有限元法的应用与实现

〔美〕J.E. 艾金 著

有限元法的应用与实现

〔美〕J. E. 艾金 著

张纪刚　郁卫中　林翠虹 译

张纪刚 校

科学出版社

1992

(京)新登字092号

内 容 简 介

本书详尽地讨论了有限元法的具体实施，内容分为两部分．第一部分为前九章，介绍有限元的实用算法和程序设计方法，详细描述了控制和输入、单元矩阵的计算、等参元、单元积分及内插值、单元方程组装，以及求解和输出等问题．第二部分为后五章，结合具体实例讲述了有限元法在一维、二维、三维问题中的应用，特别讨论了有限元网格的生成．

本书写法新颖、重点突出、实用性强，各种典型算法均附有子程序．这些程序可供读者实际选用，以作为组装有关程序系统的基础．

本书可供计算机应用人员，计算数学及有关工程专业的科技人员阅读，同时可作为高等院校相关专业的教材．

J. E. Akin

APPLICATION AND IMPLEMENTATION OF
FINITE ELEMENT METHODS

Academic Press, 1982

有限元法的应用与实现

〔美〕J. E. 艾金 著

张纪刚　郁卫中　林翠虹 译

张纪刚 校

责任编辑　那莉莉

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1992年8月第一版　开本：850×1168 1/32

1992年8月第一次印刷　印张：11 1/4

印数：1—2 900　字数：291 000

ISBN 7-03-002891-0/TP·212

定价：11.90 元

前　言

有限元法现已被公认为是计算数学的一个分支，其理论基础已在许多教科书中有所阐述．然而，真正应用有限元法时，却需要做大量的程序设计工作．本书的目的是结合一些例子说明一些典型的计算方法及其应用．本书关于理论方面的讨论仅限于为引出问题所必需的最小范围，而对大多数的计算方法加以详尽讨论．许多大学在开设有限元的入门课后，都要加一门有关计算方法的课程，本书非常适宜用作这门课程的教学．

书中提出并讨论了许多程序，其中特别包括了一个完整的施控程序和数据结构，以便详尽地研究其具体应用．本书的重点放在等参元及数值积分的应用上．第五章讨论等参元程序，第七章举出应用实例．这两章应能将这一重要课题解释清楚．鉴于许多实际问题常涉及大量数据，本书也研讨了网格生成问题．本书对时间积分法的讨论非常有限．书末附录中叙述的一些子程序是在第二章和第六章中提到的，同时附录中还列出了程序 MODEL 的各种应用示例和输入格式．

在我离开 Tennessee 大学休假期间，参加了一些关于有限元法的研究和讨论，本书反映了其中的成果．这些研究是在 Austin 的 Texas 大学、Brunel 大学和 California 理工学院进行的．本书获联合王国高级科学研究会高级访问研究员和美国国家科学基金会专业性技术开发项目的资助，特此感谢．我也感谢 J. T. Oden, J. R. Whiteman, T. J. R. Hughes, E. B. Becker 及 W. C. T. Stoddart 诸位的支持和鼓励．

J. E. 艾金

Tennessee 大学

1982 年 1 月

程 序 符 号

AD — 含浮点变量的向量

AJ — JACOBI 矩阵

AJINV — JACOBI 矩阵的逆

C — 单元列阵

CB — 边界区段列阵

CC — 系统方程的列阵

CEQ — 约束方程系数的数组

COORD — 一组所选用结点的空间坐标

CP — 罚约束列阵

CUTOFF — 截止迭代的规定次数

D — 与某一已知单元相关联的结点参数

DD — 系统的结点参数表

DDOLD — 系统的来自最后一次迭代的结点自由度表

DELTA — 插值函数H的局部导数

ELPROP — 单元的浮点特性数组

FLTEL — 系统的浮点单元特性存储

FLTMIS — 系统的浮点杂项特性存储

FLTNP — 系统的浮点结点特性存储

FLUX — 指定边界通量的空间分量

GLOBAL — 插值函数H的总体导数

H — 某一单元的插值函数

ID — 含定点数组的向量

IBC — 结点边界约束指示码数组

INDEX — 系统自由度号数组

IF INRHS. NE. 0 INITIAL VALUES OF CC ARE INPUT 如果 INRHS 不等于零，则已输入 CC 的初始值

IF IPTEST.GT. 0 SOME PROPERTIES ARE DEFINED 如果 IPTEST 大于零，则已确定某些特性

IP1 — 数组 FLTNP 中的行数

IP2 — 数组 NPFIX 中的行数

IP3 — 数组 FLTEL 中的行数

IP4 — 数组 LPFIX 中的行数

IP5 — 数组 PRTLPT 中的行数

ISAY — 用户意见的编号，取 I/O（输入/输出）

JP1 — 数组 NPFIX 和 NPROP 中的列数

JP2 — 数组 LPFIX 和 LPROP 中的列数

JP3 — 数组 MISFIX 中的列数

KFIXED — 分配给数组 ID 的大小

KFLOAT — 分配给数组 AD 的大小

KODES — 在一个结点处自由度约束指示码的一览表

KP1 — 数组 FLTNP 和 PRTLPT 和 PTPROP 中的列数

KP2 — 数组 FLTEL 和 ELPROP 中的列数

KP3 — 数组 FLTMIS 中的列数

K1—K5 — 浮点约束数据的列数

LBN — 在一个单元边界区段上的结点数

IF LEMWRT — 0 LIST NODAL PARAMETERS BY ELE-

MENTS 如果 LEMWRT = 0,则按单元列出结点参数

IF LHOMO = 1 ELEMENT PROPERTIES ARE HOMOGENEOUS 如果 LHOMO = 1,则单元特性是均质的

LNODE — 该单元的N个单元关联结点

LPFIX — 对定点单元特性的系统存储数组

LPROP — 定点单元特性数组

IF LPTEST. GT. 0 ELEMENT PROPERTIES ARE DEFINED 如果 LPTEST 大于零,则已确定单元特性

M — 系统的结点数

MAXBAN — 系统方程组的最大半带宽

IF MAXTIM. GT. 0 CALCULATE CPU TIMES OF MAJOR SEGMENTS

如果 MAXTIM 大于零,则计算各主程序段的主机时间

MAXACT — 现行约束类型数（≤MAXTYP)

MAXTYP — 结点约束类型的最大数(本书中此数=3)

MISCFL — 杂项浮点系统特性数

MISCFX — 杂项定点特性的系统数组

MTOTAL — 要求数组 AD 的大小

MISFIX — 系统的杂项定点特性数组

M1 TO MNEXT — 用于浮点数组的指示符

N — 每个单元的结点数

NCURVE — 须对每一参数进行计算的等值曲线数

NDFREE — 系统自由度总数

NDXC — 约束方程自由度号数组

NE — 系统的单元数

NELFRE — 每个单元的自由度数

NG — 每一结点的结点参数(自由度)数

IF NHOMO = 1 NODAL SYSTEM PROPERTIES ARE HOMOGENEOUS 如果 NHOMO = 1，则结点的系统特性是均质的

NITER — 将要实行的迭代次数

NLPFIX — 定点单元特性数

NLPFLO — 浮点单元特性数

NNPFIX — 定点结点特性数

NNPFLO — 浮点结点特性数

NOCOEF — 系统方阵的系数数

NODES — 全部单元的单元关联结点

NOTHER — 多于 1 类的边界约束总数

NPROP — 结点的定点特性数组

IF NPTWRT=0 LIST NODAL PARAMETERS BY NODES 如果 NPTWRT = 0，则按结点列出结点参数

NRANGE — 含结点极值号的数组

NREQ — 每种类型约束方程的数目

NRES — 每种类型约束标记的数目

NSEG — 带有指定通量的单元边界区段的数目

NSPACE — 空间维数

NTAPE1 — 用于解后矩阵的存储设备

NTAPE2,3,4 — (当>0 时)供用户选择的设备

NTOTAL — 要求数组 ID 的大小

IF NULCOL. NE. 0 ELEMENT COLUMN MATRIX IS ALWAYS ZERO 如果 NULCOL 不等于零，则单元列阵永远是零

NUMCE — 约束方程数

N1 TO NNEXT — 定点数组的指示符

PRTLPT — 单元各结点的浮点特性数组

PTPROP — 结点的浮点特性数组

RANGE: 1——MAXIUM VALUE, 2——MINIUM VALUE OF DOF

范围：1——自由度的最大值

2——自由度的最小值

S — 单元的方阵

SB — 边界区段的方阵

SS — 系统方程组的“方阵”

TIME — 存储各种程序段主机时间的数组

TITLE — 问题的名称

X — 系统中全部结点的空间坐标

XPT — 一条等值线上点的空间坐标

目　录

第一章 有限元概念

1.1 引 言

有限元法已成为数值分析中一种实用而又重要的工具．一切工程领域和应用数学领域几乎都在使用有限元法．论述有限元法的文献数量极多，而且还在迅速增加．虽有大量文献目录可供查阅，[5,9,76]但这些目录仍未包括全部资料，而且这些文献很快就过时了．尽管有许多现成的讲述各种有限元理论的教科书，但它们中的大多数都把程序设计这一问题降低到次要的地位，只有 Hinton 和 Owen[42] 的教科书例外．本书所持观点与他们二位的相似，即目的在于对典型的程序设计问题加以全面的、完整的论述，同时把理论方面的内容限制在最小的程度．本书列举了一些实施有限元的方法，选用了一些实例，这两方面的理论基础理所当然地是本书所要提供的．

本章先介绍有限元法中所用的各种典型的积木式程序．这种模块式程序可用于许多研究领域．以后几章再讨论应用有限元法的一些具体例子．

1.2 有限元法的基础

从数学观点来看，有限元法是建立在积分表达法的基础上的．相比之下，早先的有限差分法则通常是建立在微分表达法的基础上的．各种问题的有限元模型是根据简单的物理直觉和数学原理提出来的．历史上，曾利用物理直觉引出一些早期的实用模型，但目前却更加强调业已公认的该方法的数学基础[10,28,61]．

最初，有限元法在数学上不够严谨，而现在，该领域的研究非

常活跃.近代有限元的积分表达法是通过两种不同途径获得的,即变分法和加权残数法. 以下几节将简要地复习一下建立有限元模型的一般方法. 很凑巧，所有这些方法都使用同一种簿记运算来产生最后的代数方程组,必须通过求解这些方程式,才能得出待求的结点参数.

有限元模型最早的数学表达式是建立在变分法的基础上. 变分法在发展单元和在解决实际问题方面仍然非常重要，在结构力学和应力分析领域里尤其如此. 这两个领域里的近代分析方法几乎全靠有限元法. 变分法的模型通常是要找出一组结点参数值，它使某一特定的称作泛函的积分式具有驻点值（即泛函取极大或极小值）. 在大多数情况下，这个取极值的积分式是有物理意义的. 例如,在固体力学中,该积分式代表位能，而在流体力学中则可能对应于熵的产生率.许多物理问题的变分式都归结成二次型，从这些二次型又进而得出一组对称正定的代数方程，以用来解决该物理问题. 变分表达式还有另一个重要的、有实际意义的优越性，那就是变分法往往有一个与之相关的误差范围理论. 翻阅一下现有的许多论述变分法的教科书，就可以找到许多用变分法求有限元模型的例子. 本书后面几章将举例说明这种类型的应用.

众所周知,使泛函积分具有驻值且满足边界条件的解,等价于对应的微分方程的解,这个微分方程就是 Euler 方程. 如果泛函已知,则可比较容易地求出对应的 Euler 方程. 但大多数工程问题和物理问题最早是用微分方程来确定的. 有限元法需要的却是一种积分表达法. 因此,必须找出一个泛函，使它的 Euler 方程恰好对应于已知的微分方程(及边界条件). 很不凑巧,一般说来,这个工作很难，或者是不可能做到的. 所以各种各样的加权残数法越来越受到重视，因为这种方法可以直接从原来的微分方程组产生出积分表达式. 微分方程和积分形式都用物理坐标，比方说 (x,y,z) 来确定.

现在举一个简单的一维例子来说明积分表达法. 考察一个将在以后的应用实例中加以讨论的泛函

$$I=\frac{1}{2}\int_0^L[K(\mathrm{d}t/\mathrm{d}x)^2+Ht^2]\mathrm{d}x$$

使此泛函取极小值就相当于满足微分方程

$$K\mathrm{d}^2t/\mathrm{d}x^2-Ht=0$$

另外，此泛函还满足某端点处的自然边界条件 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x=0$，如果在此端点处并未规定强制边界条件 $t=t_0$ 的话。

利用加权残数法产生有限元模型是一种比较新的方法．然而，在求解微分方程和其他非结构力学问题方面，这种方法也越来越重要了．加权残数法从基本微分方程

$$L(\phi)=Q$$

出发，不去寻求在数学上等价的变分式，因为变分式往往很难找到．通常是先假设一个近似解，比如 ϕ^*，将其代入微分方程．既然是假设的近似解，这一代入就在微分方程里产生一个残数误差项

$$L(\phi^*)-Q=R$$

虽然不可能强迫残差项等于零，但却可令残差项在求解域内的加权积分等于零，所以得到

$$I=\int_\Omega RW\,\mathrm{d}\Omega=0$$

用插值函数代换近似解 ϕ^* 和加权函数 W，就得到一组代数方程式，解出后可得近似解中的那些未知系数．选用什么样的加权函数决定于所使用加权残数法的类型．要得到 Galerkin 判据，可选

$$W=\phi^*$$

而对于最小二乘方判据，

$$W=\partial R/\partial\phi^*$$

给出所需结果．与此类似，选用 Dirac delta 函数所得出来的是一种点配置法，即

$$W=\delta$$

显然，还有其他 W 可供选用，从而引出其他的加权残数法，如子

域法．前两种方法似乎是有限元法中最常用的．对 Galerkin 法使用部分积分通常会降低对近似函数的连续性要求．如果存在一个变分法，那么从 Galerkin 判据将得出与之相同的代数近似解，因此常可给出有限元解的最佳误差估计值．

目前，变分法和加权残数法两者都普遍采用下列限制条件来作为使有限元模型随网格密度增加而具有收敛性的一种手段[87]：

1.（一种必要判据）当单元尺寸减小而处于极限状态时，单元的插值函数必须能模拟因变量或其导数取任意常数，而导数的阶次高到定义积分式中出现的阶次．

2.（一种充分判据）选择单元的形状函数应能使在单元的交接面处，因变量及其导数是连续的，而导数的阶次比定义积分式中出现的阶次低一阶．

1.3 通用的有限元分析法

1.3.1 引言

在有限元法里，利用假想的线（或面），把连续介质（或更一般地说是把求解域）的内部和边界分割成有限个数目的、离散的、有一定大小的子域，这些子域就是*有限元*（见图 1.1）．假想的网格将区域进行分割时就构成了一些离散的*结点*．这些结点的位置可以在网格分格线上的任何地方，也可以在网格分格线内的任何地方，但通常是在网格的相交线（或相交面）上．一般说来，单元具有直线边界；如果所研究的区域具有曲线边界，则在理想化时就会引入几何形状方面的假设解．

各结点都被赋予一个起识别作用的整数号码（*结点号*），从 1 开始增到某一最大值，如 M．与此相似，每一个单元也被赋予一个起识别作用的整数号．这些*单元号码*也是从 1 开始扩大到某个最大值，如 NE．以后将要讨论，结点号和单元号的赋值方式可能会对求解所需时间和存储所需容量产生重大影响．工作人员对每个结点都要规定具有一定数量的（广义的）*自由度*（dof），如 NG．

这些自由度就是(待求的)结点参数，工作人员就是选择这些结点参数来控制如何提出所研究的问题．常见的结点参数有压强、速度分量、位移分量、位移梯度等．结点参数不一定有物理意义，不过通常是有的．本书将假设系统中每个结点的结点参数的个数相同，即结点参数的数目（NG）是一样的，这是通常情况，但并非一定如此．如图 1.1 所示，与一个典型结点相关联的往往不止一个单元．图 1.1 也表示一个典型结点和一个典型单元的影响域．一个典型单元有好几个结点与之相联，如N个，而点的位置则在边界上或在边界内．此处还假设每个单元的单元结点数（N）是一样的，通常总是这样假设，但并非所有情况都必须如此．

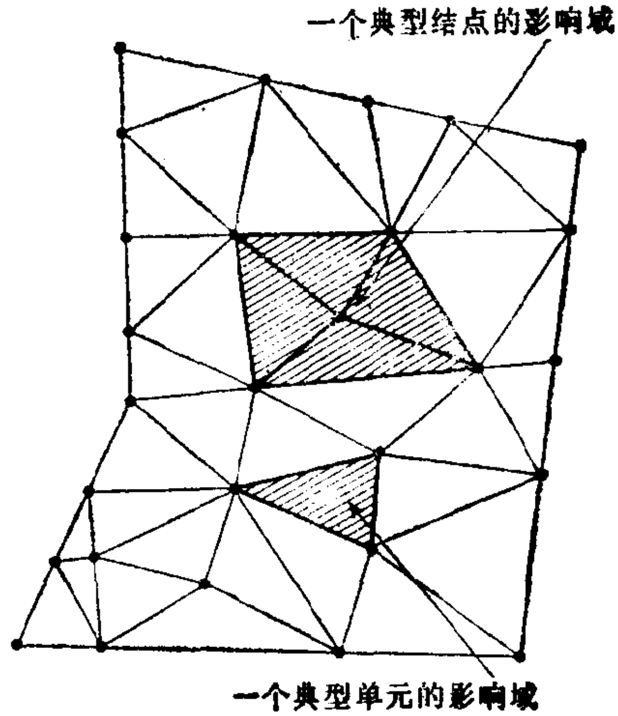

图 1.1 影响域

这种理想化处理就确定了每个典型结点和典型单元的总自由度数．显然，整个系统的自由度数（若用 NDFREE 表示）就是结点数与每一结点参数数的乘积，即 NDFREE = M * NG．与此类似，每个单元的自由度数(若用 NELFRE 表示)，就可按 NELFRE = N * NG 来确定．

应记住：系统自由度的总数对应于结点参数的总数．一般说来，系统中第 I 个结点第 J 个参数所对应的系统自由度号 NDF 可(根据归纳推理)由下式确定：

$$NDF = NG * (I - 1) + J \tag{1.1}$$

式中 $1 \leqslant I \leqslant M$ 及 $1 \leqslant J \leqslant NG$，所以 $1 \leqslant NDF \leqslant NDFREE$．这个基本方程式就是对程序进行“簿记”法的基础，因而这个方程式非常重要，应该对其理解清楚．方程式(1.1)可用图 1.2 中一串一维元加以说明．该图所示系统有 4 个线段元，5 个结点，每个结