线性代数

谢国瑞 编

华东化工学院出版社

内 容 提 要

本书是编者根据多年教学经验写就的一本教材。书的内容深度与国家教委批发的《高等工业学校线性代数课程教学基本要求》一致；在广度方面则扩展了计算机应用的有关基础知识，还根据工科高等院校的特点引进了不少颇具启发性的应用示例。

全书共分六章，内容为：1 矩阵代数初步，2 高斯消元法与*LU*分解，3 行列式与逆矩阵，4 矩阵的秩和线性代数方程的解，5 向量空间概念，6 矩阵特征问题。其内容体系安排的特点是分散了难点使全书易学好懂和能引起兴趣，前四章构成了一个独立的初级教程。

本书可作为30～40学时的线性代数课程教材，也可作为15～20学时校低教学要求的线性代数课程教材，还可作为广大科技人员和自学者的参考用书。

责任编辑 袁明辉
封面设计 卞 雯
责任校对 潘乃琦

线 性 代 数
Xianxing Daishu
谢国瑞 编

华东化工学院出版社出版
（上海市梅陇路130号）
新华书店上海发行所发行
上海市印刷三厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张10.125 字数226千字
1988年10月第一版 1988年10月第一次印刷
印数 1-4000 册

ISBN7-5628-0009-X/O·1 定价：1.75 元

序　言

编写本书的目的是为高等工业学校本、专科学生的线性代数课程提供一本实用的教材，也为科技人员提供一本有用的参考书。

本书内容是根据国家教委批准印发的《高等工业学校线性代数课程教学基本要求》确定的。在体系安排上，编者根据多年教学经验作了便于教学的处理，以适应不同层次的教学要求，并力求有助于完成本课程的发展学生思维能力，提供紧凑而合理的有用知识，提高文化素养，激发学习兴趣之任务。

以下是编写计划中编者的一些构思：

线性代数方程组的解与矩阵方法两个主要内容采取交叉推进的发展方法。

对行列式，采用了与“计算”一致的展开定义方式，并强调它在全书中的工具作用。

在矩阵行初等变换、高斯消元法、行列式等简单概念基础上，前四章完成了逆矩阵、矩阵秩、线性代数方程组的解等重要内容的初步讨论；必要时，这四章可单独作为一个易读的初级教程。

利用线性代数方程组解的有关结论与矩阵方法，讨论向量集的线性相关等概念。这样，不仅使这些抽象概念变得较易掌握，而通过运用还能更好地复习、巩固已学的知识。在讨论矩阵的行秩与列秩等一系列概念后，使学生对前面知识有更深的理解。

对格拉姆－施密特正交化方法作了解释，使学生能更好

地掌握。

对矩阵特征问题及二次型，在篇幅允许的条件下，扩充了若干性质及一些应用内容，使其能处理成连贯的理论，避免成为内容的罗列。

虽然本书也采用定义、定理这种数学教科书的传统编写方式，但为了便于阅读，还是引入了一些不加证明的定理或结论。而一个定理或结论正确与否的证明，并不完全出于篇幅的原因，更考虑了证法的代表性与结论的明显或重要性。

对于定理的推论，一般都给出了较为完整的证明，因为这正是运用已有知识进行思维、推理的极好示范。为利于培养逆向思维及发散性思维，有时会对一个命题毫不犹豫地证(解)上二三遍，力求反映不同的思考方式及其联系。

为扩展知识的横向及纵向联系，全书在不同程度上涉及了解析几何、多元微积分、微分方程组、统计、运筹、计算、化学反应及化学热力学等学科的内容。这样做的目的希望能反映应用数学的许多问题都会在某个阶段出现线性代数问题这个事实。但为了便于教学，这种内容大都以示例或单独一小段的形式给出，越过它们将无损于教学内容的连贯性。

演算一定数量的习题是学好数学的必由之路。全书以两种形式给出习题：每段内容后安排了必须独立完成的基本练习题；而在每章末的习题中，除了基本练习题外，还间或编排一些扩展课文内容的题目，这些可以在教师指导下完成。在教学时数裕余的情况下，也可由教师稍加发挥作为课堂讲授的题材。

以上这些构思的形成，多得益于历年来学生对教学的反

映，特别是85届以来的许多学生，他们不仅极为努力而有兴趣地学着这门课，还经常主动同我讨论到处理教学内容方面的众多问题。受这种精神鼓舞，使我敢于将这份极不成熟的教材编写成书，以听取更多的批评与改进意见。

在编写本书时，曾得到俞文魮教授、蒋司勋副教授、金志华副教授等的帮助，由于考虑了他们的建议，使本书增色不少。施惠娟、唐志东及张峥等几位同学也曾对书稿提出过改进意见并演算了一些习题的解答。最后，对给编写本书以支持的老师、职工、学生表示衷心的感谢。由于编写时间仓促并限于个人的见闻与水平，书中定会留存不少错、漏或不妥之处，敬祈读者不吝指正。

编　者

目 录

注：带*的节、段属于超出《高等工业学校线性代数课程教学基本要求》的内容。

1 矩阵代数初步

本章以直捷的方式定义矩阵这一新的数学对象的有关概念、名称，并举例说明这些都是在实际中出现的；然后对矩阵的运算作了一些规定，讨论了简单的运算性质。通过示例、练习、习题，可以看出矩阵乘法及乘幂的实际意义。矩阵的分块乃是一项技术，在某些情况下可显示其作用。

1.1 基本概念

1.1.1 矩阵概念

定义 1

$m\times n$ 个元素，排成 m 行 n 列（横称行，纵称列）的矩形阵列（表）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1-1}$$

称为维是 $m\times n$ 的矩阵（Matrix），简称为 $m\times n$ 矩阵，常用单个大写字母，如 A，B，…，等记之，必要时也可以角标来

区别不同的矩阵，如A_1，A_2，…，等。

在书写矩阵时，也有将(1-1)的 $m\times n$ 矩阵写作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{或} \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right\|,$$

也常简记作

$$A=[a_{ij}]。$$

这里的 a_{ij} 是矩阵的第 i 行第 j 列的代表性元素（今后简称为该矩阵的 i-j 元素），元素用相应的小写字母，而它的两个下标则分别示明该元素在矩阵中所处的行号及列号。如对于

$$A=\begin{pmatrix} 17 & 7 & 11 & 21 \\ 15 & 9 & 13 & 19 \\ 18 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

这个 3×4 矩阵，有$a_{21}=15$，$a_{33}=14$，…，等。

在叙述普遍规律或从前后文容易明确时，一般就不特别指明所涉及矩阵的维，而在必要时常用

$$\underset{m\times n}{A} \quad \text{或} \quad A_{m\times n}$$

表明A是 $m\times n$ 矩阵。

1.1.2 一些特殊的矩阵

矩阵（1-1）的元素可以全是实数，也可以出现复数（虚数），或者元素本身就是个矩阵或其他更一般的数学对象。我

们分别称这种矩阵为实矩阵、复矩阵、超矩阵等。本书内容主要在实数范围内展开，故除了另作说明外，一般涉及的总是实矩阵。

从矩阵的形状看，遇到最多的是在(1-1)中 $m=n$ 的情形，这时就称之为 n 阶方阵或 n 阶矩阵。另外，只有一列(即 $n=1$)或一行(即 $m=1$)的矩阵也常碰到，分别称为列矩阵或行矩阵，亦称为列向量或行向量。作为列向量、常用小写黑体字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \cdots$，等记之，而行向量被记作 $\boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{b}^T$，$\cdots$，或 $\boldsymbol{a}'$，$\boldsymbol{b}'$，$\cdots$。如

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1-2}$$

是个 2 阶矩阵，而

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{1-3}$$

是个 2 维列向量。对向量而言，称其元素为向量的分量，分量的个数即为向量的维，故称(1-3)是 2 维向量。今后凡未作特别说明，讲到向量均是指列向量。

从矩阵中元素零的分布看，也可区分出几种常见的特殊形式的矩阵。为此，先引进下面的定义。

定义 2

对于 $m\times n$ 矩阵 A(1-1)，记 $k=\min\{m, n\}$，称元素 a_{11}，$a_{22}, \cdots$，a_{kk} 位于 A 的(主)对角线上，并称 a_{ii} 为 A 的第 i 个对角线元素。元素 $a_{i,i+1}$ 位于 A 的上对角线上，而元素 $a_{i,i-1}$ 位于 A 的下对角线上。

对于方阵，主对角线是自左上角到右下角的那根联线。在(1-4)这个四阶矩阵中，δ示明其主对角线，而μ及λ分别标示上、下对角线。

$$\begin{pmatrix} \delta & \mu & \times & \times \\ \lambda & \delta & \mu & \times \\ \times & \lambda & \delta & \mu \\ \times & \times & \lambda & \delta \end{pmatrix}。\tag{1-4}$$

对于方阵，若其非零元素只出现在对角线及其上（或右）方，就称为上三角阵(Upper Triangular Matrix)，记作：U或R。如

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是四阶上三角阵。值得注意的是，对角线下方的元素必为零而其他元素可以是零也可以不是零。相反，非零元素只出现在对角线及其下（或左）方的方阵为下三角阵(Lower Triangular Matrix)记作L。如

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

是个三阶下三角阵。

一个既是上三角又是下三角的矩阵称为对角阵(Diagonal Matrix)，即非零元素只可能在主对角线上出现的方阵，如

$$D=\begin{pmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

是个三阶的对角阵。显然，由对角线上的元素就足以确定对角阵本身，故常将这对角阵记作

$$D=\mathrm{diag}\ (12,3,4)。$$

而$\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$表示一对角线元素为$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$的$n$阶对角阵，详细写出就是

$$\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)=\begin{pmatrix}\delta_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \delta_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \delta_n\end{pmatrix}。\qquad (1\text{-}5)$$

当然允许某些δ等于零。对角线元素全相等的，等于某个数量δ的对角阵称为纯量阵或数量阵(Scalar Matrix)，特别称$\delta=1$的纯量阵为单位阵，记作I或E，分别是英文 Identity Matrix及俄文 Единица Матрица 名词的首字母，必要时在其下角标明阶数，如

$$I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}。$$

练习 1 在下列矩阵中，指出对角阵，三角阵，单位阵，

纯量阵。

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\0&4&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

练习 2 由本段所列各特殊形式矩阵的概念，指出其从属关系。如单位阵$\Longrightarrow$纯量阵，意即单位阵必为纯量阵。

练习 3 写出 4×5 矩阵A，若其元素$a_{ij}=2i-j$。

1.1.3 矩阵从哪里来

从矩阵问题的众多来源中，这里描述几个便于说明的例子。

例 1 （通路矩阵） A 省两个城市A_1,A_2和B省三个城市B_1,B_2,B_3的交通联接情况如图 1-1 所示，每条线上的数字表示联接该两城市的不同通路总数。由该图提供的通路信息，可用矩阵形式表示，以便存贮、计算与利用。称为通路矩阵。这里

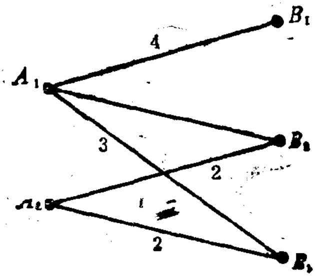

图 1-1

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix}4 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\
\begin{matrix}B_1 & \quad B_2 & \quad B_3\end{matrix} &
\end{array}$$

的行表示A省城市而列是 B 省的城市。

工厂中常用管道联接各种设备，于是也可用一矩阵表明各设备间的连通情况。

例 2 （价格矩阵） 四种食品（Food）在三家商店（Shop）中，单位量的售价（以某货币单位计）可用以下矩阵给出

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 17 & 7 & 11 & 21 \\ 15 & 9 & 13 & 19 \\ 18 & 8 & 15 & 19 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \end{array} \tag{1-6}$$

这里的行表示商店而列为食品，例如第二列就是第二种食品，其三个分量表示该食品在三家商店中的三个售价。

涉及到两个集合（上面分别是A省城市与B省城市，食品与商店）且其元素间由某一数集（上面分别是通路数目，价格）相关联的场合，常会出现这样的矩阵。

例 3 （原子矩阵） 在复杂化学反应系统中，涉及到众多的化学物。为了定量地研究反应、平衡等问题。可引进表示这种系统的原子矩阵。例如在合成氨生产中，甲烷与水蒸气生成合成气的阶段，系统内除一些惰性气体外，还存在以下七种化学物：CH_4，H_2O，H_2，CO，CO_2，C，C_2H_6。这时可写出原子矩阵：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} CH_4 & H_2O & H_2 & CO & CO_2 & C & C_2H_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ H \\ O \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{1-7}$$

例 4 （赢得矩阵） 一个称为对策论或竞赛论的数学分支，是研究社会现象的一种特定数学方法。我国古代的"齐王

赛马”，就是一个例子，说的是战国时代齐王与其大将田忌赛马，双方约定各出上、中、下三个等级的马各一匹进行比赛，这样共赛马三次，每次比赛的败者付给胜者一百金。已知在同一等级的马中，齐王之马可稳胜田忌之马，而田忌的上、中等级的马可胜齐王较次等级的马。

齐王及田忌赛马的排列顺序，各有六种方案（策略）：

（上，中，下），（中，上，下），（下，中，上），

（上，下，中），（中，下，上），（下，上，中），

若将这六种策略依次从 1 到 6 编号，则可写出齐王的赢得矩

$$\begin{array}{cc} & \text{田忌策略}\ \longrightarrow \\ \text{齐王策略}\downarrow & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} = P。$$

阵。例如，这里的$p_{32}=-1$，意即齐王采用策略 3，即以下、中、上顺序出马，而田忌采用策略 2，即以中、上、下顺序出马，则比赛结束时齐王的净赢得数为-100金。

练习 4 图1-2示明了 D 国三个城市，E国三个城市，F国两个城市相互间之通路。在 D 国和 E 国间，城市通路情况可用下列矩阵表示，

$$
\begin{array}{c}
 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}。
$$

其中的数字 1 与 0，指相应城市间的通路数。试写出 E 国与 F 国的通路矩阵，并进一步写出D国与F国的通路矩阵。

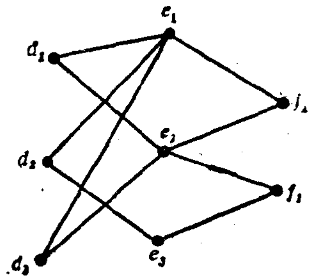

图 1-2

练习 5 一个成年人每天至少需要的营养，包括 2000 单位蛋白质、2500 单位脂肪以及 8500单位碳水化合物。下表列出四种食品每克所含这些养分的单位数。

		蛋白质	脂　肪	碳水化合物
食	1	2	1	16
	2	8	2	0
	3	0	28	0
品	4	2	9	1

若用x_i($i=1$，2，3，4)表食用第 i 种食品的数量(克)，试用不等式表示达到或超过这极小营养需求量时 x_i 应适合的条件。

1.2 矩阵代数

1.2.1 代数运算

在对矩阵定义运算法则之前，有必要先规定矩阵相等的