



面向 21 世纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

动 力 学 (I)

谢传锋 主编
王 琪 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

动
力
学

(I)
谢
传
锋
主
编

王
琪
编

高
等
教
育
出
版
社

面向 21 世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

动力学 (I)

谢传锋 主编
王琪 编

1040/20



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

动力学(I)/谢传锋主编;王琪编. -北京:高等教育出版社,1999

面向21世纪课程教材

ISBN 7-04-007475-3

I. 动… II. ①谢… ②王… III. 动力学-高等学校-教材
IV. 0313

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第30265号

动力学(I)
谢传锋 主编

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街55号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 中国科学院印刷厂

纸张供应 山东高唐纸业集团总公司

开 本 787×960 1/16

版 次 1999年9月第1版

印 张 9

印 次 1999年9月第1次印刷

字 数 160 000

定 价 10.10元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究



内 容 提 要

北京航空航天大学谢传锋教授主编的《静力学》、《动力学(I)》、《动力学(II)》和单辉祖教授编著的《材料力学(I)》、《材料力学(II)》,是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材和教育部工科力学“九五”规划教材,其中,《静力学》、《材料力学(I)》和《材料力学(II)》也是普通高等教育“九五”国家级重点教材。

《静力学》包括几何静力学与分析静力学;《动力学(I)》包括原理论力学课程中的运动学与动力学的基础部分;《动力学(II)》包括原理论力学中的专题部分,以及机械振动基础和流体力学基础;《材料力学(I)》包括材料力学的基础部分,涉及杆件变形的基本形式与组合形式,涵盖强度、刚度与稳定性问题;《材料力学(II)》包括材料力学的加深与扩展部分。

本教材在妥善处理传统内容的继承、现代科技成果的引进以及知识的传授和能力、素质的培养方面,进行了积极探索,是一套面向 21 世纪的具有新内容、新体系、论述严谨,重视基础与工程应用(包括计算机的应用),重视能力培养的新教材。教材体现了模块式的特点,通过对模块的选择与组合,可同时满足不同层次工科院校的不同专业对基础力学课程的教学要求。

本书为《动力学(I)》,内容包括质点动力学、质点系动力学、刚体动力学(一)、动静法等四章。

本书可作为不同层次高等学校工科本科各专业的教材,也可供高等学校工程专科、高等职业大学师生及有关工程技术人员参考。

序 言

本教材是作者参加教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”项目中“力学系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践”的研究成果之一。

高新科学技术的迅速发展和我国的社会主义市场经济对高等工科院校人才培养提出了更高更新的要求,原有高等工科院校的力学课程存在不少问题,需要对课程的教学内容和课程体系进行系列改革。通过研究与实践,我们在改革中采用了模块式设课的形式,将高等工科院校的力学课程设置为八个模块:静力学、动力学(I)、动力学(II)、材料力学(I)、材料力学(II)、流体力学基础、弹性力学和工程力学实验,编写了新的教材,供不同层次高等工科院校的各类专业组合使用。

编者在编写本教材时力求贯彻以下意图:

1. 充分体现模块式设课的教材特点,使本教材既能单独使用,又能与其它教材模块组合使用,以满足不同层次高等工科院校各类专业人才培养的需要和教学的灵活安排。

2. 通过改变原理论力学课程的内容体系,将运动学与动力学结合在一起,使结构紧凑,有利于教学。

3. 在一些内容中应用计算机数值仿真进行结果分析,拓宽学生分析问题的思路,了解计算技术在力学中的应用,提高分析与解决问题的能力。

4. 根据工科专业的实际需要,增加了弹性体的振动、非线性振动概念和流体力学基础等新内容。

5. 根据人才培养的需要,调整课程教学内容的重点,由过分强调学科理论系统,转向更重视基础、应用、能力和素质的综合培养。

6. 充分利用前修课程的基础,提高教材的起点,减少课程间内容的重复,减少教材的篇幅,适应课程学时减少的需要。

本教材第一、二、三、四章由王琪编写,第五、七章由程耀编写,第六章由王士敏编写,第八章由金俐编写,谢传锋任主编。本教材初稿完成后,曾在北京航空航天大学部分本科生中试用。

本教材初稿承蒙北京理工大学梅凤翔教授、上海交通大学刘延柱教授、东南大学诸关炯教授详细审阅,他们提出了许多宝贵意见,作者谨致深切的感谢。

本教材编写中得到北京市教委的支持和资助,特此致谢。

由于水平有限,教材中不妥之处请读者指正。

编者

1999年2月于北京航空航天大学

责任编辑	黄 毅
封面设计	张 楠
责任绘图	朱 静
版式设计	马静如
责任校对	陈 荣
责任印制	宋克学

动力学(I)目录

动力学绪论	1
第一章 质点动力学	2
§ 1-1 点的运动学	2
§ 1-2 质点运动微分方程	11
§ 1-3 点的复合运动	17
§ 1-4 质点相对运动动力学基本方程	31
习题	38
第二章 质点系动力学	44
§ 2-1 动量定理	44
§ 2-2 动量矩定理	51
§ 2-3 动能定理	58
习题	65
第三章 刚体动力学(一)	70
§ 3-1 刚体平面运动的运动学	70
§ 3-2 刚体定轴转动与平面运动微分方程	81
§ 3-3 碰撞	90
习题	96
第四章 动静法	104
§ 4-1 达朗贝尔原理 动静法	104
§ 4-2 刚体惯性力系的简化	107
§ 4-3 定轴转动刚体轴承动反力 静平衡与动平衡	112
习题	117
附录 A 均质物体的转动惯量	121
参考文献	123
习题答案	124
索引	129
Synopsis	131
Contents	132
主编简介	134

动力学绪论

动力学研究作用于物体的力和物体机械运动之间的一般关系。在现代工业和科学技术迅速发展的今天,动力学有着广泛的应用前景,如高速运转的机械、高速车辆、机器人、航空、航天等领域,都需要应用动力学的理论。

从研究对象来看,动力学可分为质点动力学和质点系(包括刚体)动力学两部分,前者是后者的基础。

牛顿三定律是质点动力学的基础,也是整个动力学的理论基础,在物理学中已经作过详细介绍,这里简述如下:

第一定律:不受力作用的质点,将保持静止或作匀速直线运动。

不受力作用的质点(包括受平衡力系作用的质点)保持其运动状态不变的性质称为惯性。第一定律也称为惯性定律,匀速直线运动也称为惯性运动。

第二定律:质点动量对时间的一阶导数等于作用在质点上的力。即

$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{F}$$

当质点的质量为常量时,牛顿第二定律可表示为

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

如果有一个力系($\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \dots, \boldsymbol{F}_n$)作用在质点上,牛顿第二定律可表示为

$$m\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}_i$$

第三定律:两个物体之间的作用力和反作用力分别作用在两个不同的物体上,沿同一作用线,方向相反。

第一定律不仅是第二定律的特殊情况,更重要的是,第一定律是第二定律所不可缺少的前提,因为第一定律为整个力学体系选定了一类特殊的参考系——惯性参考系(不受外力作用的质点在其中保持静止或匀速直线运动的参考系)。牛顿第三定律,无论在静力学还是动力学的问题中,都是适用的,它与参考系的选取无关。

第一章 质点动力学

质点动力学研究作用于质点上的力和质点运动之间的一般关系。由于运动学是动力学的预备知识,在讲述质点动力学时,先介绍点的运动学。

§ 1-1 点的运动学

运动学只研究如何描述物体的运动,不考虑产生运动的原因。描述物体的运动就是描述物体的位置随时间的变化,为此,必须选取另一个物体作为参考,被选作参考的物体称为**参考体**,与参考体固连的坐标系称为**参考坐标系**,简称**参考系**。参考体总是一个大小有限的物体,而参考系应理解为与参考体固连的整个空间(一个理论上抽象的三维空间)。比如,可以选用地球作为参考体,研究距离地球很远的一个行星的运动,在那里,地球这个“实体”是达不到的,而作为参考系却可以延伸过去。

点的运动学是质点动力学的预备知识,又是研究一般物体运动的基础。本节将研究点相对某一参考系的几何位置随时间的变化规律。在同一参考体上,可以选取不同的坐标系(如直角坐标系、极坐标系等)来描述点的运动规律,但在讨论一般的理论问题时,我们总是希望所得的结果不依赖于坐标系的选择,也就是说所得的结果对于各种不同的坐标系都能适应。为此通常都选用矢量表示各种量之间的关系,在求解具体问题时,再选用合适的坐标系。选用矢量研究点的运动称为**矢量法**,选用其它坐标系研究点的运动的方法还有直角坐标法和自然坐标法等。

一、矢量法

M 点相对某一参考系的位置可确定如下。在参考系中选取一固定点 O ,由 O 向点 M 作一矢量 \boldsymbol{r} , \boldsymbol{r} 称为 M 点相对于 O 的**矢径**(图 1-1)。 M 点在空间的位置随时间连续地变化,相应地 \boldsymbol{r} 就是一个时间 t 的连续的矢量函数,写成

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \quad (1-1)$$

给定瞬时 t ,则可通过式(1-1)得到相应的矢径 \boldsymbol{r} ,从而确定了该瞬时点在空间的位置。这个可确定任

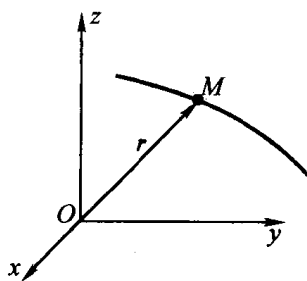


图 1-1

一瞬时点在空间位置的方程称为 M 点的矢量形式运动方程。点 M 运动时, 矢径 $\boldsymbol{r}(t)$ 的端点在空间划出一条曲线, 称为矢径端图, 它就是动点 M 的运动轨迹。

点的速度等于矢径 \boldsymbol{r} 对时间的一阶导数, 即

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \quad (1-2)$$

速度 \boldsymbol{v} 是矢量, 其方向沿轨迹上 M 点的切线, 并指向 M 点的运动方向, 速度的大小, 即速度的模, 表示点运动的快慢。

点的加速度等于速度 \boldsymbol{v} 对时间的一阶导数, 也等于矢径 \boldsymbol{r} 对时间的二阶导数, 即

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \quad (1-3)$$

加速度 \boldsymbol{a} 也是一个矢量, 它表示了速度(大小和方向)随时间的变化率。有时为了方便, 在字母上方加“ $\dot{}$ ”表示该量对时间的一阶导数, 加“ $\ddot{}$ ”表示该量对时间的二阶导数。因此, 式(1-2)、式(1-3)可表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \dot{\boldsymbol{r}} \\ \boldsymbol{a} &= \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} \end{aligned}$$

式(1-2)和(1-3)是矢径、速度和加速度三者的矢量关系式。在解决具体问题时, 必须选用合适的坐标系。最常用的坐标系是直角坐标系, 即正交的笛卡儿坐标系。

二、直角坐标法

在参考体上固连一个直角坐标系 $Oxyz$, 如图 1-1 所示, 其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是三根轴的单位矢量, 在力学中通常取右手坐标系, 即 $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$ 。在直角坐标系中, 矢径 \boldsymbol{r} 和 M 点在坐标系中的坐标 (x, y, z) 的关系是

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \quad (1-4)$$

因此, 运动方程(1-1)在直角坐标系中可用方程组表示为

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

该式称为 M 点的直角坐标形式运动方程, 把 t 看成参数, 那么这一组方程就是轨迹的参数方程。

将式(1-4)代入到式(1-2), 由于 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是大小和方向都不变的单位矢量, 因此有

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} \quad (1-6)$$

设 M 点的速度 \boldsymbol{v} 在直角坐标轴上的投影为 v_x, v_y, v_z , 即

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k} \quad (1-7)$$

比较式(1-6)和(1-7), 可得到

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \dot{x} \\ v_y &= \dot{y} \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

由此可知, 点的速度在坐标轴上的投影等于点的坐标对时间的一阶导数。由式(1-8)求得 v_x, v_y, v_z 后, 速度 \boldsymbol{v} 的大小和方向就可由这三个投影完全确定, 即

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1-9)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}) &= \frac{v_x}{v} \\ \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{j}) &= \frac{v_y}{v} \\ \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}) &= \frac{v_z}{v} \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

设 M 点的加速度 \boldsymbol{a} 在直角坐标轴上的投影分别为 a_x, a_y, a_z , 即

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} \quad (1-11)$$

同理可得

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

由此可知, 点的加速度在坐标轴上的投影等于点的坐标对时间的二阶导数。由式(1-12)求得 a_x, a_y, a_z 后, 加速度 \boldsymbol{a} 的大小和方向同样可由这三个投影完全确定, 即

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1-13)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}) &= \frac{a_x}{a} \\ \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) &= \frac{a_y}{a} \\ \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}) &= \frac{a_z}{a} \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

若 M 点作平面曲线运动, 并选此平面为 Oxy 平面, 则 M 点的运动方程、速度、加速度的表达式相应地只有轴 x, y 上的两个投影。

例 1-1 曲柄连杆机构如图 1-2 所示, 曲柄 OA 绕固定轴 O 转动, 连杆 AB 分别与曲柄 OA 和滑块 B 铰接。设 $OA = R, AB = L, \theta = \omega t$ 。试求连杆 AB 上 P 点 ($AP = l$) 的运动方程, 分析其运动轨迹, 并求滑块 B 的速度和加速度。

解: 1. 列运动方程

点的运动可用直角坐标来描述, 选取一直角坐标系 Oxy , 根据几何关系可知:

$$\left. \begin{aligned} x_P &= R \cos \theta + l \cos \varphi \\ y_P &= (L - l) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

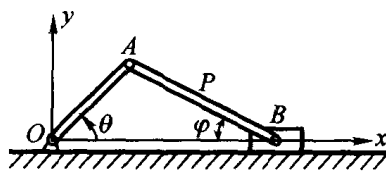


图 1-2

式中, θ 和 φ 均为时间 t 的函数, 由三角形的几何关系可知

$$\frac{R}{\sin \varphi} = \frac{L}{\sin \theta} \quad (b)$$

由式(b)可求出

$$\sin \varphi = \frac{R}{L} \sin \theta, \quad \cos \varphi = \frac{1}{L} \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta}$$

将上式代入式(a), 可得 P 点的运动方程

$$\left. \begin{aligned} x_P &= R \cos \theta + \frac{l}{L} \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta} \\ y_P &= (L - l) \frac{R}{L} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

从式(c)中不易分析出 P 点的运动轨迹, 首先分析几种特殊情况。

(1) 当 $l = 0$ 时, 即 P 点与 A 点重合, 其运动方程为

$$\begin{cases} x_P = R \cos \theta \\ y_P = R \sin \theta \end{cases}$$

运动轨迹为圆:

$$x_P^2 + y_P^2 = R^2$$

(2) 当 $l = L$ 时, 即 P 点与 B 点重合, 其运动方程为

$$\begin{cases} x_P = R \cos \theta + \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta} \\ y_P = 0 \end{cases}$$

运动轨迹为直线:

$$y_P = 0$$

(3) 当 $R = L, 0 < l < L$ 时, 即曲柄和连杆等长, 连杆 AB 上任一点的运动方程为

$$\begin{cases} x_P = (R + l) \cos \theta \\ y_P = (R - l) \sin \theta \end{cases}$$

其运动轨迹为椭圆:

$$\left(\frac{x_P}{R+l}\right)^2 + \left(\frac{y_P}{R-l}\right)^2 = 1$$

在上述三种特殊情况下, P 点的运动轨迹是一种“简单曲线”, 其方程容易得到; 而在一般情况, P 点的运动轨迹不是“简单曲线”, 其轨迹的解析表达式较难得到, 但只要建立了系统的运动方程, 通过数值方法, 利用计算机绘图工具, 就可以得到较复杂的运动轨迹。图 1-3 给出了当 $R=50\text{ cm}$, $L=100\text{ cm}$, $l=75\text{ cm}$ (细线) 和 $R=50\text{ cm}$, $L=100\text{ cm}$, $l=25\text{ cm}$ (粗线) 时, P 点的运动轨迹。它是上下对称, 左宽右窄的闭曲线, 并且 P 点越接近 A 点其轨迹越接近于圆, P 点越接近 B 点, 轨迹形状越扁, 越接近于直线。

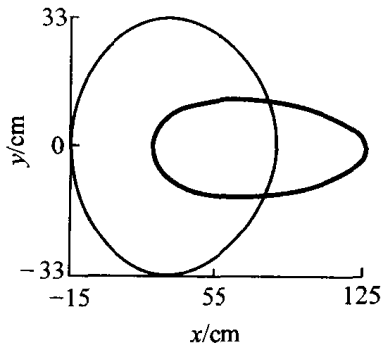


图 1-3

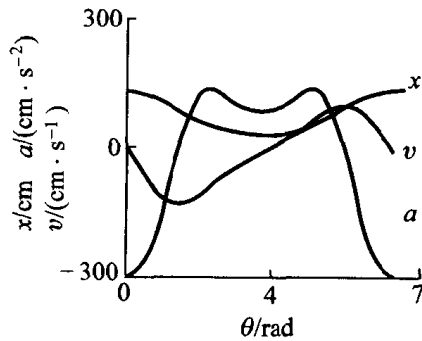


图 1-4

2. 求速度和加速度

P 点与 B 点重合时其运动方程为

$$x_B = x_P = R \cos \theta + \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta}$$

将滑块的运动方程对时间求一阶导数, 并注意到 $\dot{\theta} = \omega$, 可得滑块 B 的速度

$$v_B = \dot{x}_B = -R\omega \sin \theta - \frac{R^2 \omega \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta}}$$

将上式对时间再求一阶导数可得 B 点的加速度

$$a_B = \ddot{x}_B = -R\omega^2 \cos \theta - \frac{R^2 \omega^2 \cos 2\theta (L^2 - R^2 \sin^2 \theta) + R^4 \omega^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(L^2 - R^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

图 1-4 给出了 $R=50\text{ cm}$, $L=100\text{ cm}$, $\omega=2\text{ rad/s}$ 时, 滑块 B 的位置、速度和加速度随转角 θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 的变化规律。从中可以更直观地了解滑块 B 的运动特性。

三、自然坐标法

1. 运动方程

点沿曲线轨迹运动时, 其运动特征量速度、加速度与轨迹的几何形状有关,

自然坐标法就是结合轨迹的几何形状建立坐标系来研究点的运动的方法。因此,应用这种方法时,点的运动轨迹是已知的。

如图 1-5 所示,设已知 M 点的运动轨迹,这时我们可在轨迹上任选一点 O_1 为原点,并沿轨迹规定正负方向,弧长 $s = \pm O_1M$ 称为 M 点的弧坐标。 M 点的位置可由其轨迹和弧坐标唯一确定。当点 M 沿轨迹运动时,弧坐标 s 随时间 t 变化, s 是时间 t 的单值连续函数,它可表示为

$$s = s(t) \quad (1-15)$$

式(1-15)称为 M 点的自然坐标形式运动方程。

2. 曲线的几何性质

在研究点的速度、加速度之前,先研究曲线的某些几何性质,并建立自然坐标系。

曲线的弯曲程度通常用曲率和曲率半径来度量,图 1-6 所示曲线在 M 点的切线为 MT ,邻近一 M' 点的切线为 $M'T'$,过 M 点作 MT_1 平行于 $M'T'$,则 MT 与 MT_1 的夹角 $\Delta\theta$ 称为邻角,设 MM' 的弧长为 Δs ,邻角 $\Delta\theta$ 与弧长 Δs 的比值称为曲线在 MM' 段的平均曲率,用 κ^* 表示,则有

$$\kappa^* = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

当 $M' \rightarrow M$,即 $\Delta s \rightarrow 0$ 时, κ^* 的极限值称为曲线在 M 点的曲率,用 κ 表示,即

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \kappa^* = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

曲率 κ 的倒数称为曲线在 M 点的曲率半径,用 ρ 表示,即

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

圆周的曲率半径处处相等,它等于圆周自身的半径,直线的曲率半径为 ∞ 。

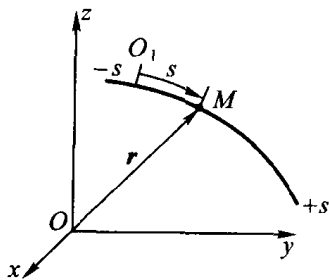


图 1-5

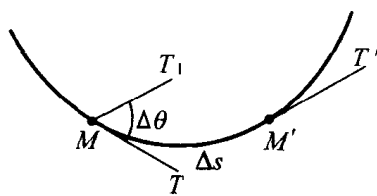


图 1-6

图 1-6 中,过 M 点作一包含 MT_1 与 MT 的平面,当 $M' \rightarrow M$,即 $\Delta s \rightarrow 0$ 时,这个平面转到某极限位置,称为曲线在 M 点的密切面,过 M 点作垂直切线的平面,称为切线在 M 点的法面。法面内由 M 点作出的一切直线都是曲线的法线,其中位于密切面内的法线称为主法线(如图 1-7 所示)。法面内与主法线垂直的

法线称为副法线。 M 点的切线、主法线、副法线构成一个正交架。现规定:切线的正向指向 s 的正向,其单位矢量用 e_t 表示;主法线的正向指向曲线的凹面,其单位矢量用 e_n 表示;副法线的单位矢量用 e_b 表示;它与 e_t, e_n 组成右手系,即

$$e_b = e_t \times e_n$$

这个以 e_t, e_n, e_b 确定的正交架称为自然坐标系。曲线任一点都有该点的自然坐标系,其方位随点的位置而改变。因此, e_t, e_n, e_b 是随点的位置变化的变矢量。

3. 速度与加速度

M 点的速度可表示为

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

由于任意曲线的弦长与弧长之比的极限是 1,所以 $|d\boldsymbol{r}/ds| = 1$,其方向是 $\overrightarrow{MM'}$,当 Δt 趋于零的极限方向,即沿切线的正向。于是 $d\boldsymbol{r}/ds = e_t$,上式可写成

$$\boldsymbol{v} = \dot{s} e_t = v_t e_t \quad (1-16)$$

式中 $\dot{s} = ds/dt$,可以是正值,也可以是负值。当 $\dot{s} > 0$ 时,表示 \boldsymbol{v} 沿 e_t 正向; $\dot{s} < 0$ 时,表示 \boldsymbol{v} 沿 e_t 的负向。 v_t 是速度 \boldsymbol{v} 在切线上的投影,即

$$v_t = \dot{s} \quad (1-17)$$

将式(1-16)对时间 t 求导,可得到 M 点的加速度,即

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(\dot{s} e_t)}{dt} = \dot{s} e_t + \dot{s} \dot{e}_t \quad (1-18)$$

上式等号右边的第一项表示由于速度在切线上投影改变而产生的加速度,后一项则是由于速度方向(即 e_t 的方向)改变而产生的加速度,下面分析这一项。

$$\dot{s} \dot{e}_t = \dot{s} \frac{de_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s}^2 \frac{de_t}{ds} = v^2 \frac{de_t}{ds}$$

其中 $v = |\dot{s}|$ 表示速度的大小,即速率,下面讨论 de_t/ds 的大小和方向。

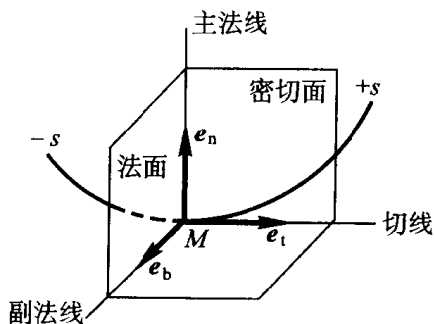


图 1-7

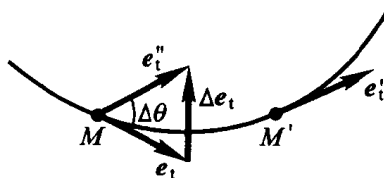


图 1-8

设 M 和 M' 处的切向量分别为 e_t 和 e_t' (图 1-8),过 M 点,作 e_t'' ,使得 $e_t'' =$

e'_t , 二者的夹角为 $\Delta\theta$, 于是 $\Delta e_t = e'_t - e_t$, 并且 $|\Delta e_t| = |2\sin(\Delta\theta/2)|$, 于是

$$\begin{aligned} \left| \frac{de_t}{ds} \right| &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta e_t}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\Delta s} \cdot 2\sin \frac{\Delta\theta}{2} \right| \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} \right| \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \kappa = \frac{1}{\rho} \end{aligned}$$

下面再研究 de_t/ds 的方向, 显然, 它是 Δe_t 的极限方向, 当 Δs 趋于零时, Δe_t 在密切面内垂直于 e_t 并指向切线的凹面, 因此 de_t/ds 的方向沿主法线正向, 于是

$$\frac{de_t}{ds} = \frac{1}{\rho} e_n$$

将其代入式(1-18), 就可得到加速度的表达式

$$a = a_t + a_n = \dot{s} e_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} e_n \quad (1-19)$$

由此可见, 加速度有两个分量, 一个沿切线方向的分量 a_t , 称为切向加速度, 它是由于速度在切线上的投影变化产生的; 另一个法线方向的分量 a_n , 称为法向加速度, 它是由于速度方向的变化产生的。加速度在副法线方向的分量为零, 即加速度在自然轴系的投影表达式为

$$\left. \begin{aligned} a_t &= \frac{dv_t}{dt} = \dot{s} \\ a_n &= \frac{\dot{s}^2}{\rho} \\ a_b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{s}^2 + \dot{s}^4/\rho^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + v^4/\rho^2} \quad (1-21)$$

加速度的方向可用其与主法线正向的夹角 β 角的正切来表示,

$$\tan \beta = \frac{a_t}{a_n} \quad (1-22)$$

加速度表达式(1-19)表明, 点作曲线运动时, 其加速度 a 永远在密切面内, 并且其法向加速度 a_n 永远指向曲线的凹面。

例 1-2 已知 M 点的运动方程为: $x = R\cos(\omega t)$, $y = R\sin(\omega t)$, $z = Ct$, 其中 R, ω, C 为常数。试求 M 点在任意时刻的速度、加速度的大小和曲率半径。

解: 将运动方程对时间求导后, 利用式(1-8)和(1-9), 可得

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = |\dot{s}| = \sqrt{[-R\omega\sin(\omega t)]^2 + [R\omega\cos(\omega t)]^2 + C^2} = \sqrt{R^2\omega^2 + C^2}$$

将运动方程对时间求二阶导数后,利用式(1-12)和(1-13),可得

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \omega^2 R$$

根据上述计算结果可知, M 点的速度和加速度的大小均为常值。

因为

$$v = |\dot{s}| = \text{const.} \quad a_t = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = 0$$

利用式(1-19)可知: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n$, 所以

$$a = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

$$\rho = \frac{\dot{s}^2}{a} = R + \frac{C^2}{\omega^2 R}$$

例 1-3 半径为 R 的圆盘沿直线轨道无滑动地滚动(称为纯滚动)(图 1-9), 设圆盘在铅垂面内运动, 且轮心 O 的速度为 $u(t)$ 。分析圆盘边缘一 M 点的运动, 并求当 M 点与地面接触时的速度和加速度以及 M 点运动到最高处轨迹的曲率半径。

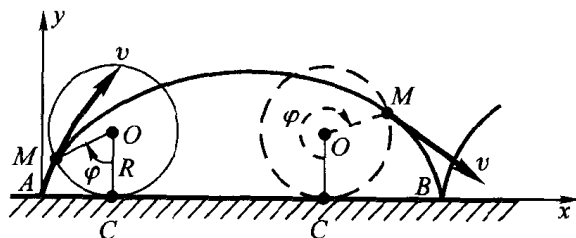


图 1-9

解: 1. M 点与地面接触时的速度和加速度

建立坐标系 Axy 如图 1-9 所示, 取 M 点所在的一个最低位置为原点 A , 设在任意时刻 t 圆盘的转角 $\angle COM = \varphi$, 它是时间 t 的函数, C 是圆盘与轨道的接触点, 由于圆盘是纯滚动, 所以 $AC = CM = R\varphi$, 于是 M 点的运动方程为

$$\begin{cases} x = AC - OM \sin \varphi \\ y = OC - OM \cos \varphi \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = R(\varphi - \sin \varphi) \\ y = R(1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

M 点的速度分量可表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = R\dot{\varphi}(1 - \cos \varphi) \\ \dot{y} = R\dot{\varphi} \sin \varphi \end{cases} \quad (a)$$

M 点的加速度分量可表示为