数学小丛书

（7）

一笔画和邮递路线问题

姜伯驹

北京市数学会编

人民教育出版社

1964年·北京

一笔画是一个有趣的几何问题。在世界历史上，从文艺复兴时代起，人们就开始注意到一些超出欧几里得几何学范围的几何现象和问题，一笔画就是其中之一。它是现今称为“网络论”的几何学科的始祖。几世纪来，人们一直把它看做是数学游戏，然而在我们的大跃进中，在邮递路线问题上得到了实际应用。

这本小册子的讲法，论断力求明确，推理力求严密，希望能帮助读者熟悉一些数学上常见的思路，学习分析和论证的方法。附少量习题，提供练习的机会。

书末附有一篇历史文献——欧拉1736年的报告，从中可以看到这位数学家在研究一笔画问题时思想逐渐深入的过程。

一笔画和邮递路线问题

姜伯驹

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

新华书店北京发行所发行

全国新华书店经售

天水新华印刷厂印装

统一书号：13012·0244 字数：26千

开本：787×1092 毫米 1/32 印张：$1\frac{1}{4}$

1964年2月新一版

1979年1月第3次印刷

北京：33,891—383,800册

定价 0.12 元

編者的話

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物．我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求．

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际。

这是我们的初步想法和尝试．热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物．

北京市数学会

1962 年 4 月

目　次

一　从邮递路綫問題説起

“一个邮递员每次送信，要走遍他负责投递的范围内的街道，完成任务后回到邮局．问他按怎样的路线走，所走的路程最短？”

这个问题叫做**最短邮递路线问题**，是邮递员每天都要碰到的．1959年，在山东省用运筹学解决实际问题的热潮中，发明了一种求最短邮递路线的数学方法——**奇偶点图上作业法**．据说在某地用这个方法改善了投递制度后，邮递的效率大大提高．

这是一个又实用又有趣的问题，值得我们花一些时间来研究一下．

最理想的邮递路线当然是从邮局出发，走遍每条街而且都只走过一次，最后回到邮局．这样的路线由于没有重复，显然是最短的．

然而这么理想的路线一定找得到吗？

比方说有象下面图1、图2那样的街道图，图中A是邮

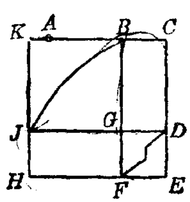

图　1.

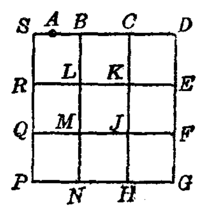

图　2.

局. 从 A 出发，要走遍每条街而且都只走过一次，在图 1 上是可以做到的，例如 A-B-C-D-E-F-G-B-J-G-D-F-H-J-K-A，或 A-B-C-D-F-E-D-G-J-B-G-F-H-J-K-A，或 A-B-G-F-D-G-J-B-C-D-E-F-H-J-K-A，等等. 可是图 2 却不行，不管你怎样走，不是有几段没有走到，便是有几段得重复走.

看来不是在任何条件下都能找到这么理想的路线的. 那么是在什么样的条件下能找到理想路线呢？

这使我们联想到一种有名的数学游戏，叫做一笔画.

二 一笔画問題

一笔画问题是问：什么样的图形可以一笔画成，笔不离纸，而且每条线都只画一次不准重复？

譬如下面图 3 中的三个图形，读者试过各种画法后，会断定“田”和“品”不可能一笔画成，而“串”却可以.

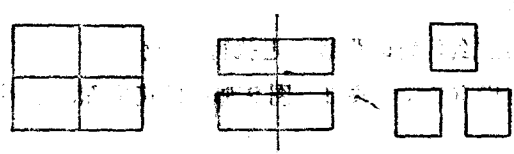

图 3

刚才的理想邮递路线问题，比一笔画要求还多一点：最后要画回起点. 但是以后我们会看到，这点差别是不顶要紧的.

所以一笔画问题可以说就是最短邮递路线问题的一部分，是理想邮递路线找不找得到的问题. 其实，我们用来解决

邮递路线问题的奇偶点图上作业法，就是以一笔画的研究作为理论基础的. 所以我们准备先把最短邮递路线问题搁在一边，花比较多的篇幅讨论一笔画问题①，然后再回头来分析最短邮递路线问题.

一笔画问题是数学家欧拉(Euler, 1707—1783)提出并解决的. 说起来还有一段故事呢.

三 七座桥的故事

故事发生在十八世纪的哥尼斯堡城，那里有七座桥，如图4. 当时那里的居民热衷于一个难题：一个散步者怎样能一次走遍七座桥，每座桥只走过一次，最后回到出发点？这题目似乎不难，谁都愿意试一试，但是谁也回答不出.

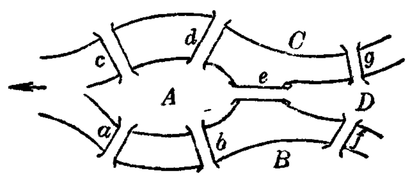

图 4.

欧拉的头脑比较冷静. 千百人的失败，使他猜想：也许那样的走法根本就不存在. 1733年，他证明了他的猜想，并在圣彼得堡科学院作了一次报告(见附录二).

① 在孙泽瀛所著《数学方法趣引》(中国科学图书仪器公司出版)一书里，有一笔画問題的精采討論，可以参看. 不过我們的讲法和他不一样.

他首先用一点 A 表示岛，点 B 表示河的左岸，C 表示右岸，D 表示两支流间的地区（参看图4）；用联结两点的线来表示联结两块陆地的桥，得到一个由七条线组成的图形（如图 5）．前面的七桥问题就变成一个一笔画问题：能否一笔画出这个图形，并且最后返回起点？

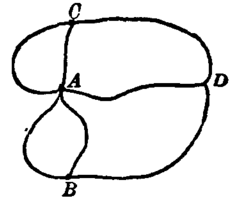

图 5.

现在我们分析一下用笔画图的过程．如果我们从某一点出发，一笔画出了某个图形，到某一点终止，那么中间每经过一点，总有画进那点去的一条线和从那点画出来的一条线．所以除了起点和终点这两个点以外，这个图形的每一点应该和偶数条线相联．如果起点和终点重合，那么连这个点也应该和偶数条线相联．

然而我们的图形上的四个点都和三条（B，C，D 各点）或五条（A 点）线相联，都是奇数条线．这样当然不可能一笔画出并回到起点．即使不要求回到起点，也不可能一笔画出．

正是经过这样分析，欧拉断定，不管要求不要求回到出发点，不重复地一次走遍那七座桥，总是不可能的．

七桥问题，或者一笔画问题，明显地是一个几何问题．然而这种几何问题却是欧几里得几何学（即中学里的平面几何和立体几何）所没有研究过的．因为欧氏几何中研究的图形，都由直线和圆组成，讨论的是长度、角度等等性质，而在七桥问题里，桥的准确位置、长度是无关紧要的，要紧的只是哪两

块陆地间有几座桥；一笔画问题里线条的长短曲直也无关紧要，要紧的只是有几个分叉点，哪几对点间有几条线相联．也可以说，要紧的只是点线之间的相关位置，或相互联结的情况．所以欧拉把这类几何问题的研究叫做**位置几何学**．对于这么一类新鲜的几何问题，欧拉当然不满足于只解答一个七桥问题．他继续钻研，终于找到了一个简便的原则，可以鉴别任一图形能不能一笔画出．这个原则，就是**一笔画定理**．

在讲一笔画定理之前，为了把问题弄得更清楚些，使叙述和论证更确切些，我们需要先引进一些术语和记号．

四　网络

我们要讨论的图形都是由线条构成的，不考虑整块的面积，也不考虑孤立的点．对于这种讨论对象，我们用一个专门的名词来叫它，叫做**网络**．为了明确起见，我们给它下一个定义：

网络是由有限条线组成的图形，每条线都要求有两个相异的端点．这些线叫做网络的**弧**，它们的端点叫做网络的**顶点**．

这个定义是根据一笔画问题的特点提出来的．我们知道，按通常的看法，图形是由点组成的，由无数的点组成．点多得无法掌握，这是一个大困难．然而在用笔画图时，总是一条条线去画，不会一个个点描的．一条线不论是长是短，是直是弯，都能从一端到另一端一笔勾出．所以现在我们把图形看成是由线组成的，由有限条线组成；换句话说，把图形看成网

络．把一个图形看成网络，就意味着把它分解成若干条弧．

平面几何与立体几何中所遇到的许多由线条构成的图形，在适当地分解成弧以后，都能看成网络．网络的弧不能没有端点（象囫囵的圆），也不能只有一个端点（象两端重叠的闭线），而必须有两个端点．但是这条规定不会束缚我们的手脚．例如图6中把圆周分解成两条弧两个顶点的网络．我们没有规定网络的弧彼此不相交．但是在把相交的线条看成网络时，常常把所有的交叉点都算做顶点，把那些线条相应地算做若干条弧，尽量避免弧与弧相交．例如平面上的凸四边形添上两条对角线所成的图形，我们通常不把它看成六条弧四个顶点的网络（如图7），而看成八条弧五个顶点的网络（如图8）．

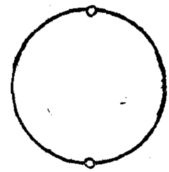

图 6.

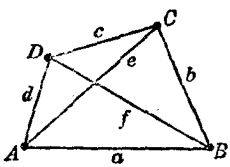

图 7.

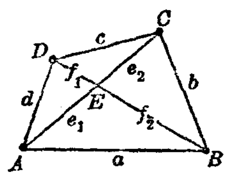

图 8.

为什么要这样比较抽象地提出网络的概念呢？这是因为，有了网络的概念，不但使我们以后说起话来方便，而且可以扩大我们讨论适用的范围．因为按照这个定义，不单纸上的一个图可以看成网络，一个电子仪器的复杂的电路也可以看成网络，一个国家的铁路网、公路网、水运网，一个区的街道网，都可以看成网络．不但有平面上的网络，还可以有空间中

的网络．所以我们以后对一般的网络进行研究所得到的种种结论，就会对所有这些具体的网络都适用．

为了记述方便，我们规定用这样的记号：凡是网络中的顶点都用大写字母，弧都用小写字母．用 $l=AB$ 表示弧 l 以 A,B 为端点．当然，如果 $l=AB$，那么也有 $l=BA$．但要注意，若 $l_1=AB, l_2=AB$，未必 $l_1=l_2$，因为以 A,B 为端点的弧可以不止一条．网络本身用黑体大写字母，譬如 $\mathbf{G}$，来表示．

互相衔接的一串弧叫做一条路．明确地说，网络中的**路**是一串弧 $(l_1, l_2, \cdots, l_k)$，这些弧两两不相同，并且每条弧 $l_i(i=2, \cdots, k-1)$ 都以一端 A_{i-1} 和 l_{i-1} 相接，另一端 A_i 和 l_{i+1} 相接．路也用黑体大写字母表示，记做 $\mathbf{W}=(l_1, l_2, \cdots, l_k)$，$l_i=A_{i-1}A_i\ (i=1, 2, \cdots, k)$．$A_0$ 和 A_k 叫做这路的两端，或者说这路连结 A_0 和 A_k．若 $A_0=A_k$，那么这路叫**闭路**．若顶点 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 又互不相同，那么这闭路叫做**圈**．例如图 9 中，(a, d, g, e) 不是路，(a, d, e, g) 是路；$(a, g, h, f, c, b, d, e, h)$ 不是闭路（也不是路），因为弧 h 出现了两次；(a, b, c, e, g, d, f) 是闭路而不是圈；(a, d, e, h) 是一个圈．

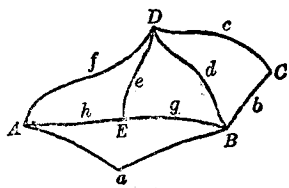

图 9.

现在不难看出，一笔画问题相当于：给定了一个网络，问有没有可能把所有的弧排成一条路．而要求一笔画成后回到起点，就相当于要求把全部的弧排成一条闭路．这就把一笔画问题用网络的语言提明确了．同时也把问题推广了，因为

原来的一笔画问题只是对平面上的图形说的，而现在的提法却对任何网络都有意义，不必限于平面上的网络．如果一个网络的全部弧可以排成一条路(不必是闭路)，这网络就叫做**一个一笔画**．

有一些图形，象前面图 3 中的"品"字，所以不能一笔画成，显然因为它不是连在一起的．可见能一笔画成的图形必定是连成一片的．所谓连成一片到底是什么意思？我们也来下个定义．一个网络称为**连通的**，如果它的任意两个顶点都可用一条路连结起来；否则称为**不连通的**．例如图 10 中左边的网络是连通的，右边的是不连通的，因为其中有几对顶点，例如 A、D，或 D、G，无法用路连结．

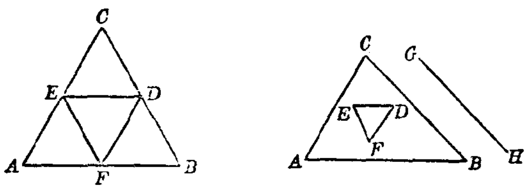

图 10.

如果某网络是由几个网络并成的，这几个网络彼此没有公共的顶点和弧，那么这网络就一定是不连通的．反过来，可以证明，不连通的网络总是由几个互不相交的连通网络并成的；这几个连通网络叫做这不连通网络的**分支**．例如图 10 右边的网络，有三个分支：三角形 ABC，三角形 DEF，线段 GH．连通网络只有一个分支．

我们曾经注意到，一笔画问题又和顶点联结的弧数，即顶点处的分叉情况有关．以某个顶点为端点的弧的条数，叫做

这顶点的**叉数**．例如图 9 中 B 是 4 叉顶点，C 是 2 叉顶点，E 是 3 叉顶点．顶点的叉数有奇偶之分．叉数是奇数的顶点叫做**奇顶点**，叉数是偶数的顶点叫做**偶顶点**．奇顶点的多少，和一笔画问题有极大关系．没有奇顶点的网络，叫做**偶网络**．

有了这些准备，可以讲一笔画定理了．

五　一笔画定理

我们分两个问题讲：根据哪些特征可以断定一个网络不是一笔画？根据哪些特征可以断定一个网络是一笔画？先来谈谈第一个问题．

要证明一个网络（例如图 5 上的网络）不是一笔画，就应该证明在这网络中全部的弧不可能排成一条路，或者说这网络中不存在一条路包括全部的弧．也就是说，不能只是承认你自己没能找到这样的路，还要能断言别人也不会找到；不但是至今没人找到过，而且将来任何时候也不会有人找得到．要论证，找不到的原因并不是你主观上能力不够，而是客观上根本不存在．这种"不存在性"定理在数学中是很多的．有的很容易证，譬如说：不存在三边长度分别是 2，3，4 的直角三角形，因为直角三角形的三边长度必须满足勾股弦定理，而 $2^2+3^2=13\neq4^2$．也有的很不容易证，譬如说：不可能用圆规和直尺三等分任意角①．证明"不存在性"定理的最常用的办

① 三等分一角的問題，可以参看《你会不会三等分一角？》，錢曾濤著，中国青年出版社出版．那里指出了怎样去证明不可能用圆规和直尺三等分任意角，但是論证还不十分严密．又可参看聶灵沼：《几何作图》，《数学通报》1957 年 2 月号．

法，是用反推法：先证明，假如"存在"，那么必须如何如何；然后说，现在并不如何如何，所以"不存在"。上面证那直角三角形的不存在，用的是这个办法。第三节证明七桥问题不可能有解，用的也是这个办法。

由此可见，我们的第一个问题可以换个问法：一笔画必须具备哪些性质？下面的定理就是回答这个问题的，解决七桥问题的实际上正是这个定理。它的证明其实也已直观地讲过(页4和页8)，现在严密地写出来。

定理一 一笔画必是连通的，并且奇顶点的个数是0或2.

证明 一笔画的全部弧可以排成一条路

$$Z=(l_1, l_2, \cdots, l_k), l_i=A_{i-1}A_i, \quad i=1, 2, \cdots, k.$$

这里 $A_0, A_1, \cdots, A_k$ 包括这网络的全部顶点(可能有重复)，因为任一顶点至少是一条弧的端点。任取两顶点 A_i, A_j, $i<j$, 它们可用路$(l_{i+1}, \cdots, l_j)$联结起来。所以这网络是连通的。

任取网络中的一个顶点 A, 假设它在序列 $A_0, A_1, \cdots, A_k$ 中出现 s 次：$A=A_{i_1}=A_{i_2}=\cdots=A_{i_s}$, $0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant k$, 那么对每个 $i_r, 1\leqslant r<s$, 都有 $i_r+1<i_{r+1}$；因为否则 $i_r+1=i_{r+1}$, 即 $l_{i_{r+1}}$ 的两端点相同，与网络定义抵触。假如 A 不是 A_0 或 A_k, 即 $i_1>0, i_s<k$, 那么以 A 为端点的弧有 $2s$ 条：l_{i_1}, l_{i_1+1}; l_{i_2}, l_{i_2+1}; $\cdots, \cdots$; l_{i_s}, l_{i_s+1}. 假如 $A=A_0\neq A_k$, 即 $i_1=0$, $i_s<k$, 那么以 A 为端点的弧有$2s-1$条：l_1; l_{i_2}, l_{i_2+1}; $\cdots, \cdots$; l_{i_s}, l_{i_s+1}. 类似地，假如 $A=A_k\neq A_0$, 以 A 为端点的弧也是 $2s-1$ 条。假如 Z 是闭路，$A_0=A_k$, 而$A=A_0=A_k$, 那么 $i_1=0, i_s=k$, 以 A 为端点的弧就只有 $2s-2$ 条：l_1; l_{i_2}, l_{i_2+1}; $\cdots, \cdots$; l_{i_s-1},

$l_{i_{s-1}+1}$; l_k. 归纳起来，如果 Z 是闭路，那么这网络的任一顶点都是偶数叉的，即都是偶顶点；如果 Z 不是闭路，那么有两个奇顶点 A_0 和 A_k，其余的顶点都是偶顶点. ┃①

这定理使我们能够断定：不连通的，或者奇顶点个数不是 0 或 2 的网络，一定不是一笔画. 那么，如果一个网络是连通的，奇顶点的个数又恰是 0 或 2，它就一定是一笔画吗？欧拉的判断：是的. 这回答了我们的第二个问题：根据哪些特征可以断定一个网络是一笔画. 怎么证呢？要证明一个网络是一笔画，就应该证明这网络中的全部弧可以排成一条路，或者说这网络中存在一条路包括全部的弧. 这种"存在性"定理在数学中也是很多的. 有的很容易证，譬如说：任给三个长度 a, b, c，只要其中任意两个的和大于第三个，就存在一个三角形，以 a, b, c 为三边的长；因为我们可以说出一种作图方法作出一个来给你看. 也有的很不容易证，譬如说：任意一个复数系数的 n 次多项式($n>0$)至少有一个复数根. "存在性"定理所肯定的只是"存在"，至于有多少，那是另一个问题了.

证明"存在性"定理，最简单的办法是直接求出一个来. 上面说的那三角形的存在性，就是这样证明的，前面图 3 中中间那个图形可以一笔画出，也是这样证明的. 可是要用这办法来证明欧拉的判断有困难. 对于一个两个具体的网络，你可以逐一去找出包含所有弧的路，来证明它们是一笔画. 现在要证的却是有某某性质的网络都是一笔画，有这些性质的

① 粗黑线 ┃ 表示证明完毕.

网络多得不可胜数，怎么可能去逐一找出路来呢？而欧拉的判断的妙处，正是使你能够在碰到某些很复杂的网络时，不用找路就能很快地断定它是一笔画.

我们把欧拉的判断分成两个定理来讲. 证明的线索可说是，间接地指出一种把全部弧排成路的办法. 在推理过程中，网络中弧的有限性起着重要作用.

定理二 若G是連通的偶网絡，那么G的全部弧可以排成一条閉路.

证明 分几步来证.

(1) 先证：在偶网络G中任取一顶点A_0，那么在G中一定能找到从A_0到A_0的闭路.

事实上，任取第一条弧$l_1=A_0A_1$，再取另一条$l_2=A_1A_2$，如果可能的话再取第三条$l_3=A_2A_3$，等等. 这样作出一条路

$$Z=(l_1, l_2, \cdots, l_k),\quad l_i=A_{i-1}A_i,\quad i=1, \cdots, k.$$

当$A_k\neq A_0$时，这条路一定还可以继续延长；因为这时Z中以A_k为端点的弧是奇数条(证法和定理一一样)，而A_k是偶顶点，一定还可以找到不在Z中的弧$l_{k+1}=A_kA_{k+1}$，而得到路$(l_1, \cdots, l_k, l_{k+1})$. 这条路越作越长，但$G$中总共只有有限条弧，所以总有一个时候作不下去了. 设这时的路是$(l_1, \cdots, l_m)$，$l_i=A_{i-1}A_i$，$i=1, \cdots, m$，那么A_m必定和A_0重合，即这条路是闭路.

(2) 再证：若G是连通的偶网络，Z是其中的一条闭路，它没有包含所有的弧. 那么一定还能找到一条闭路$\overline{Z}$，它包含的弧比Z多.