数学物理方程的问题分析与解答

杨 振 德 编

郑 州 大 学 数 学 系

1980年10月

序　　言

数学物理方程是一门大学基础课，每次教课都要选题和做题。可是每次选的题不少是过去教学过程中已使用过的，由于资料欠存，只好重选再做，花了很多时间，去重复已做过的事情，特别是换新教师教这门课时，更是造成不应有的麻烦。因此，多年来我们总想有一本较完善的习题集，作为教学上的参考，以便把更多的时间，用于分析教材和研究问题上，以更好地提高教学质量。据此，整理和编写了这本习题解答。由于时间短促，水平有限，缺点和错误一定不少。一经发现，恳请指正。

原来我们打算把变分法和积分方程的习题解答也编入此书，可是又考虑到目前这两部分内容，还没有列入这门课程的教学大纲，所以暂时删去，等以后有机会修订时，再作增补。

原稿经过曹策问同志的详细审阅，并提出了不少宝贵意见。同时，在编写本书的过程中，得到了校、系领导和教研室同志们的多方帮助和大力支持，特此表示致谢。

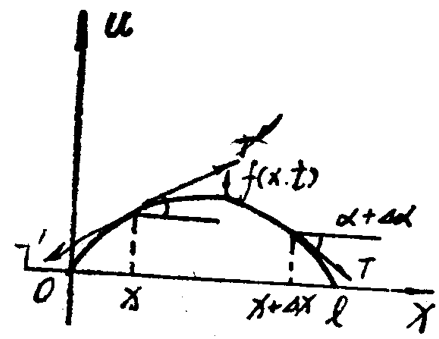
本书亦可作为电视大学、夜大学以及自学同志们作参考。

目　录

I. 方程的推导

1.设有一绷紧的弦，在垂直方向有外力$f(x,t)$作用，试导出弦的横振动方程。

解：设x点处弦的横向位移为$u(x,t)$，取$(x,x+\Delta x)$之间的一段微元，设作用在微元左、右两端的张力分别为T'，T，则水平方向的力为：



$$-T'\cos\alpha+T\cos(\alpha+\Delta\alpha)=0$$

$$\because\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+u'^2_x}}\approx 1,$$

$$\therefore T'\big|_{x+\Delta x}=\text{常数},$$

垂直方向力为：

$$T'\cdot\sin\alpha-T\sin(\alpha+\Delta\alpha)+f(xt)\Delta x,$$

∵我们考虑的α很小

$$\therefore \sin\alpha\approx tg\alpha\approx\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+u'^2_x}}\approx\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\therefore T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}\right)+f(x,t)\Delta x,$$

惯性力为：

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

故得

$$T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}\right)+f(x,t)\Delta x=\Delta x\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\text{即}T\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x+f(x,t)\Delta x=\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\text{故}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{f(x,t)}{\rho}.\qquad\left(a^2=\frac{T}{\rho}\right)$$

2、设有一弦，在阻力与速度的一次方成比例的介质中作横振动，试求弦振动方程：

解：只需将习题1中的 $f(x,t)$改为$K\frac{\partial u}{\partial t}$，即得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+K'\frac{\partial u}{\partial t}\ ,\left(K'=\frac{K}{\rho}\ ,\quad a^2=\frac{T}{\rho}\right)$$

其中K为介质的阻尼系数。

3、试用积分的方法，寻出弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ .\left(a^2=\frac{T}{\rho}\right)$$

解：由习题1知，在水平方向的力为：

$$T'COS\alpha-TCOS(\alpha+\Delta\alpha)=0.$$

$$\therefore T=T'=\text{常数}.$$

现在考虑垂直方向的力

在（x_1,x_2）的动量为：

$$\int_{x_1}^{x_2}u'_t(\xi,t)\rho(\xi)d\xi,\ (\rho\text{为密度})$$

在（t_1,t_2）内动量的改变为：

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[u'_t(\xi,t_2)-u'_t(\xi,t_1)\right]\rho(\xi)d\xi\ ,\qquad (*)$$

在垂直方向受力的总和为：

$$\int_{t_1}^{t_2}T\left[u'_x(x_2,t)-u'x(x_1,t)\right]dt+\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}f(\xi,t)d\xi dt\qquad (**)$$

由能量守恒原理得：

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho(\xi)\left[u'_t(\xi,t_2)-u'_t(\xi,t_1)\right]d\xi=\int_{t_1}^{t_2}T\left[u'_x(x_2,t)\right.$$

$$\left.-u'_x(x_1,t)\right]dt+\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}f(\xi,t)d\xi dt,$$

即$\int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{t_1}^{t_2}\rho\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{t*}dx\right]d\xi$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}T\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x*}dxdt+\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}f(\xi,t)d\xi dt\ .$$

即$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\left(\rho\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{t*}-T\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x*}-f(\xi,t)\right)d\xi dt=0\ .$

当$\Delta x\to 0$，$\Delta t\to 0$时得：

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),$$

$$\therefore\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\bar{f}(x,t)\ ,\ \left(a^2=\frac{T}{\rho}\ ,\ \bar{f}=\frac{f}{\rho}\right)$$

4 设有一根变截面的杆，有热源强度为$f(x,t)$时，试求热传导方程.

解：设x处的温度为$u(x,t)$，在Δt时间通过截面的热量为

$\frac{\partial u}{\partial x}$

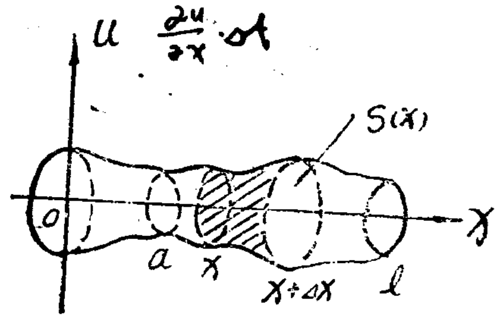
$$dQ(x) = -K(x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}S(x)\Delta t,$$

Δx $S(x)$

$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta t$

在 t_1 到 t_2 时间内通过截面 $S(x)$ 的热量为：

$$Q(x) = \int_{t_1}^{t_2} -K(x)S(x)\frac{\partial u}{\partial x}dt,$$



另一方面在 Δx 一段内，热量的改变为：

$$dQ_1(t) = C\rho S(x)\Delta x u,$$

故在 x_1 到 x_2 的一段内改变为：

$$Q_1(t) = \int_{x_1}^{x_2} uC\rho S(x)dx,$$

du

$\frac{\partial u}{\partial x}$ $cm\,\Delta t$

由热量守恒知：

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(K(x_2)S(x_2)\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x} - K(x_1)S(x_1)\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}\right)dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)S(x)dxdt$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} C\rho(x)S(x)\left(u(x,t_2)-u(x,t_1)\right)dx.$$

即 $$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left[K(x)S(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dxdt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} C\rho(x)S(x)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt.$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)S(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t)S(x) = C\rho(x)S(x)\frac{\partial u}{\partial t}.$$

5 设有一密度、传热系数和截面都均匀的杆，无热源作用，试导出热传导方程式，（用改变量的方法）。

解：在 Δt 时间内，在 x_1 到 x_2 一段内热量之差为：

$$K(x_2)\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x}Sdt - K(x_1)\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}Sdt, \quad (1)$$

在 Δt 时间内，在 $x_1 \to x_2$ 一段内热量的改变为

$$c\rho s\left[u(x,t_2)-u(x,t_1)\right]dx \quad (2)$$

由(1)，(2)得：

$$s\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdt = c\rho s\frac{\partial u}{\partial t}dxdt,$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}.$$

若 k = 常数，则得

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}\ ,\qquad (a^2=\frac{k}{c\rho}).$$

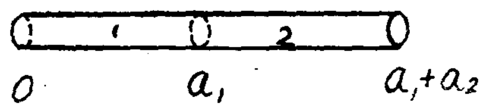
6、设有两根柩轴，它们分别具有长度a_1，a_2，而且原料不同，在$t=0$时刻分别有常数初温T_1^0，T_2^0，现在把它们接起来，假定表面绝热.试求其热传导方程，并给出初始及边界条件.

答：温度$u(x,t)$所满足的方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\alpha_1^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<a_1,\\[2ex]\dfrac{\partial u}{\partial t}=\alpha_2^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ a_1<x<a_1+a_2,\end{cases}\qquad (t>0)$$

初条件：

$$u(x,0)=\begin{cases}T_1^0,\ 0\leqslant x\leqslant a_1,\\ T_2^0,\ a_1\leqslant x\leqslant a_1+a_2,\end{cases}$$



边条件：

$$\begin{cases}u(a_1^+,t)=u(a_1^-,t).\\[2ex]\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x\neq 0\\ x\neq a_1+a_2}}=0.\end{cases}$$

7、试证、锥形枢轴的纵振动的方程有形式：

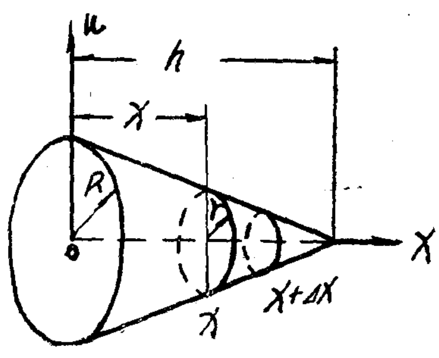
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(1-\frac{x}{h})^2,$$

其中u是横坐标为x的枢轴的纵向位移，而h是园锥的高.

解：由虎克定律，在x处因形变引起的弹性应力为

$$\text{弹性模数}\times\text{相对伸长}=E\frac{u(x+\delta x,\ t)-u(x,\ t)}{\delta x}=E\frac{\partial u}{\partial x}.$$

因此x处截面上受的总力为$E\dfrac{\partial u}{\partial x}S$，$S(x)$为截面积.



在x到$x+\Delta x$这一段轴体上受的合力为

$$E\frac{\partial u}{\partial x}S\Big|_{x+\Delta x}-E\frac{\partial u}{\partial x}S\Big|_{x}=E\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x \qquad (1)$$

惯性力为：

$$\rho\Delta V\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (2)$$

故运动方程为

$$E\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x=\rho\Delta V\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

因$\Delta V=S(x)\Delta x$，所以

$$E\frac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\rho S(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \qquad (3)$$

注意 $S(x)=\pi r^2=\pi R^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^2$。代入(3)式，并令$a^2=\frac{E}{\rho}$，即得证。

（注：(3)式事实上给出一般的截面积为$S(x)$的变截面杆的纵振动方程）。

8、已知横截面非常小的园环

注意：由于经过表面的辐射散失于周围的介质中，试证园环中温度u满足 的热 传导方程为：

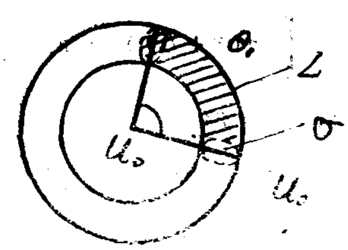
$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}-bu=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},\quad \left(a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}},\ b=\frac{hl}{\sigma k}\right),$$

其中R为半径，θ是以经度计算的中心角，k、h是内外热传导系数，c、ρ为热容量与密度，σ、L是横截面的面积和周长。

提示：热辐射放出热量为：$\Delta q=hu\Delta s$。

解：取园周上弧长的变动坐标为θ_1。在$\theta_1+\Delta\theta_1$处流入的热量为：

$$Q_1=k\frac{\partial u}{\partial\theta_1}\sigma\Big|_{\theta_1+\Delta\theta_1},$$



在θ_1处流入的热量为：

$$Q_2=-k\frac{\partial u}{\partial\theta_1}\sigma\Big|_{\theta_1},$$

在侧面流入的热量为：

$$Q_3=-hu\Delta s=-hu\Delta\theta_1 L,$$

在θ_1到$\theta_1+\Delta\theta_1$内热量的改变为：

$$Q = c\rho\sigma\frac{\partial u}{\partial t}\Delta\theta_1,$$

$\therefore$由$Q_1+Q_2+Q_3=Q$（即热量守恒），可得：

$$k\frac{\partial u}{\partial\theta_1}\sigma\Big|_{\theta_1+\Delta\theta_1} - k\frac{\partial u}{\partial\theta_1}\sigma\Big|_{\theta_1} - hL\Delta\theta_1 u = c\rho\sigma\Delta\theta_1\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\therefore\quad \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial\theta_1}\right)\Delta\theta_1\sigma - kL\Delta\theta_1 u = c\rho\sigma\Delta\theta_1\frac{\partial u}{\partial t},$$

若环为均匀的，即 k = 常数，则得：

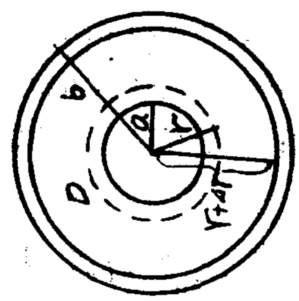
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta_1^2} - \frac{hL}{k\sigma}u = \frac{c\rho}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

又$\because$ $\theta_1 = R\theta$。

$$\therefore \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - bu = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},\quad \left(b=\frac{hL}{k\sigma},\ \frac{1}{a}=\sqrt{\frac{c\rho}{k}}\right)$$

9、设有一厚壁筒，它们初始温度为$\overline{u}_0$，并没它的内表面的温度增加与时间 t 成线性关系，

外表面按照牛顿冷却定律进行热交换，试导出温度分布方程，并给出初始及边值条件.



解：考虑一个截面的情形. 取半径r到$r+\Delta r$的环形带D.在Δt 时 间内，流入D内的热量Q_1为：

$$Q_1 = -k\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_r 2\pi r\Delta t$$

在Δt时间内、流出D的热量Q_2

$$Q_2 = -k\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r+\Delta r} 2\pi(r+\Delta r)\Delta t,$$

在Δt时间内D内热量的改变为：

$$Q = \left[\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2\right]c\rho\left[u(r,\ t+\Delta t) - u(r,\ t)\right],$$

略去高次项即得：

$$Q = 2\pi r\Delta r c\rho[u(t+\Delta t,\ r) - u(t,r)],$$

由热量守恒定律得：

$$Q_1 - Q_2 = Q.$$

即 $$2\pi r\Delta r c\rho[u(t+\Delta t,\ r) - u(t,r)] = 2\pi k\Delta t\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}r\Delta r + \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r+\Delta r}\Delta r\right],$$

$$\therefore \quad \frac{c\rho}{k}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

或 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$，$\left(a^2=\dfrac{k}{c\rho}\right)$，

初条件：

$$u(r,t)|_{t=0}=u_0, \qquad (a\leqslant r\leqslant b),$$

边条件：

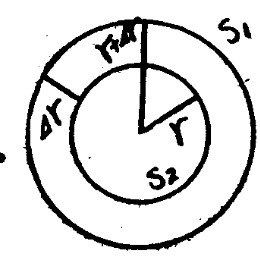
$$\begin{cases} u(r,t)|_{r=a}=u_0+ct, & (0<t<\infty), \\ \left[\dfrac{\partial u(r,t)}{\partial r}+hu(r,t)\right]_{r=b}=h\bar{u}, \end{cases}$$

10、试证：均质而且在每一同心球面上等温的孤立球体的热传导方程为：

$$U_{rr}=\frac{1}{a^2}U_t$$

其中$U(r,t)=ru(r,t)$，$\left(a=\sqrt{\dfrac{k}{c\rho}}\right)$，$u$是温度。

解：考虑一个内半径为r,外半径为$r+\Delta r$的球壳，流出s_1的热量为：



$$Q_1=-k\frac{\partial u}{\partial r}\Delta s_1\Delta t,$$

流入s_2的热量为：

$$Q_2=-k\frac{\partial u}{\partial r}\Delta s_2\Delta t,$$

壳体升高的温度为：

$$Q_3=c\rho\Delta v[u(t_2, r^*)-u(t_1, r^*)], \quad (r<r^*<r+\Delta r),$$

$$\Delta v=4\pi r^{*2}\Delta r,$$

由热量守恒定律得：

$$Q_2-Q_1=Q_3$$

即$\left[k\dfrac{\partial u}{\partial r}4\pi(r+\Delta r)^2|_{r+\Delta r}-k\dfrac{\partial u}{\partial r}4\pi r^2|_r\right]$

$$=c\rho 4\pi r^{*2}\Delta r\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\therefore \quad 4\pi k\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial r}(r+\Delta r)^2|_{r+\Delta r}-r^2\frac{\partial u}{\partial r}|_r\right]\right\}$$

$$=c\rho 4\pi r^{*2}\Delta r\frac{\partial u}{\partial t}\quad ,$$

$$\frac{k}{c\rho}\left[\frac{\partial u}{\partial r}r^2\Big|_{r+\Delta r}-r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_r+2r\Delta r\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r+\Delta r}+\Delta r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r+\Delta r}\right]$$

$$=r^2\Delta r\frac{\partial u}{\partial t}\ ,$$

当$\Delta r\to 0$时，可得下式：

$$\therefore\quad a^2\left[r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2r\frac{\partial u}{\partial r}\right]=r^2\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\therefore\quad a^2\left[r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2\frac{\partial u}{\partial r}\right]=r\frac{\partial u}{\partial t},$$

令 $U(r,t)=ru(r,t)$，

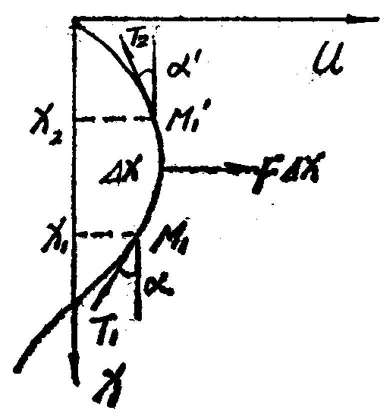
得 $U_{rr}=\dfrac{1}{a^2}U_t$ ， $\left(a=\sqrt{\dfrac{k}{c\rho}}\right)$

11、没有一均质柔绳，垂直悬挂，在重力作用下，拉它一下然后再放手，使之作微小的振动，试求振动方程。

解：取x到$x+\Delta x$之间的一段绳子微元．它所受的垂直方向的外力为$F\Delta x$，它两端的张力为T_1，T_2．设绳子无上下摆动．则水平方向受力的合力为

$$T_1 Sin\alpha-T_2 Sin\alpha'-Fdx,$$

惯性力为：$\rho dx\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$， u为横向位移．



$$\therefore\ \rho dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_1 sin\alpha-T_2 sin\alpha'-Fdx$$

又$\because$ $T=(l-x)\rho g$，$sin\alpha\approx tg\alpha\approx\dfrac{\partial u}{\partial x}$，

$$\therefore\ \rho dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\rho g(l-x_1)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_1}-\rho g(l-x_2)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_2}-Fdx,$$

$$\therefore\ \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\rho g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-F\ ,$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{F}{\rho}\ ,$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\overline{F}(x)\ ,$$

$$(a^2 = g,\ \overline{F} = \frac{F}{\rho})$$

这就是我们所求的方程。

12、密度依规律 $\rho = \dfrac{a}{\sqrt{b^2 - x^2}}$ 变化的非均质绳索在 $x=0$ 的一端固定在一个铅垂的固定轴上，而在另一端 $x = l$ 上挂一个质量为 $M = \dfrac{a}{l}\sqrt{b^2 - l^2}$ 的小球（$b>l$），试证当绳索绕着所说的轴在水平面上以常角速度 ω 转动时，微小横振动的方程式为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (\text{其中 } y = \sin^{-1}\frac{x}{b}).$$

解：点 x 处的张力由下面两部分力所引起

i）点 x 外侧至 $x = l$ 一段绳子的惯性离心力。

$$\Delta T' = \Delta m \omega^2 x = \rho \Delta x \omega^2 x = \frac{a x \omega^2}{\sqrt{b^2 - x^2}} \Delta x$$

故

$$T' = \int_x^l \frac{a x \omega^2}{\sqrt{b^2 - x^2}} dx = a\omega^2 \int_x^l \frac{x dx}{\sqrt{b^2 - x^2}},$$

ii）小球的惯性离心力：

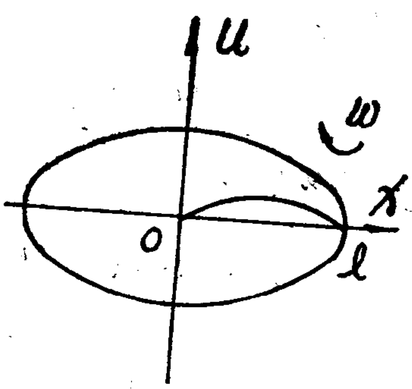
$$T'' = m\omega^2 l = a\omega^2 \sqrt{b^2 - l^2}$$

$$\therefore\ T = T' + T''$$

$$= a\omega^2 \int_x^l \frac{x dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} + a\omega^2 \sqrt{b^2 - l^2},$$

$$= -a\omega^2 \sqrt{b^2 - x^2}\Big|_x^l + a\omega^2 \sqrt{b^2 - l^2},$$

$$= a\omega^2 \sqrt{b^2 - x^2}$$



T 在垂直方向的投影为：

$$a\omega^2 \sqrt{b^2 - x^2}\frac{\partial u}{\partial x},$$

故在 x 到 $x + \Delta x$ 的一段绳子微元上的改变量为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a\omega^2 \sqrt{b^2 - x^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]\Delta x$$

于是得运动方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a\omega^2 \sqrt{b^2 - x^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]\Delta x = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2}}\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\therefore \quad \omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{b^2-x^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

令 $y=sin^{-1}\frac{x}{b}$， 故 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}$，

因此代入上式得：

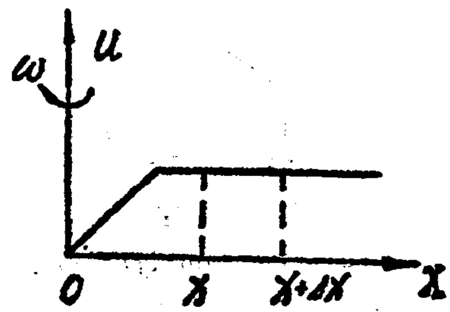
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

13 设一绝对柔韧的均质绳索，一端固定，而平衡位置在 x 轴上，离开平衡位置它以常角速度 w 绕 u 轴转动，试证绳索在自己的相对平衡位置附近的微小横振动方程，具有形式：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad ,\left(a=\frac{w}{\sqrt{2}}\right)$$

解：Δx的惯性离心力为：$\rho\Delta x w^2 x$，

故(x, l)一段的惯性离心力为：



$$T=\int_x^l \rho x w^2 dx=\tfrac{1}{2}\rho w^2[l^2-x^2],$$

它产生 x 点处的一个向外的张力。T 在垂直方向上的分量为：

$$\frac{1}{2}\rho w^2[l^2-x^2]\frac{\partial u}{\partial x},$$

故得运动方程：

$$\tfrac{1}{2}\rho w^2[l^2-x^2]\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}-\tfrac{1}{2}\rho w^2[l-x^2]\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x}=\rho\Delta x\frac{\partial u}{\partial t^2},$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}w^2\frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

其中 $a=\frac{w}{\sqrt{2}}$. 证完。

14 枢轴振动时，如它的横截面绕着枢轴的轴一个对一个的有所扭转，则这种振动叫扭转振动。

试证，园形枢轴的微小扭转振动的方程为：

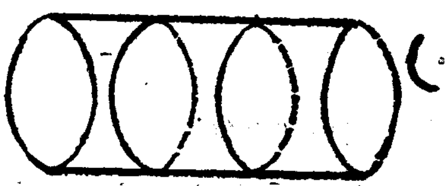
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\,,\quad \left(a=\sqrt{\frac{GI}{J}}\right).$$

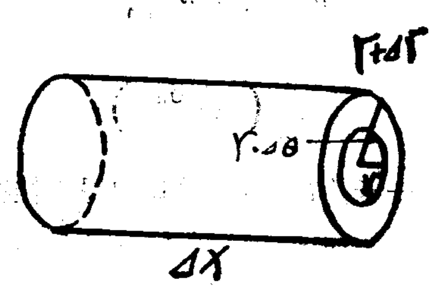
其中 θ 为扭转角，

解：扭转的长度为$r\Delta\theta$，则得：

应变为：$\dfrac{r\Delta\theta}{\Delta x}$，

应力为：$G\dfrac{r\Delta\theta}{\Delta x}=Gr\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$，





在x处的截面上，半径r到$r+dr$的园环ΔS上的扭力矩为：

$$Gr\frac{\partial\theta}{\partial x}r\Delta S=Gr\frac{\partial\theta}{\partial x}2\pi r^2dr.$$

x 处的截面上，总的扭力矩为：

$$\int_O^R Gr\,\frac{\partial\theta}{\partial x}2\pi r^2dr=GI\,\frac{\partial\theta}{\partial x}\,,\quad \left(I=\int_O^R 2\pi r^3dr\right).$$

故得x到$x+\Delta x$一段枢轴的扭转运动方程：

$$GI\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}-GI\,\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x}=J\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\Delta x,\ （J\text{是矩量}）$$

即 $$GI\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\Delta x=J\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\Delta x,$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\,,\quad \left(a=\sqrt{\frac{GI}{J}}\right),$$ 证明完。

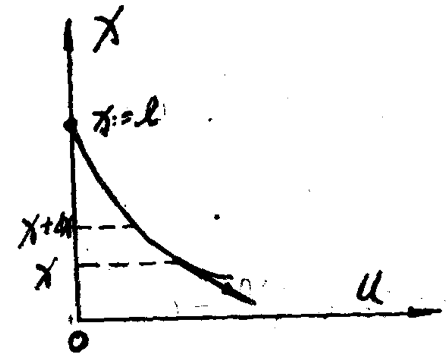
15　上端（$x=l$）固定在铅直轴上的长为 l 的有重量的均质绳索绕着这个轴以常角速度 w 转动，试证绳索绕自己的铅直平衡位置的微小振动方程有形式：

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=g\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)+w^2u.$$

解：点ω处绳子受的张力为：ρgx，

在水平方向投影为：

$$\rho g x\frac{\partial u}{\partial x}\ .$$



故从x到$x+\Delta x$一段绳子微元在水平方向受的总力为

$$\rho g x\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}-\rho g x\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x}+\rho\Delta x\omega^2 u\ \text{（离心力）}$$

故有运动方程

$$\rho\Delta x\omega^2 u+\rho g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x=\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,$$

$$g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\omega^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ，\text{证完。}$$

16　设有一长为l的绝对柔韧的绳索挂在端点$x=l$上，他一端$x=0$上荷重p公斤，绳索线密度ρ按照规律$\rho=\frac{A}{\sqrt{l_1+x}}$变化，其中常数$A$与$l$，跟荷重的质量$M$由下列关系连系着$M=2A\sqrt{l_1}$。试证绳索绕自己的平衡位置的微小振动的方程有形式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,\quad\left(a=\sqrt{\frac{g}{2}}\ ,\quad\theta=\sqrt{l_1+x}\right),$$

解：点x处绳的张力$=mg=\int_0^x g\frac{A}{\sqrt{l_1+x}}dx$,

$$=2Ag\sqrt{l_1+x}-2A\sqrt{l_1}g.$$

故总张力为：

$$2Ag\sqrt{l_1+x}-2A\sqrt{l_1}g+Mg,\ (M=2A\sqrt{l_1}),$$

即　$2Ag\sqrt{l_1+x}-2A\sqrt{l_1}g+2A\sqrt{l_1}g=2Ag\sqrt{l_1+x}$，

它在水平向的投影为：

$$2Ag\sqrt{l_1+x}\frac{\partial u}{\partial x}\ ,$$

故有从x到$x+\Delta x$一段微元的运动方程

$$2Ag\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{l_1+x}\frac{\partial u}{\partial x}\right]\Delta x=\frac{A}{\sqrt{l_1+x}}\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,$$

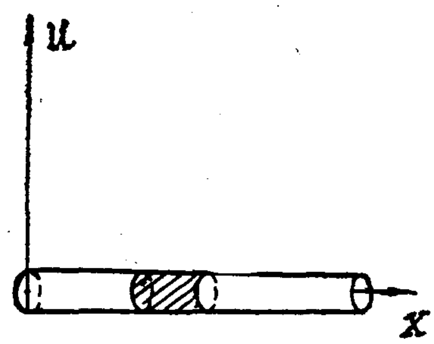
$$\therefore\quad 2g\sqrt{l_1+x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{l_1+x}\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,$$

故　$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,\quad\left(a=\sqrt{\frac{g}{2}}\quad\theta=\sqrt{l_1+x}\right).$$

17　设有一细长均质的枢轴作纵振动，而它的横截面保持为平面，沿着ox轴变位，试证微振

动方程为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial u}{\partial x^2}\text{，}\quad\left(a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\right).$$



其中$u(x,t)$是坐标为x的横断面在时刻t的位移，ρ是密度，E是弹性模数.

解：在t时刻，位移的变化为：

$x+\Delta x\rightarrow x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)$,

$x\longrightarrow x+u(x,t)$,

$$\text{故应变}=\frac{[x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)]-[x+u(x,t)]-\Delta x}{\Delta x}$$

$$=u'_x(x+\theta\Delta x,t),\ (0\leqslant\theta\leqslant1),$$

（用拉格朗日坐标）

或把应变写作：

$$\text{应变}=\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)-\Delta x}{\Delta x}$$

$$=u'_x(x+\theta\Delta x,t)-1,\ (0\leqslant\theta\leqslant1).$$

（用尤拉坐标）。

$\because$在x和$x+\Delta x$处的张力分别为：

$$T_x=E(x)u'_x(x+\theta\Delta x,t),$$

$$T_{x+\Delta x}=E(x+\Delta x)u'_x(x+\theta_1\Delta x,t),$$

$$\therefore\quad T_{x+\Delta x}-T_x=E(x)u_x\Big|_{x+\Delta x}-E(x)u_x\Big|_x=\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

即
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

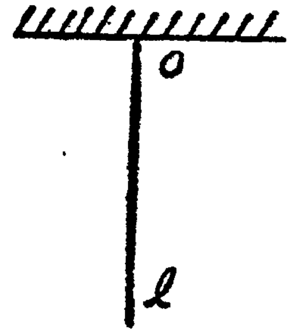
$\because$均质，$\therefore E=$常数，

$$\therefore\quad\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{，}\quad\left(a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\right)$$

同样可用尤拉坐标得到振动方程.

18　铅直悬挂着一根杆，杆上所有点的位移被某种方法保持为零，在$t=0$时这个杆被突然放开而只有顶点固定，讨论这时的强迫振动(在重力作用下)，

问题可化为：



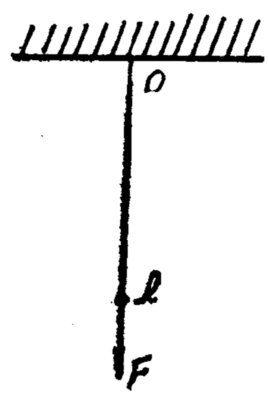
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t'(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x'(l,t) = 0. \end{cases}$$

19 试组成关于枢轴纵振动在下列情形的边界条件与初值条件：

（a）设枢轴长为l，在$x=0$固定，而在$x=l$作用一个力F，在$t=0$时刻作用力突然停止。

（b）在$x=l$一端是平衡位置，而从$t=0$时刻起作用力$F(t)$。

解：（a）方程为：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ． $(0<x<l,\ t>0)$



初条件：

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{F}{E}$

$$\begin{cases} u(x,0) = \dfrac{F}{E}, \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases} \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

边条件：

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u_x'(l,t) = 0. \end{cases} \quad (t \geqslant 0),$$

（b）方程为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0<x<l,\ t>0),$$

初条件：

$$\begin{cases} u(x,0) = 0, \\ u_t'(x,0) = 0. \end{cases} \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

边条件：

$$\begin{cases} u(t,0) = 0, \\ u_x'(t,l) = \dfrac{F(t)}{E} \end{cases} .\ (t \geqslant 0),$$

20 设有一均匀小杆子，一端温度为u_0，另一端温度为u_1，周围温度为0℃，试求 热传导方程。

解：通过S_1的热量为