和 m 次单位原根，则 ab 是 k 次单位根，k 是某一整数。k 的最小值是什么？如果 a，b 是非单位原根，你能说些什么？