刘桂林 主编

分析力学范例与习题

北京理工大学出版社

分析力学范例与习题

刘桂林　主编

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书包括分析力学的基本概念，虚位移原理与分析静力学，达朗伯原理与动力学普遍方程，拉格朗日方程，拉格朗日方程的应用，尼尔森方程，哈密顿方程及其积分方法，力学的变分原理，非完整系统力学初步等九章的基本理论与公式、范例和习题。

本书可作为高等院校力学专业大学生和研究生的教学参考书，也可作为高等院校力学、数学、物理教师和有关科技人员的参考书。

分析力学范例与习题

刘桂林 主编

*

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

通县向阳印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 16.5印张 367千字

1988年12月第一版 1988年12月第一次印刷

ISBN 7-81013-062-5/O·10

印数：1-4000册 定价：3.25元

前 言

为了配合理工科大学生和研究生分析力学课程的教学需要，我们编写了这本《分析力学范例与习题》。本书各章与梅凤翔、刘桂林编著的《分析力学基础》(西安交通大学出版社，1987年)相一致。每章都分成基本理论与公式，范例和习题等三部分。通过“基本理论与公式”可以回忆和掌握分析力学的主要内容，通过“范例”可以了解分析力学解题的思路、方法和技巧，通过“习题”的演算可以加强和提高独立解题的能力。本书收入153个范例和600个习题。

本书由北京工业学院分析力学教研室刘桂林(第二、四、六、八章)、袁士杰(第三、四章)、吕哲勤(第一、二章)、梅凤翔(第五、七、九章)编写。全书由刘桂林统一修改定稿，刘伯勋副教授审阅。

限于编者水平，书中难免有疏漏之处，希望广大读者批评指正。

编者

1987年8月

目　录

第一章　分析力学的基本概念

一、基本理论与公式

1.约束、约束的分类

（1）约束——加在系统质点几何位置和运动速度上的限制条件。

用数学方法描述约束特性的表达式称为约束方程。

（2）约束的分类

1°单面约束与双面约束

单面约束(非固执约束)——用不等号表示的约束方程。

双面约束(固执约束)——用等号表示的约束方程。

2°完整约束与非完整约束

完整约束——约束方程中含有质点的坐标(x_i, y_i, z_i)和时间t，如$f(x_i, y_i, z_i, t)=0$。

非完整约束——约束方程中除含有质点的坐标x_i，y_i，z_i和时间t外，还含有坐标对时间t的导数$\dot{x}_i$、$\dot{y}_i$、$\dot{z}_i$，如$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t)=0$。

半完整约束——约束方程在形式上与非完整约束相同，但通过积分可以变成完整约束的形式。如

$$A(x, y, z)\dot{x}+B(x, y, z)\dot{y}+C(x, y, z)\dot{z}=0 \tag{1-1}$$

可积的充分必要条件是

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)=0 \tag{1-2}$$

充分条件是

$$\frac{\partial B}{\partial z}=\frac{\partial C}{\partial y},\ \frac{\partial C}{\partial x}=\frac{\partial A}{\partial z},\ \frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x} \tag{1-3}$$

3°定常约束与非定常约束

定常约束(稳定约束)——约束方程中不显含时间t。

非定常约束(不稳定约束)——约束方程中显含时间t。

4°非完整约束中有一阶和高阶之分。

2.广义坐标

(1) 广义坐标——确定质点系统位置的独立变量。通常以q_1，…，q_n表示。质点的直角坐标x_i，y_i，z_i可表示为

$$\begin{aligned} x_i&=x_i(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ t)\\ y_i&=y_i(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ t) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \quad (1-4)\\ z_i&=z_i(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ t)\end{aligned}$$

(2) 广义速度——广义坐标对时间t的导数$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_n$。

$\boldsymbol{r}_i$——质点M_i的矢径

$\boldsymbol{V}_i$——质点M_i的速度

$$\boldsymbol{V}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

或
$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial x_i}{\partial t} \\ \dot{y}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial y_i}{\partial t} \\ \dot{z}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial z_i}{\partial t} \end{cases} \tag{1-5}$$

(3) 广义加速度——广义坐标对时间t的 二 次 导数 $\ddot{q}_1$， $\ddot{q}_2$， … $\ddot{q}_n$。

质点的加速度

$$\boldsymbol{a}_i = \dot{\boldsymbol{V}}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \ddot{q}_s + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k \partial q_s}$$

$$\dot{q}_k \dot{q}_s + 2 \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial t} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t^2}$$

或

$$a_x = \ddot{x}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \ddot{q}_s + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_s}$$

$$\times \dot{q}_k \dot{q}_s + 2 \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial t} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}$$

$$a_y = \ddot{y}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \ddot{q}_s + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_k \partial q_s}$$

$$\times \dot{q}_k \dot{q}_s + 2 \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s \partial t} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}$$

$$a_z=\ddot{z}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 z_i}{\partial q_k 2q_s}$$

$$\times\dot{q}_k\dot{q}_s+2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s\partial t}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{1-6}$$

(4) 约束方程在广义坐标和广义速度下的表达式

1°非完整约束

$$\varphi_\beta(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \cdots,\ \dot{q}_n,\ t)=0$$
$$(\beta=1,\ 2,\ \cdots,\ g) \tag{1-7}$$

2°线性非完整约束

$$\sum_{s=1}^{n}A_{\beta s}\dot{q}_s+A_\beta=0 \tag{1-8}$$

式中$A_{\beta s}$，A_β是q_1，…，q_n和t的函数。

3.虚位移、自由度

(1) 虚位移——质点系在该位置为约束所容许的假想的无限小位移。以δ_{x_i}，δ_{y_i}，δ_{z_i}表示系中M_i点虚位移。

(2) 在完整定常约束下，实位移是虚位移中的一个。在非定常约束下，实位移不一定是虚位移中的一个。

如虚位移加在完整非定常约束$F_\alpha(x_i,\ y_i,\ z_i,\ t)=0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$上的条件为

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0$$

实位移加在完整非定常约束$F_\alpha(x_i,\ y_i,\ z_i,\ t)=0$

($i=1, 2, \cdots, N$; $\alpha=1, 2, \cdots, l$)上的条件为

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}dz_i\right)+\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}dt=0$$

在约束定常情况下，$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}=0$，实位移是虚位移中的一个。

(3) 线性非完整约束加在虚位移上的条件

$$\sum_{s=1}^{n}A_{\beta s}\delta q_s=0 \tag{1-9}$$

(4) 自由度——系统广义坐标的独立变分数目。

对于完整系统，自由度数目等于独立坐标的数目。

对于非完整系统，自由度数目等于独立坐标的数目减去非完整约束方程的数目。

4.约束反力、理想约束

(1) 约束反力——约束作用于系统质点上的力。

(2) 理想约束——约束反力在系统质点虚位移上作的虚功之和等于零，称为理想约束，其数学表达式为

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{1-10}$$

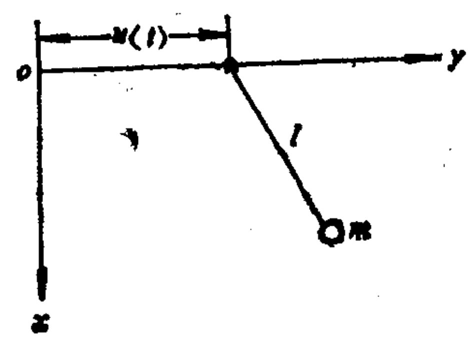
或

$$\sum_{i=1}^{N}(R_{ix}\delta x_i+R_{iy}\delta y_i+R_{iz}\delta z_i)=0 \tag{1-11}$$

式中$\boldsymbol{R}_i$表示约束作用在系统质点M_i上的力。

二、范　例

例1-1　一单摆由质量为m，长为l的轻杆组成，悬挂点以$y=u(t)$运动(如图1-1)。试列写问题的约束方程，并说明约束是完整的还是非完整的，是定常的还是非定常的，是双面的还是单面的？



例1-1图

［解］　设摆的坐标为(x_m, y_m)，则约束方程为

$$x_m^2+(y_m-u(t))^2=l^2$$

或

$$x_m^2+y_m^2-2y_m u(t)=l^2-u^2(t)$$

约束是完整的、非定常的、双面的。

例1-2　试证明约束$\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta=0$是非完整的。

［解］　令$\theta=z$，对比(1-1)式知

$$A=\sin z,\ B=-\cos z,\ C=0$$

求偏导数，得

$$\frac{\partial A}{\partial z}=\cos z,\ \frac{\partial A}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}=0\quad,\ \frac{\partial B}{\partial z}=\sin z$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}=0\quad,\ \frac{\partial C}{\partial y}=0$$

于是

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)$$

$$=\sin^2 z+\cos^2 z=1$$

故约束是非完整的

例1-3 验证约束 $\dot{x}(x^2+y^2+z^2)+2(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})=0$ 不满足条件(1-3)，但却是可积的。

[解] 原式$=(x^2+y^2+z^2+2x)\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z}=0$

对比(1-1)式，知

$$A=x^2+y^2+z^2+2x,\ B=2y,\ C=2z$$

求偏导数，有

$$\frac{\partial A}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial A}{\partial z}=2z$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial B}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial C}{\partial y}=0$$

可见

$$\frac{\partial A}{\partial y}\neq\frac{\partial B}{\partial x},\ \frac{\partial A}{\partial z}\neq\frac{\partial C}{\partial x}$$

即不满足条件(1-3)。实际上，原式可改写为

$$(x^2+y^2+z^2)dx+d(x^2+y^2+z^2)=0$$

或

$$dx+\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}=0$$

积分得

$$e^x(x^2+y^2+z^2)=C$$

其中C为积分常数。

例1-4 试用旋转抛物面坐标ξ，η，φ：$x=\xi\eta\cos\varphi$，$y=\xi\eta\sin\varphi$，$z=(\xi^2-\eta^2)/2$及其对时间的导数表示点的速度$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$和加速度$\ddot{x}$，$\ddot{y}$，$\ddot{z}$。

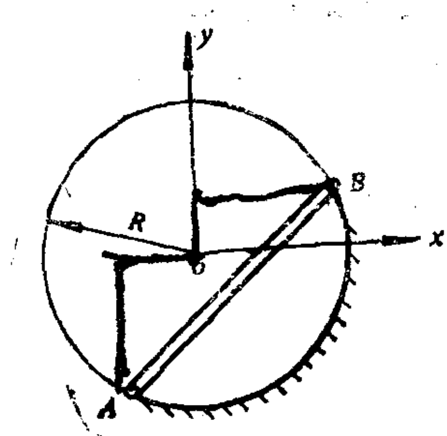
[解]　由$x=\xi\eta\cos\varphi$，$y=\xi\eta\sin\varphi$，$z=(\xi^2-\eta^2)/2$对时间t求导数一次，得速度分量

$$\begin{cases}\dot{x}=\dot{\xi}\eta\cos\varphi+\xi\dot{\eta}\cos\varphi-\xi\eta\dot{\varphi}\sin\varphi\\ \dot{y}=\dot{\xi}\eta\sin\varphi+\xi\dot{\eta}\sin\varphi+\xi\eta\dot{\varphi}\cos\varphi\\ \dot{z}=\xi\dot{\xi}-\eta\dot{\eta}\end{cases}$$

再由速度分量对时间t求导一次，得加速度分量

$$\begin{cases}\ddot{x}=\ddot{\xi}\eta\cos\varphi+\xi\ddot{\eta}\cos\varphi-\xi\eta\ddot{\varphi}\sin\varphi-2\xi\dot{\eta}\dot{\varphi}\sin\varphi\\ \qquad -\xi\eta\dot{\varphi}^2\cos\varphi+2\dot{\xi}\dot{\eta}\cos\varphi-2\eta\dot{\xi}\dot{\varphi}\sin\varphi\\ \ddot{y}=\ddot{\xi}\eta\sin\varphi+\xi\ddot{\eta}\sin\varphi+\xi\eta\ddot{\varphi}\cos\varphi+2\xi\dot{\eta}\dot{\varphi}\cos\varphi\\ \qquad -\xi\eta\dot{\varphi}^2\sin\varphi+2\dot{\xi}\dot{\eta}\sin\varphi+2\eta\dot{\xi}\dot{\varphi}\cos\varphi\\ \ddot{z}=\dot{\xi}^2+\xi\ddot{\xi}-\dot{\eta}^2-\eta\ddot{\eta}\end{cases}$$

例1-5　一长为l的杆子两端在半径为R的铅垂固定圆环上运动，试列写杆子的约束方程、虚位移方程，并指出系统的自由度数目。



例1-5图

[解]　设杆AB两端坐标为(x_A, y_A)，(x_B, y_B)。

约束方程有三个：

$$x_A^2+y_A^2=R^2$$

$$x_B^2+y_B^2=R^2$$

$$(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=l^2$$

虚位移方程为

$$x_A\delta x_A+y_A\delta y_A=0$$

$$x_B\delta x_B+y_B\delta y_B=0$$

$$(x_A-x_B)(\delta x_A-\delta x_B)+(y_A-y_B)$$
$$(\delta y_A-\delta y_B)=0$$

自由度数目$=2\times2-3=1$。

例1-6 一质点沿平面xoy运动，运动轨迹的斜率与时间t成正比，比例系数为1。试列写质点运动的约束方程，并说明实位移处于虚位移之中。

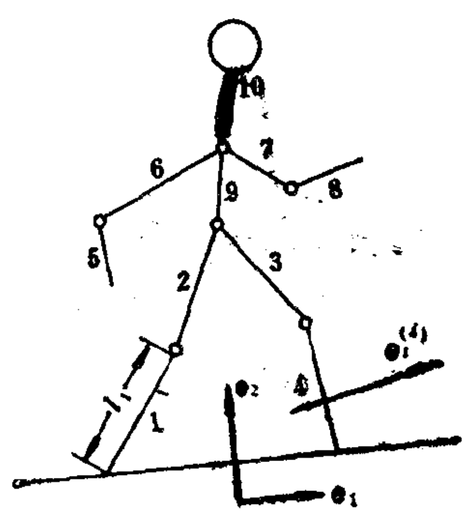
［解］ 质点的约束方程

$$\dot{y}=t\dot{x} \quad 或 \quad dy=tdx \tag{1}$$

虚位移方程为

$$\delta y=t\delta x \tag{2}$$

由方程(1)、(2)可见，实位移处于虚位移之中。



例1-7图

例1-7 一人体模型由十个刚体组成：头、身，四肢(上、下臂，大、小腿)。设各个部位在铅垂平面内运动，且两脚停在地上，前、后脚距离保持为常值l。设各部位长l_i，今用水平固定方向单位矢量e_1与第i个刚体法线方向$e_1^{(i)}$的夹角φ_i($i=1$，2，…，10)确定系统的位置。试写出约束方程并说明系统的自由度数目(这是一个典型的

一般链式系统的例子)。

[解] 两只腿不离开地面，可视作铰链。人体模型由十个刚体组成，需用十个坐标φ_i($i=1, 2, \cdots, 10$)确定其位置。但φ_1，φ_2，φ_3，φ_4间存在两个约束方程

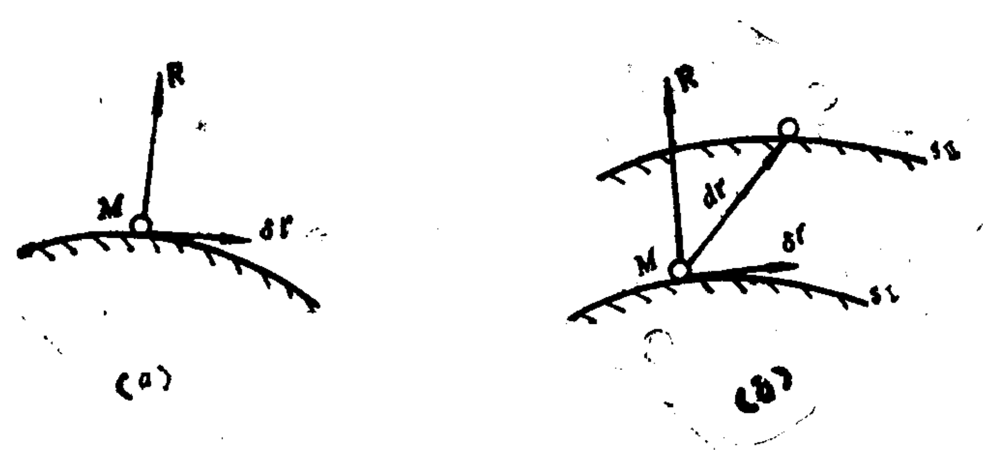
$$l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2+l_3\cos\varphi_3+l_4\cos\varphi_4=l$$

$$l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2-l_3\sin\varphi_3-l_4\sin\varphi_4=0$$

故系统自由度数目$=10-2=8$。

例1-8 约束反力不作功的约束是理想约束这句话是否确切?为什么?

[解] 这句话不确切。因为没有明确指出约束反力在何种位移上不作功。理想约束是指约束反力在系统的点的虚位移上作的虚功之和等于零。只要约束反力在虚位移上不作功或作的虚功之和等于零，这样的约束才称为理想约束。例如质点M在光滑曲面上运动[图1-8(a)(b)]。



例1-8图

1.曲面是固定的。约束反力$\boldsymbol{R}$沿曲面在该点的法线方向，与质点M的虚位移$\delta\boldsymbol{r}$相垂直(即$\boldsymbol{R}\perp\delta\boldsymbol{r}$)。因此，约束反力$\boldsymbol{R}$在虚位移$\delta\boldsymbol{r}$上作功为零。

2.曲面是运动的(或变形的)。约束反力$\boldsymbol{R}$沿曲面S_I在该

点的法线方向，与质点M的虚位移$\delta\boldsymbol{r}$仍相垂直（即$\boldsymbol{R}\perp\delta\boldsymbol{r}$），但不与实位移$d\boldsymbol{r}$相垂直。因此，约束反力$\boldsymbol{R}$在虚位移$\delta\boldsymbol{r}$上作功为零，而在实位移$d\boldsymbol{r}$上作功不为零。

由此例可以看出，只要约束反力在虚位移上作功为零，虽然它在实位移作功不为零，但仍属于理想约束。

三、习　题

1-1　一柔软不可伸长的线，一端固定，另一端栓一小球。小球所受约束是单面的还是双面的？试写出约束方程。

答：单面约束。

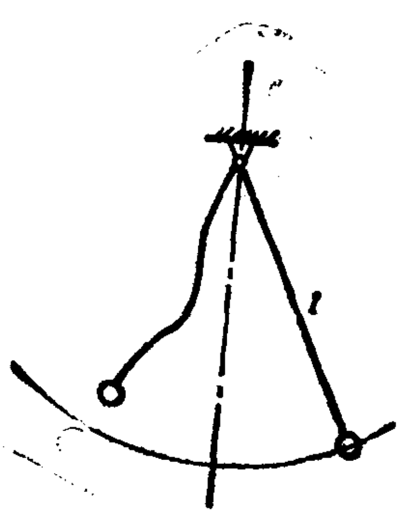
约束方程为

$$x^2+y^2+z^2\leqslant l^2$$

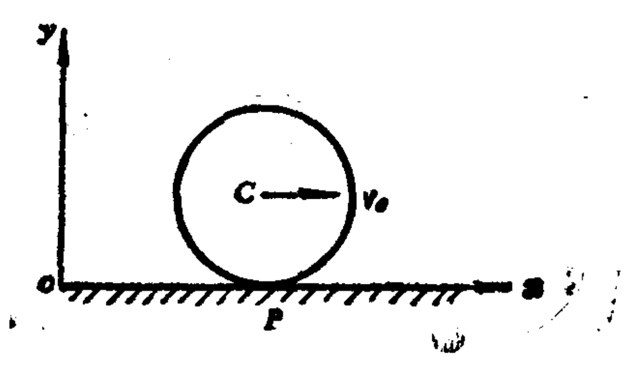
1-2　一半径为r的圆盘在铅垂平面内沿直线作纯滚动。这约束是完整的还是非完整的？试写出约束方程。

答：完整约束。约束方程为$x_c=r\theta$。

1-3　质量为m_1，m_2的两物体用长为l的不可伸长的轻



题1-1图



题1-2图