

非线性半群与Banach空间中
的微分方程

[罗] Viorel Barbu著 张石生译

四川大學出版社

一九八七年四月

V. Barbu
Nonlinear semigroups and
differential equations in
Banach spaces
Noordhoff international publishing Leyden
The Netherlands printed in 1976

非线性半群与Banach空间中的微分方程

[罗]V. 巴布 著 张石生 译

四川大学出版社出版 四川省新华书店发行

百花潭中学印刷厂印刷

开本850×1168毫米1/32 印张13.4 字数332千

1987年4月第一版 1987年4月第一次印刷

印数： 1 — 2000册

书号：13404·11 定价：2.20元

译者序言

1976年罗马尼亚Noodhoff国际出版社出版的V. Barbu著的《非线性半群和Banach空间中的微分方程》一书，是一本总结和论述近年来迅速发展的Banach空间中的微分方程和非线性半群理论的重要专著。从发行以来，在国际上有较大的影响，不少国家纷纷发表文章评述和介绍该书的内容。

该书取材新颖，内容精炼。它把近年来散见于世界各主要杂志发表的关于Banach空间中非线性半群、非线性泛函方程、非线性单调算子及与之相联系的非线性微分方程理论的主要结果经过精心处理，综合编纂而成。不少结果还是第一次发表。读完该书，即可对该领域当前国际发展状况有一个基本的了解。

全书共五章：

第一章是为阅读该书所必需具备的泛函分析的准备知识。其中包括：对偶映象、重新赋范定理、严格凸性和一致凸性、向量分布、Sobolev空间理论等。

第二章讨论Banach空间中非线性算子理论，其中包括极大单调算子理论、凸分析、次微分映象、循环单调算子理论和Banach空间散逸算子理论。

第三章讨论Banach空间中的微分方程。其中包括Banach空间中的非线性压缩半群理论和与散逸算子相关联的Banach空间中非线性微分方程的理论及其对凸控制问题等的应用。

第四章讨论Hilbert空间中非线性微分方程的理论及应用。其中包括Hilbert空间中非线性半群的生成理论及与Hilbert空间其他课题相联系的问题。例如正则化结果，变分发展不等式

方程和某些非线性Volterra方程。

第五章讨论双曲型的非线性微分方程和第二阶的非线性边值问题。

该书各章之末有一个简要的文献注释，指明该章结果发展概况，今后研究方向和当前急待研究的问题。书末附有一个比较全面的文献目录，可作为进一步研究的参考。

该书内容基本上作到自给自足。阅读该书只假定具有泛函分析、函数论和偏微分方程的基础知识，因此该书可供数学系高年级学生、研究生、数学工作者和理论物理科学工作者参考。

英 文 版 序 言

英文版与罗马尼亚文版不同之处在于有些地方已作了改动，比如第一章，第三章的第三节，第四章的第四节和第五章的第二节，在英文版中已全部改写。另外，与Riccati方程， L^1 中的拟线性二阶椭圆方程，非线性变分不等式方程，积分—微分方程和双点边值问题等有关的一些新的章节已写入书中。

第一版中的错误，通过朋友们的帮助得以纠正。

V. 巴布

1975年1月于Jassy

目 录

英文版序言.....	(1)
------------	-----

第一章 绪 论

§ 1. 赋范空间的度量性质.....	(1)
1.1. 对偶映象.....	(1)
1.2. 严格凸的赋范空间.....	(4)
1.3. 一致凸的Banach空间.....	(4)
§ 2. 定义在实区间上的向量函数.....	(6)
2.1. 绝对连续向量函数.....	(6)
2.2. 向量分布和 W^k, p 空间.....	(9)
2.3. Sobolev空间.....	(15)
§ 3. 连续线性算子的半群.....	(18)
3.1. (C_0) 类半群, Hille—Yosida定理.....	(18)
3.2. 解析半群.....	(25)
3.3. 非齐次线性微分方程.....	(26)

第二章 Banach空间中的非线性算子

§ 1. 极大单调算子.....	(29)
1.1. 定义和基本概念.....	(29)
1.2. 一个一般的扰动定理.....	(38)
1.3. 一非线性椭圆边值问题.....	(47)
§ 2. 次微分映象.....	(49)

2.1. 下半连续的凸函数	(49)
2.2. 凸函数的次微分	(52)
2.3. 循环单调算子的某些例子	(61)
§ 3. Banach 空间中的散逸集	(75)
3.1. 散逸集的基本性质	(75)
3.2. 散逸集的扰动	(86)
3.3. Hilbert 空间中的 Riccati 方程	(97)
文献注释	(105)

第三章 Banach 空间中的微分方程

§ 1. Banach 空间中的非线性压缩半群	(108)
1.1. 非线性半群的一般性质	(108)
1.2. 指数公式	(115)
1.3. 收敛定理	(120)
1.4. 非线性半群的生成	(128)
§ 2. 拟自治的微分方程	(138)
2.1. 存在性定理	(138)
2.2. 周期解	(155)
2.3. 例子	(157)
§ 3. 与连续散逸算子相关联的微分方程	(171)
3.1. 一个一般的存在性结果	(172)
3.2. m -散逸算子的连续扰动	(178)
3.3. L^1 中的半线性二阶椭圆方程	(182)
§ 4. 非定常的非线性微分方程	(185)
4.1. 与散逸集相关联的发展方程	(186)
4.2. 与非线性单调的 h -半连续算子相关联的发展方程	(188)

文献注释	(192)
------	---------

第四章 Hilbert空间中的非线性微分方程

§ 1. Hilbert空间中的非线性半群	(195)
1.1. 非线性形式的Hille—Yosida定理	(195)
1.2. 指数公式	(201)
1.3. 关于非线性半群的不变集	(207)
§ 2. 初始数据上的光滑效应	(213)
2.1. $A = \partial \varphi$ 的情形	(214)
2.2. $\text{int}D(A) \neq \emptyset$ 的情形	(224)
2.3. 应用	(227)
§ 3. 变分发展不等式方程	(235)
3.1. 关于 $u(t)$ 的单侧条件	(235)
3.2. 关于 $\frac{du}{dt}(t)$ 的单侧条件	(240)
3.3. 一类非线性变分不等式方程	(247)
3.4. 应用	(255)
§ 4. Hilbert空间中具正核的非线性Volterra方程	(265)
4.1. 正核	(265)
4.2. $A = \partial \varphi$ 的方程 (4.1)	(269)
4.3. A 为 d -半连续的方程 (4.1)	(280)
4.4. 一类积分—微分方程	(285)
4.5. 前一情形的进一步研究	(295)
文献注释	(300)

第五章 二阶非线性微分方程

§ 1. 双曲型的非线性微分方程	(304)
------------------	---------

1.1. 方程 $\frac{d^2u}{dt^2} + Au + M\left(\frac{du}{dt}\right) \ni f$	(304)
1.2. 前一情形的进一步研究	(307)
1.3. 例子	(318)
1.4. 奇异扰动和双曲变分不等式方程	(322)
1.5. 非线性波动方程	(328)
§ 2. 二阶非线性微分方程的边值问题	(341)
2.1. 一类双点边值问题	(341)
2.2. 例子	(352)
2.3. 半轴上的一个边值问题	(359)
2.4. 非线性极大单调算子的平方根	(375)
文献注释	(387)
文 献	(390)
主要名词索引	(416)

第一章 绪 论

本章的目的是为以后参考方便而提供某些基本的结果。为了不使本章篇幅过长,某些基本的定理(比如重新赋范定理和Sobolev空间的“迹”定理)只述而不证。对其他的一些结果,因为它们在泛函分析的教科书或有关专著中容易查到,我们也只给出证明的一个概要,并给出适当的参考文献。

§ 1. 赋范空间的度量性质

1.1. 对偶映射

在本章和下一章将假定 X 为一实赋范空间,而 X^* 表 X 的对偶空间, $x^*(\in X^*)$ 在 $x \in X$ 所取的值以 (x, x^*) 或 (x^*, x) 记之。 X 的范数以 $\|\cdot\|$ 记之,而 X^* 的范数,它常常是 X^* 的对偶范数,以 $\|\cdot\|_*$ 记之。如不致于混淆,我们将略去 X^* 中范数 $\|\cdot\|_*$ 的星号,把 X 中的范数和 X^* 中的对偶范数,都用 $\|\cdot\|$ 表之。

以后我们用符号“ \lim ”或 \longrightarrow 表示强收敛,而用“ $w\text{-}\lim$ ”或 \rightharpoonup 表 X 上的弱收敛(相应地表 X^* 上的弱*收敛)

赋以弱拓扑的空间 X 以 X_w 记之,类似地, X^* 表具弱*拓扑的空间 X^* 。

与每一 $x \in X$ 相对的有一集合

$$F(x) = \{x^* \in X^*; (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}. \quad (1.1)$$

由Hahn-Banach定理直接得知,对任一 $x \in X$, $F(x) \neq \emptyset$ 。

定义1.1. 多值映射 $F: X \rightarrow X^*$ 称为 X 的对偶映射。

人们已经知道, F 的性质与 X 中范数 $\|\cdot\|$ 的可微性紧密相

关.

设 $\Delta(x_0, y, t) = t^{-1}(\|x_0 + ty\| - \|x_0\|)$ 是 $\|x\|$ 在 x_0 处沿 y 方向的差商, 因为函数 $t \mapsto \|x_0 + ty\|$ 是凸的, 故易知当 $t > 0$ 时, $t \mapsto \Delta(x_0, y, t)$ 是单调增的, 而且对一切 $t > 0$, $\Delta(x_0, y, t) \geq -\|y\|$. 这就表明 $\|x_0 + ty\|$ 在 $t=0$ 处的右导数 $\Delta'_+(x_0, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \Delta(x_0, y, t)$ 存在. 因为 $\Delta(x_0, y, -t) = -\Delta(x_0, -y, t)$, 故得知, 对负值 t , $\Delta(x_0, y, t)$ 也是单调增的和上有界的, 因而左导数 $\Delta'_-(x_0, y) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \Delta(x_0, y, t)$ 也存在, 且

$$\Delta'_-(x_0, y) = -\Delta'_+(x_0, -y).$$

于是, 我们得出不等式:

$$\begin{aligned} \Delta(x_0, y, -t) &\leq \underline{\Delta'_-(x_0, y)} \leq \Delta'_+(x_0, y) \\ &\leq \Delta(x_0, y, t), \quad t > 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

如果 $\Delta'_-(x_0, y) = \Delta'_+(x_0, y)$, 则公共值 $\Delta'(x_0, y)$ 是 $\|x\|$ 在 $x=x_0$ 处的 Gâteaux 导数.

命题 1.1. 对每一 $x_0 \in X$, $F(x_0)$ 是所有这样的点 $x_0^* \in X^*$ 的集合, 其使得下式成立:

$$\Delta'_-(x_0, y) \|x_0\| \leq (y, x_0^*) \leq \Delta'_+(x_0, y) \|x_0\|, \quad \forall y \in X \quad (1.3)$$

证: 设 x_0^* 满足 (1.3). 因 $\Delta(x_0, y, -t) \geq -\|y\|$, $\Delta'_+(x_0, y) \leq \|y\|$. 于是由 (1.2) 得 $\leq \|y\|$

$$|(y, x_0^*)| \leq \|x_0\| \cdot \|y\|, \quad \forall y \in X \quad (1.4)$$

在 (1.2) 中取 $y=x_0$, 于是由 (1.3) 得 $(x_0, x_0^*) = \|x_0\|^2$. 这与 (1.4) 一起即表明 $x_0^* \in F(x_0)$.

反之, 设 $x_0^* \in F(x_0)$, 由 (1.1) 有

$$\begin{aligned} \|x_0\|^2 + t(y, x_0^*) &= (x_0 + ty, x_0^*) \\ &\leq \|x_0\| \cdot \|x_0 + ty\|, \quad t > 0. \end{aligned}$$

由此即得

$$(y, x_0^*) \leq t^{-1} (\|x_0 + ty\| - \|x_0\|) \|x_0\|, \quad t > 0, y \in X.$$

同理可得

$$(y, x_0^*) \geq t^{-1} (\|x_0\| - \|x_0 + ty\|) \|x_0\|, \quad \forall t > 0, y \in X.$$

因此即得 (1.3). \square

设 $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$: $X \times X \rightarrow R^1 = (-\infty, +\infty)$ 是由下式定义的函数:

$$\langle y, x \rangle_* = \sup \{ (y, x^*) : x^* \in F(x) \} \quad (1.5)$$

因 $F(x)$ 是 X^* 之一弱*紧集, 显然对每一对 $(x, y) \in X \times X$, 有 $\langle y, x \rangle_* < \infty$, 而且可以达到定义 $\langle y, x \rangle_*$ 的上确界值.

命题 1.2. 设 $x, y \in X$, 则

- (i) $\langle \alpha y, \beta x \rangle_* = \alpha \beta \langle y, x \rangle_*$, 当 $\alpha, \beta \geq 0$ 时.
- (ii) $\langle \alpha x + y, x \rangle_* = \alpha \|x\|^2 + \langle y, x \rangle_*$, 当 $\alpha \in R^1$.
- (iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$: $X \times X \rightarrow R^1$ 是上半连续的.

证: (i) 和 (ii) 的证明不难, 故略去.

为证 (iii), 只要证明: 在 X 中当 $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$ 时, 就有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, x_n \rangle_* \leq \langle y_0, x_0 \rangle_* \quad (1.6)$$

事实上, 因 $F(x_n)$ 是弱*紧的, 故存在 $\eta_n^* \in F(x_n)$, 使得 $\langle y_n, x_n \rangle_* = (y_n, \eta_n^*)$. 不失一般性, 可以假定极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, x_n \rangle_*$

存在. 设 η_0^* 是 $\{\eta_n^*\}$ 的任一弱*极限点, 于是有

$$(x_0, \eta_0^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, \eta_n^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^2 = \|x_0\|^2.$$

而且

$$\| \eta_0^* \| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \| \eta_n^* \| = \lim_{n \rightarrow \infty} \| x_n \| = \| x_0 \| .$$

这就表明 $\eta_0^* \in F(x_0)$. 另因 $y_n \rightarrow y_0$, 故得所求的不等式

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, x_n \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, \eta_n^* \rangle = \langle y_0, \eta_0^* \rangle \\ &\leq \langle y_0, x_0 \rangle . \end{aligned}$$

1.2. 严格凸的赋范空间

赋范空间 X 称为**严格凸的**, 如果 X 的单位球 S 是严格凸的, 即 S 的边界 ∂S 不含线段. 严格凸性的等价性条件可以在 G. Köthe [1] 中找到.

命题1.3. 设 X^* 是严格凸的, 则对偶映象 $F: X \rightarrow X^*$ 是单值的 d -半连续的 (即由 X 到 X^* 是连续的).

证: 显然, 对每一 $x \in X$, $F(x)$ 是 X^* 的一闭凸集, 因 $F(x) \subset S(\theta, \|x\|)$ (这里 $S(\theta, \|x\|)$ 表以 θ 为心, $\|x\|$ 为半径的球), 故知 $F(x)$ 只含唯一点. 设 $\{x_n\} \subset X$ 强收敛于 x_0 . 又设 x_0^* 是 $F(x_n)$ 之一弱*聚点. 易于看出, $(x_0, x_0^*) = \|x_0\|^2$. 因 $\|x_0^*\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n)\| = \|x_0\|$, 故得 $x_0^* \in F(x_0)$.

下面的定理属于 E. Asplund [1], [2].

定理1.1. 设 X 是一自反 Banach 空间, 其范数为 $\|\cdot\|$. 则在 X 上存在一等价范数 $\|\cdot\|_0$, 使得在此范数下, X 是严格凸的, 又在对偶范数 $\|\cdot\|_0^*$ 下, X^* 也是严格凸的.

我们省略这一重要定理的证明, 因为它涉及泛函分析教科书中极少用到的一些特殊的考虑和结果.

1.3. 一致凸的 Banach 空间

一线性赋范空间 X 称为**一致凸的**, 如果对每一 $\epsilon, 0 < \epsilon \leq 2$,

存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 当 $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ 且 $\|x-y\| \geq \varepsilon$ 时, 就有 $\|x+y\| \leq 2(1-\delta(\varepsilon))$.

在应用中, 下面的强收敛判别准则是非常有用的.

命题1.4. 设 X 是一致凸的Banach空间, 设 $\{x_n\} \subset X$ 弱收敛于 x , 如果

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x\|, \quad (1.7)$$

则 $\{x_n\}$ 在 X 中强收敛于 x .

证: 如所周知, 由(1.7)即可推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\| \quad (1.8)$$

令 $y_n = x_n / \|x\|$, $y_0 = x / \|x\|$. 假定 $\{y_n\}$ 按 X 中的强拓扑不收敛于 y_0 , 于是存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\|y_{n'} - y_0\| \geq \varepsilon$, 其中 $\{y_{n'}\}$ 是 $\{y_n\}$ 的子序列. 下证由此将引出矛盾, 事实上, 因 X 是一致凸的, 故存在 $\delta > 0$, 使得 $\|y_{n'} + y_0\| \leq 2(1-\delta)$. 因 $y_{n'}$ 弱收敛于 y_0 , 于是有 $\|y_0\| \leq 1-\delta$. 矛盾. 命题得证. |

下面的自反性的判别准则属于D. Milman(其证明见K. Yosida [1]).

定理1.2. 每一一致凸的Banach空间是自反的.

我们已经看到, 对偶映象的连续性与对偶范数的凸性紧密相联系. 就此而论, 命题1.3可以更精确地表述如下(见T. Kato [2]).

命题1.5. 如果实Banach空间 X 的对偶空间 X^* 是一致凸的, 则对偶映象 $F: X \rightarrow X^*$ 在 X 的每一有界子集上是一致连续的.

证: 设在 X 中存在序列 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 使得 $\|u_n\| \leq M$, 当 $n \rightarrow \infty$, $\|u_n - v_n\| \rightarrow 0$, 而且对一切 n 有 $\|F(u_n) - F(v_n)\| \geq \varepsilon > 0$. 下证这将引出矛盾. 事实上, 设 $x_n = u_n / \|u_n\|$, $y_n = v_n / \|v_n\|$. 不失一般性, 我们可以假定, 对一切 n 有 $\|u_n\| > \alpha$, $\|v_n\| > \alpha$, 这里 $\alpha > 0$, 于是易于证明

$$\|x_n - y_n\| \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \infty.$$

其次, 我们有

$$\begin{aligned} (x_n, F(x_n) + F(y_n)) &= \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 \\ + (x_n - y_n, F(y_n)) &\geq 2 - \|x_n - y_n\|. \end{aligned}$$

这就指出 $\|F(x_n) + F(y_n)\|/2 \geq 1 - 2^{-1}\|x_n - y_n\|$. 因 $\|F(x_n)\| = \|F(y_n)\| = 1$, 且 X^* 是一致凸的, 故可推出, 在 X^* 中

$$F(x_n) - F(y_n) \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \infty.$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \|F(u_n) - F(v_n)\| &= \|u_n\| (F(x_n) - F(y_n)) \\ &+ (\|u_n\| - \|v_n\|) F(y_n). \end{aligned}$$

故在 X^* 中显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F(u_n) - F(v_n)) = 0.$$

矛盾, 由此矛盾即完成命题的证明. $\quad \blacksquare$

§ 2. 定义在实区间上的向量函数

2.1. 绝对连续的向量函数

设 $[0, T]$ 是一固定的实区间 ($0 < T < +\infty$), 设 X 是一实 Banach 空间.

定义在 $[0, T]$ 上的 X -值函数 $x(t)$ 称为在 $[0, T]$ 上是绝对连续的, 如果对每一 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 当 $\sum_n |\beta_n - \alpha_n| \leq \delta(\varepsilon)$ 且当 $m \neq n$, $(\alpha_n, \beta_n) \cap (\alpha_m, \beta_m) = \phi$ 时, 就有 $\sum_n \|x(\beta_n) - x(\alpha_n)\| \leq \varepsilon$. 这里 (α_n, β_n) 是包含于 $[0, T]$ 的任意的区间.

我们知道，实区间 $[0, T]$ 上的每一实值绝对连续函数 $x(t)$ ，在 $[0, T]$ 上是几乎处处可微的，而且可以表为其导数的不定积分。

下面的简单的例子表明，当 $x(t)$ 是 $[0, T]$ 到一般 Banach 空间 X 的绝对连续函数时上述结论不再成立。

设 $X = L^1(0, T)$ 是 $[0, T]$ 上一切实值可积函数的空间。设 $x(t) = x[0, t]: [0, T] \rightarrow X$ ，这里 $x[0, t]$ 表区间 $[0, t]$ 上的特徵函数。易知 $x(t)$ 是 $[0, T]$ 上的绝对连续函数，但 $x(t)$ 在 $[0, T]$ 上没有可微点。事实上，如果 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 处可微，则对每一 $x^* \in L^\infty(0, T) = (L^1(0, T))^*$ ，函数 $f(t) = (x(t), x^*)$ 在 $t=t_0$ 处可微。特别函数 $f(t) = \int_0^t h(s) ds$ 对任一 $h \in L^\infty(0, T)$ 也在 $t=t_0$ 处可微。现取函数 h 如下：

$$h(s) = \begin{cases} 1, & \text{当 } s < t_0 \\ -1, & \text{当 } s > t_0 \end{cases}$$

于是 f 由下式给出：

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{当 } t < t_0 \\ 2t_0 - t, & \text{当 } t \geq t_0 \end{cases}$$

显然它在 $t=t_0$ 处不可微，矛盾。由此矛盾知结论成立。|

可是我们可以证明下面的定理 (Y. Komura [1])。

定理 2.1. 设 X 是一自反的 Banach 空间，则 $[0, T]$ 上的每一 X -值的绝对连续函数 $x(t)$ 在 $(0, T)$ 上是几乎处处可微的 (a.e. 可微的)，而且有

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \left(\frac{dx}{ds} \right)(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.1)$$

证：因 $x(t)$ 在 $[0, T]$ 上连续，故 $\{x(t); 0 \leq t \leq T\}$ 是 X 的紧子集。于是由 $\{x(t); 0 \leq t \leq T\}$ 所生成的子空间的强闭包是一可分的 Banach 空间。因此，我们可以假定 X 是一可分的 Banach

空间. 因函数 $x(t)$ 是绝对连续的, 故它是 $[0, T]$ 上的有界变差函数. 设 $V(x, t)$ 表 x 在 $[0, t]$ 上的变差, 由于函数 $t \mapsto V(x, t)$ 在 $[0, T]$ 上是单调不减的, 故由不等式

$$\|x(t+h) - x(t)\| \leq V(x, t+h) - V(x, t),$$

$$0 \leq t \leq t+h \leq T$$

即可得出

$$\int_0^{T-h} \left\| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right\| dt \leq V(x, T), \quad \forall h > 0. \quad (2.2)$$

利用常规的方法, 由 (2.2) 即得

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right\| < \infty, \quad \text{a. e. } t \in (0, T). \quad (2.3)$$

因空间 X 是自反的和可分的, 故 X^* 也是可分的. 设 $\{x_n^*\}$ 在 X^* 中是强稠密的, 于是对每一 n , 显然存在 $[0, T]$ 之一子集 N_n , 使得函数 $t \mapsto (x(t), x_n^*)$ 在 $(0, T) \setminus N_n$ 的每一点是可微的, 且 $\text{mes} N_n = 0$. (在各种情形所涉及的测度概念, 除相反声明外, 都理解为 Lebesgue 测度). 我们用 N_0 表 $(0, T)$ 中所有使得下式成立的点 t 的集合:

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} \left\| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right\| = \infty.$$

并设 $N = \bigcup_{n=0} N_n$, 于是由 (2.3) 得知 $\text{mes} N = 0$, 而且对每一

$t \in (0, T) \setminus N$, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $\left\| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right\|$ 是有界的. 因对

每一 $t \in (0, T) \setminus N$ 极限 $\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, x_n^* \right)$ 存

在, 故对每一 $t \in (0, T) \setminus N$ 和每一 $x^* \in X^*$, 有