非线性半群与Banach空间中的微分方程

〔罗〕Viorel Barbu著　张石生译

四川大学出版社

一九八七年四月

V. Barbu

Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces

Noordhoff international publishing Leyden

The Netherlands printed in 1976

非线性半群与Banach空间中的微分方程

［罗］V. 巴布 著 张石生 译

四川大学出版社出版 四川省新华书店发行

百花潭中学印刷厂印刷

开本850×1168毫米1／32 印张13.4 字数332千

1987年4月第一版 1987年4月第一次印刷

印数：1 —— 2000册

书号：13404·11 定价：2.20元

译 者 序 言

1976年罗马尼亚Noodhoff国际出版社出版的V.Barbu著的《非线性半群和Banach空间中的微分方程》一书，是一本总结和论述近年来迅速发展的Banach空间中的微分方程和非线性半群理论的重要专著。从发行以来，在国际上有较大的影响，不少国家纷纷发表文章评述和介绍该书的内容。

该书取材新颖，内容精炼。它把近年来散见于世界各主要杂志发表的关于Banach空间中非线性半群、非线性泛函方程、非线性单调算子及与之相联系的非线性微分方程理论的主要结果经过精心处理，综合编纂而成。不少结果还是第一次发表。读完该书，即可对该领域当前国际发展状况有一个基本的了解。

全书共五章：

第一章是为阅读该书所必需具备的泛函分析的准备知识。其中包括：对偶映象、重新赋范定理、严格凸性和一致凸性、向量分布、Sobolev空间理论等。

第二章讨论Banach空间中非线性算子理论，其中包括极大单调算子理论、凸分析、次微分映象、循环单调算子理论和Banach空间散逸算子理论。

第三章讨论Banach空间中的微分方程。其中包括Banach空间中的非线性压缩半群理论和与散逸算子相关联的Banach空间中非线性微分方程的理论及其对凸控制问题等的应用。

第四章讨论Hilbert空间中非线性微分方程的理论及应用。其中包括Hilbert空间中非线性半群的生成理论及与Hilbert空间其他课题相联系的问题。例如正则化结果，变分发展不等式

方程和某些非线性Volterra方程。

第五章讨论双曲型的非线性微分方程和第二阶的非线性边值问题。

该书各章之末有一个简要的文献注释，指明该章结果发展概况，今后研究方向和当前急待研究的问题。书末附有一个比较全面的文献目录，可作为进一步研究的参考。

该书内容基本上作到自给自足。阅读该书只假定具有泛函分析、函数论和偏微分方程的基础知识，因此该书可供数学系高年级学生、研究生、数学工作者和理论物理科学工作者参考。

英 文 版 序 言

英文版与罗马尼亚文版不同之处在于有些地方已作了改动，比如第一章，第三章的第三节，第四章的第四节和第五章的第二节，在英文版中已全部改写。另外，与Riccati方程，L^1中的拟线性二阶椭园方程，非线性变分不等式方程，积分一微分方程和双点边值问题等有关的一些新的章节已写入书中。

第一版中的错误，通过朋友们的帮助得以纠正。

V．巴布

1975年1月于Jassy

目　录

第三章　Banach空间中的微分方程

第四章 Hilbert空间中的非线性微分方程

第五章 二阶非线性微分方程

第一章 绪 论

本章的目的是为以后参考方便而提供某些基本的结果。为了不使本章篇幅过长，某些基本的定理（比如重新赋范定理和Sobolev空间的“迹”定理）只述而不证。对其他的一些结果，因为它们在泛函分析的教科书或有关专著中容易查到，我们也只给出证明的一个概要，并给出适当的参考文献。

§1．赋范空间的度量性质

1.1.对偶映象

在本章和下一章将假定X为一实赋范空间，而X^*表X的对偶空间，x^*（$\in X^*$）在$x\in X$所取的值以（x，x^*）或（x^*，x）记之．X的范数以$\|\cdot\|$记之，而X^*的范数，它常常是X^*的对偶范数，以$\|\cdot\|_*$记之。如不致于混淆，我们将略去X^*中范数$\|\cdot\|$的星号，把X中的范数和X^*中的对偶范数，都用$\|\cdot\|$表之。

以后我们用符号“lim”或$\longrightarrow$表示强收敛，而用“w-lim”或$\longrightarrow$表X上的弱收敛（相应地表X^*上的弱*收敛）

赋以弱拓扑的空间X以X_w记之.类似地，X^*_{w}表具弱*拓扑的空间X^*。

与每一$x\in X$相对的有一集合

$$F(x)=\{x^*\in X:\ (x,\ x^*)=\|x\|^2=\|x^*\|^2\}.\quad(1.1)$$

由Hahn—Banach定理直接得知，对任一$x\in X$，$F(x)\neq\varnothing$.

定义1.1. 多值映象F：$X\to X^*$称为X的对偶映象.

人们已经知道，F的性质与X中范数$\|\cdot\|$的可微性紧密相

关.

设$\Delta(x_0, y, t)=t^{-1}(\|x_0+ty\|-\|x_0\|)$是$\|x\|$在$x_0$处沿y方向的差商，因为函数$t\longmapsto\|x_0+ty\|$是凸的，故易知当$t>0$时，$t\longmapsto\Delta(x_0,y,t)$是单调增的，而且对一切$t>0$，$\Delta(x_0, y, t)\geq-\|y\|$. 这就表明$\|x_0+ty\|$在$t=0$处的右导数$\Delta'_+(x_0, y)=\lim\limits_{t\to 0^+}\Delta(x_0, y, t)$存在. 因为$\Delta(x_0, y, -t)=-\Delta(x_0, -y, t)$，故得知，对负值t，$\Delta(x_0,y,t)$也是单调增的和上有界的，因而左导数$\Delta'_-(x_0, y)=\lim\limits_{t\to 0^-}\Delta(x_0, y, t)$也存在，且

$$\Delta'_-(x_0, y)=-\Delta'_+(x_0, -y).$$

于是，我们得出不等式：

$$\Delta(x_0,y,-t)\leqslant\underline{\Delta'_-(x_0, y)\leqslant\Delta'_+(x_0, y)}$$
$$\leqslant\Delta(x_0,y,t),\ t>0 \qquad (1.2)$$

如果$\Delta'_-(x_0, y)=\Delta'_+(x_0, y)$,则公共值$\Delta'(x_0, y)$是$\|x\|$在$x=x_0$处的Gâteaux导数。

命题1.1. 对每一$x_0\in X$, $F(x_0)$是所有这样的点$x_0^*\in X^*$的集合，其使得下式成立：

$$\Delta'_-(x_0, y)\|x_0\|\leqslant(y, x_0^*)\leqslant\Delta'_+(x_0, y)\|x_0\|,$$
$$\forall y\in X \qquad (1.3)$$

证：设x_0^*满足(1.3). 因$\Delta(x_0, y, -t)\geq-\|y\|$, $\leq\|y\|$

$\Delta'_+(x_0, y)\leqslant\|y\|$. 于是由(1.2)得

$$|(y, x_0^*)|\leqslant\|x_0\|\cdot\|y\|,\ \forall y\in X \qquad (1.4)$$

在(1.2)中取$y=x_0$，于是由(1.3)得$(x_0, x_0^*)=\|x_0\|^2$. 这与(1.4)一起即表明$x_0^*\in F(x_0)$。

反之，设 $x_0^*\in F(x_0)$，由（1.1）有

$$\|x_0\|^2+t(y,x_0^*)=(x_0+ty,\ x_0^*)$$

$$\leqslant\|x_0\|\cdot\|x_0+ty\|,\ t>0.$$

由此即得

$$(y,\ x_0^*)\leqslant t^{-1}(\|x_0+ty\|-\|x_0\|)\|x_0\|,$$

$$t>0,\ y\in X.$$

同理可得

$$(y,\ x_0^*)\geq t^{-1}(\|x_0\|-\|x_0+ty\|)\|x_0\|,$$

$$\forall t>0,\ y\in X.$$

因此即得（1.3）. ▎

设$\langle,\rangle_s$: $X\times X\to R^1=(-\infty,+\infty)$是由下式定义的函数：

$$\langle y,\ x\rangle_s=\sup\{(y,\ x^*):\ x^*\in F(x)\} \qquad (1.5)$$

因$F(x)$是X^*之一弱*紧集，显然对每一对$(x,\ y)\in X\times X$，有$\langle y,\ x\rangle_s<\infty$，而且可以达到定义$\langle y,\ x\rangle_s$的上确界值.

命题1.2. 设$x,\ y\in X$，则

（i）$\langle\alpha y,\ \beta x\rangle_s=\alpha\beta\langle y,\ x\rangle_s$，当$\alpha,\ \beta\geq 0$时.

（ii）$\langle\alpha x+y,\ x\rangle_s=\alpha\|x\|^2+\langle y,\ x\rangle_s$，当$\alpha\in R^1$.

（iii）$\langle,\rangle_s$: $X\times X\to R^1$是上半连续的.

证：（i）和（ii）的证明不难，故略去.

为证（iii），只要证明：在X中当$x_n\to x_0$，$y_n\to y_0$时，就有

$$\limsup_{n\to\infty}\langle y_n,x_n\rangle_s\leqslant\langle y_0,\ x_0\rangle_s \qquad (1.6)$$

事实上，因$F(x_n)$是弱*紧的，故存在$\eta_n^*\in F(x_n)$，使得$\langle y_n,\ x_n\rangle_s=(y_n,\ \eta_n^*)$. 不失一般性，可以假定极限$\lim\limits_{n\to\infty}\langle y_n,\ x_n\rangle_s$存在. 设$\eta_0^*$是$\{\eta_n^*\}$的任一弱*极限点，于是有

$$(x_0,\ \eta_0^*)=\lim_{n\to\infty}(x_n,\ \eta_n^*)=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|^2=\|x_0\|^2.$$

而且

$$\| \eta_0^* \| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \| \eta_n^* \| = \lim_{n\to\infty} \| x_n \| = \| x_0 \| .$$

这就表明 $\eta_0^* \in F(x_0)$. 另因$y_n \to y_0$，故得所求的不等式

$$\lim_{n\to\infty} \langle y_n, x_n \rangle_s = \lim_{n\to\infty} (y_n, \eta_n^*) = (y_0, \eta_0^*)$$

$$\leqslant \langle y_0, x_0 \rangle_s .$$

1.2. 严格凸的赋范空间

赋范空间X称为**严格凸的**，如果X的单位球S是严格凸的，即S的边界∂S不含线段. 严格凸性的等价性条件可以在G. Köthe [1] 中找到.

命题1.3. 设X^*是严格凸的，则对偶映象F：$X \to X^*$是单值的d—半连续的（即由X到X^*_w是连续的）.

证：显然，对每一$x \in X$，$F(x)$是X^*的一闭凸集，因$F(x) \subset S(\theta, \| x \|)$（这里$S(\theta, \| x \|)$表以$\theta$为心，$\| x \|$为半径的球），故知$F(x)$只含唯一点. 设$\{x_n\} \subset X$强收敛于$x_0$. 又设$x_0^*$是$F(x_n)$之一弱*聚点. 易于看出，$(x_0, x_0^*) = \| x_0 \|^2$. 因 $\| x_0^* \| \leqslant \lim_{n\to\infty} \| F(x_n) \| = \| x_0 \|$，故得$x_0^* \in F(x_0)$.

下面的定理属于E. Asplund [1]，[2].

定理1.1. 设X是一自反Banach空间，其范数为$\| \cdot \|$. 则在X上存在一等价范数$\| \cdot \|_0$，使得在此范数下，X是严格凸的，又在对偶范数$\| \cdot \|_0^*$下，X^*也是严格凸的.

我们省略这一重要定理的证明，因为它涉及泛函分析教科书中极少用到的一些特殊的考虑和结果.

1.3. 一致凸的Banach空间

一线性赋范空间X称为**一致凸的**，如果对每一ε，$0 < \varepsilon \leqslant 2$，

存在$\delta(\varepsilon)>0$，当$\|x\|\leqslant 1$，$\|y\|\leqslant 1$且$\|x-y\|\geqslant\varepsilon$时，就有$\|x+y\|\leqslant 2(1-\delta(\varepsilon))$.

在应用中，下面的强收敛判别准则是非常有用的.

命题1.4. 设X是一致凸的Banach空间，设$\{x_n\}\subset X$弱收敛于x，如果

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n\|\leqslant\|x\|, \tag{1.7}$$

则$\{x_n\}$在X中强收敛于x.

证：如所周知，由(1.7)即可推出

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\| \tag{1.8}$$

令$y_n=x_n/\|x\|$，$y_0=x/\|x\|$. 假定$\{y_n\}$按X中的强拓朴不收敛于y_0，于是存在$\varepsilon>0$，使得$\|y_{n'}-y_0\|\geqslant\varepsilon$，其中$\{y_{n'}\}$是$\{y_n\}$的子序列. 下证由此将引出矛盾，事实上，因X是一致凸的，故存在$\delta>0$，使得$\|y_{n'}+y_0\|\leqslant 2(1-\delta)$. 因$y_n$弱收敛于$y_0$，于是有$\|y_0\|\leqslant 1-\delta$. 矛盾. 命题得证。∎

下面的自反性的判别准则属于D. Milman（其证明见K. Yosida[1]）.

定理1.2. 每一一致凸的Banach空间是自反的.

我们已经看到，对偶映象的连续性与对偶范数的凸性紧密相联系. 就此而论，命题1.3可以更精确地表述如下（见T. Kato[2]）.

命题1.5. 如果实Banach空间X的对偶空间X^*是一致凸的，则对偶映象$F: X\to X^*$在X的每一有界子集上是一致连续的.

证：设在X中存在序列$\{u_n\}$和$\{v_n\}$使得$\|u_n\|\leqslant M$，当$n\to\infty$，$\|u_n-v_n\|\to 0$，而且对一切n有$\|F(u_n)-F(v_n)\|\geq\varepsilon>0$. 下证这将引出矛盾. 事实上，设$x_n=u_n/\|u_n\|$，$y_n=v_n/\|v_n\|$. 不失一般性，我们可以假定，对一切n有$\|u_n\|>\alpha$，$\|v_n\|>\alpha$，这里$\alpha>0$，于是易于证明

$$\| x_n - y_n \| \to 0, \text{ 当} n \to \infty.$$

其次，我们有

$$(x_n, F(x_n) + F(y_n)) = \| x_n \|^2 + \| y_n \|^2$$
$$+ (x_n - y_n, F(y_n)) \geqslant 2 - \| x_n - y_n \|,$$

这就指出 $\| F(x_n) + F(y_n) \| / 2 \geqslant 1 - 2^{-1} \| x_n - y_n \|$. 因 $\| F(x_n) \| = \| F(y_n) \| = 1$，且$X^*$是一致凸的，故可推出，在$X^*$中

$$F(x_n) - F(y_n) \to 0, \text{ 当} n \to \infty.$$

另一方面，我们有

$$\| F(u_n) - F(v_n) \| = \| u_n \| (F(x_n) - F(y_n))$$
$$+ (\| u_n \| - \| v_n \|) F(y_n).$$

故在X^*中显然有

$$\lim_{n \to \infty} (F(u_n) - F(v_n)) = 0.$$

矛盾，由此矛盾即完成命题的证明. ▌

§2. 定义在实区间上的向量函数

2.1. 绝对连续的向量函数

设$[0, T]$是一固定的实区间$(0 < T < +\infty)$，设X是一实Banach空间.

定义在$[0, T]$上的X－值函数$x(t)$称为在$[0, T]$上是绝对连续的，如果对每一$\varepsilon > 0$，存在$\delta(\varepsilon) > 0$，当$\sum_n |\beta_n - \alpha_n| \leqslant \delta(\varepsilon)$且当$m \neq n$，$(\alpha_n, \beta_n) \cap (\alpha_m, \beta_m) = \phi$时，就有$\sum_n \| x(\beta_n) - x(\alpha_n) \| \leqslant \varepsilon$. 这里$(\alpha_n, \beta_n)$是包含于$[0, T]$的任意的区间.

我们知道，实区间 $[0, T]$ 上的每一实值绝对连续函数 $x(t)$，在 $[0, T]$ 上是几乎处处可微的，而且可以表为其导数的不定积分。

下面的简单的例子表明，当 $x(t)$ 是 $[0, T]$ 到一般Banach空间X的绝对连续函数时上述结论不再成立.

设 $X = L^1(0, T)$ 是 $[0, T]$ 上一切实值可积函数的空间. 设 $x(t) = x[0, t]: [0, T] \to X$，这里 $x[0, t]$ 表区间 $[0, t]$ 上的特微函数. 易知 $x(t)$ 是 $[0, T]$ 上的绝对连续函数，但 $x(t)$ 在 $[0, T]$ 上没有可微点. 事实上，如果 $x(t)$ 在 $t = t_0$ 处可微，则对每一 $x^* \in L^\infty(0, T) = (L^1(0, T))^*$，函数 $f(t) = (x(t), x^*)$ 在 $t = t_0$ 处可微. 特别函数 $f(t) = \int_0^t h(s)ds$ 对任一 $h \in L^\infty(0, T)$ 也在 $t = t_0$ 处可微. 现取函数h如下：

$$h(s) = \begin{cases} 1, & \text{当} s < t_0 \\ -1, & \text{当} s > t_0 \end{cases}$$

于是 f由下式给出：

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{当} t < t_0, \\ 2t_0 - t, & \text{当} t \geq t_0. \end{cases}$$

显然它在 $t = t_0$ 处不可微，矛盾. 由此矛盾知结论成立。▌

可是我们可以证明下面的定理（Y. Komura [1]）。

定理2.1. 设X是一自反的Banach空间，则 $[0, T]$ 上的每一X-值的绝对连续函数 $x(t)$ 在 $(0, T)$ 上是几乎处处可微的（a.e.可微的），而且有

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \left(\frac{dx}{ds}\right)(s)ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (2.1)$$

证：因 $x(t)$ 在 $[0, T]$ 上连续，故 $\{x(t): 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 是X的紧子集. 于是由 $\{x(t): 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 所生成的子空间的强闭包是一可分的Banach空间. 因此，我们可以假定X是一可分的Banach

空间. 因函数$x(t)$是绝对连续的，故它是$[0, T]$上的有界变差函数. 设$V(x,t)$表x在$[0,t]$上的变差，由于函数$t\mapsto V(x,t)$在$[0, T]$上是单调不减的，故由不等式

$$\|x(t+h)-x(t)\|\leqslant V(x,\ t+h)-V(x,\ t),\quad 0\leqslant t\leqslant t+h\leqslant T$$

即可得出

$$\int_0^{T-h}\left\|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right\|dt\leqslant V(x,\ T),\ \forall h>0. \quad (2.2)$$

利用常规的方法，由(2.2)即得

$$\limsup_{h\to 0}\left\|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right\|<\infty,\ a.e.\ t\in(0,T). \quad (2.3)$$

因空间X是自反的和可分的，故X^*也是可分的. 设$\{x_n^*\}$在X^*中是强稠密的，于是对每一n，显然存在$[0, T]$之一子集N_n，使得函数$t\longmapsto(x(t), x_n^*)$在$(0, T)\setminus N_n$的每一点是可微的，且$mesN_n=0$. (在各种情形所涉及的测度概念，除相反声明外，都理解为Lebesgue测度). 我们用N_0表$(0, T)$中所有使得下式成立的点t的集合：

$$\limsup_{h\to\infty}\left\|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right\|=\infty.$$

并设$N=\bigcup\limits_{n=0} N_n$，于是由(2.3)得知$mesN=0$，而且对每一$t\in(0, T)\setminus N$，当$h\to 0$时，$\left\|\dfrac{x(t+h)-x(t)}{h}\right\|$是有界的. 因对每一$t\in(0, T)\setminus N$极限$\lim\limits_{h\to\infty}\left(\dfrac{x(t+h)-x(t)}{h},\ x_n^*\right)$存在，故对每一$t\in(0, T)\setminus N$和每一$x^*\in X^*$，有