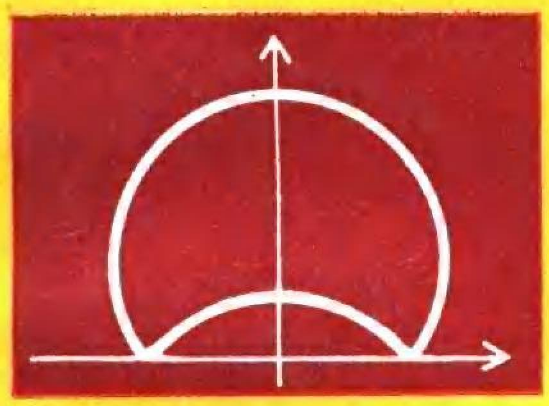
复变函数

郭洪芝 编



天津大学出版社

复变函数

郭洪芝 编

天津大学出版社

内容简介

本书内容包括复数与复变函数，解析函数，复变函数的积分，级数，留数，保角映射等，共分六章。

本书在编写过程中力求做到条理清晰，层次分明，通俗易懂，注重解题方法的训练和能力的培养。为巩固正文内容，在每一章的末尾都配有小结和测验作业，以使读者易于抓住每一章的重点并测试自己对本章基本内容的掌握情况。

本书可供高等工科院校各专业师生作为教材使用，也可作为自学用书或报考研究生的复习用书。

复变函数

郭洪芝 编

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

邮编：300072

河北省昌黎县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1160 毫米 1/32　印张：8 7/8　字数：231 千

1996 年 5 月第一版　1996 年 5 月第一次印刷

印数：1-5000

ISBN 7-5618-0818-6

O・76　定价：8.00 元

前　言

本书是按照国家教委工科数学指导委员会1987颁发的《数学课程基本要求》、并参照工科研究生《复变函数》入学考试大纲的基本要求，及总结近年来的教学实践经验编写的。

复变函数作为高等数学的后继课程，作者在编写过程中注意到了与高等数学的衔接。如复变函数改用数集间的映射来定义，并注意到复变函数的极限、导数、积分等概念与高等数学中相应概念的异同，这样可使读者在学习本课程时不感到陌生而又便于接受。

在编写本书时，作者力求做到条理清晰，层次分明，通俗易懂，注意解题方法和运算能力的培养。为此，在教材中配有适量的例题，有的例题给出解题分析。在每一章的末尾都配有小结和测验作业，以使读者更好的掌握每一章的重点和检查自己对本章基本内容掌握的情况。

本书各章都配有适量的习题，并附有参考答案。为了给报考研究生的读者复习《复变函数》提供资料，在书末附录中选编了部分工科院校研究生入学试题，仅供参考。

本书稿由王开业副教授审阅、函数论教研室主任曾绍标副教授对本教材的编写十分关心和支持并亲自进行了审阅。本书在编写过程中得到了天津大学教务处、天津大学数学系和天津大学出版社的热情支持，在此一并表示深切的感谢。

由于编写者水平所限，本书的不妥之处，诚恳希望使用本书的同志不吝指正。

编者

目　录

第一章　复数与复变函数

复变函数研究的对象是复数变量之间的函数关系. 关于复数，在初等数学中已有详细论述，但是为了今后讨论问题方便，这里还是给出系统地叙述和补充，这对以后的学习是很有必要的.

§1.1　复数及其表示方法

一、复数集

形如 $x+iy$ 的数称为复数，记为

$$z=x+iy.$$

其中 x 和 y 是任意实数，i 适合于 $i^2=-1$，称为虚数单位，实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记为

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z.$$

当 $x=y=0$ 时，规定 $z=0$.

全体复数构成的集合称为复数集，记作$\mathbb{C}$，即

$$\mathbb{C}=\{z=x+iy\,|\,x,y\in\mathbb{R}\},$$

此处$\mathbb{R}$ 表示全体实数构成的集合(实数集).

设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 是$\mathbb{C}$ 中任意两个复数，当且仅当 $x_1=x_2$ 并且 $y_1=y_2$ 时，称 z_1 和 z_2 相等，记作 $z_1=z_2$. 注意，在复数集中不能规定复数的大小.

二、复平面及复数表示法

根据复数的上述定义，可知复数 $z=x+iy$ 与一对有序的实数

(x,y)有着一一对应的关系. 而一对有序的实数(x,y)，可以用平面直角坐标系里唯一的点 $M(x,y)$来表示，这里复数 z 的实部 x 和虚部 y 分别相当于点 $M(x,y)$的横坐标和纵坐标. 所以，一个复数 $z=x+iy$ 可以用平面直角坐标系中的点 $M(x,y)$来表示. 这样，在复数集C 和平面点集之间建立了一一对应关系，把平面上的点 $M(x,y)$看作是复数 $z=x+iy$ 的几何表示(图 1.1)，而把 $z=x+iy$ 称为复数的直角坐标表示式. 由于实数 $x(\mathrm{Im}z=0)$对应于横坐标轴上的点，纯虚数 $iy(\mathrm{Re}z=0)$对应于纵坐标轴上的点，为了体现复数的特征，故将平面直角坐标系中的横坐标轴改称为实轴，而将纵坐标轴改称为虚轴，并把这个平面称为复数平面，简称复平面，或 Z 平面. 今后我们把“点 z”和“复数 z”，“复数集”和“平面点集”作为同义词而不加区别.

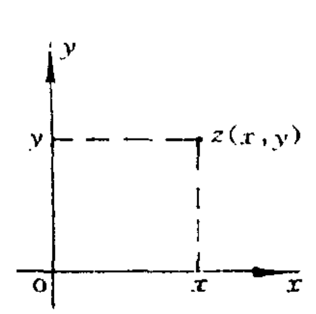


图 1.1

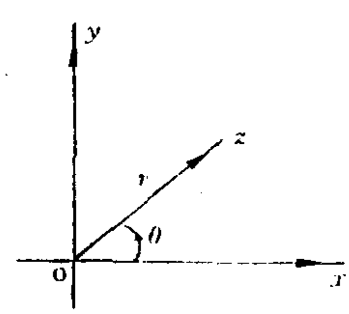


图 1.2

如果把复数 $z=x+iy$ 的实部 x 与虚部 y 作为平面向量在两坐标轴上的投影，那么复数 $z=x+iy$ 又可用平面向量$\{x,y\}$来表示，这里的向量是自由向量，即一个向量经过平移后所得的向量与原来向量看作是相等的向量. 因此，凡是在两坐标轴上两投影分别相等的向量都代表同一个复数，从而复数 $z=x+iy$ 又与向量$\{x,y\}$一一对应. 当把任一向量$\{x,y\}$的起点移到原点时，所得向量的终点坐标 x 和 y 恰好就是复数 $z=x+iy$ 的实部和虚部. 在复平面内，复数 z 和向量$\vec{oz}$就是一一对应的. 因此，我们还可将复数

$z=x+iy$理解为起点在原点，终点为 z 的向量$\overrightarrow{oz}$（图 1.2）. 于是，也把复数 z 和向量$\overrightarrow{oz}$作为同义词.

复数也可以用三角函数来表示. 一个向量可由它的长度和方向完全确定. 若向量$\overrightarrow{oz}$的长度用 r 表示，其方向用实轴正向到$\overrightarrow{oz}$的转角 θ 所确定，那么$\overrightarrow{oz}$所对应的复数 $z=x+iy$ 也可由 r 及 θ 完全确定（图 1.2），而且有下面的关系

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta. \tag{1.1}$$

于是，由(1.1)任一非零复数 $z=x+iy$ 均可表为

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta), \tag{1.2}$$

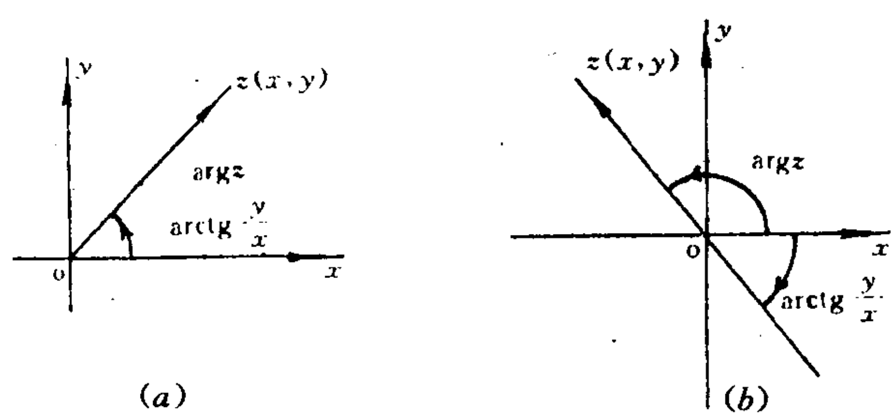
称为复数 z 的三角表示式. 式中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 θ 分别叫做复数 z 的模和辐角，记为 $|z|$ 和 $\mathrm{Arg}z$，即

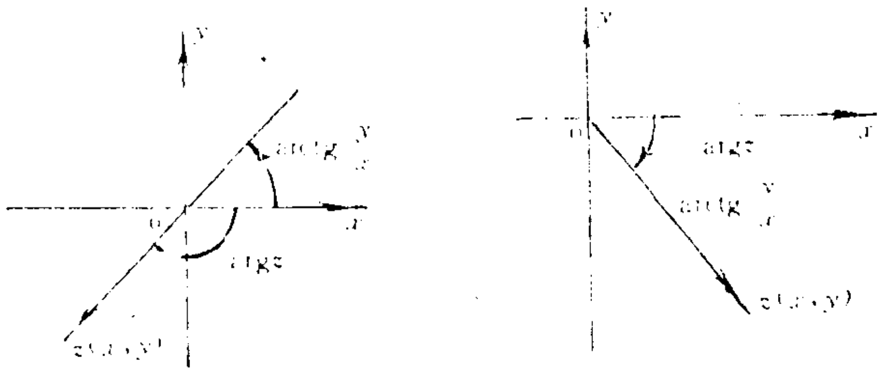
$$r=|z|,\quad \theta=\mathrm{Arg}z.$$

对于 $z=0$，显然有 $|z|=0$，但其辐角没有意义. 若 $z\neq0$，$\mathrm{Arg}z$ 有无穷多个值，且彼此之间相差 2π 的整数倍. 通常把满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的辐角值 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，记为 $\arg z$. 于是

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots. \tag{1.3}$$

由(1.3)并注意到 $\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}z)=\dfrac{y}{x}$、$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 及图 1.3 可知，任何非零复数 $z=x+iy$ 的辐角主值可按以下公式确定





(c) (d)

图 1.3

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & x>0\\ \dfrac{\pi}{2} & x=0,y>0\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi & x<0,y\geqslant 0\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi & x<0,y<0\\ -\dfrac{\pi}{2} & x=0,y<0.\end{cases}\tag{1.4}$$

根据欧拉(Euler)公式:$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,复数 $z=x+iy$ 又可以表示为

$$z=re^{i\theta},\tag{1.5}$$

称为复数 z 的指数表示式.

复数的这几种表示方法,根据讨论不同问题时的需要,可以互相转换.

例 1 将下列复数化为三角表示式

$$z=\sqrt{3}-i,\quad (2)\quad z=-\sqrt{12}-2i.$$

解 (1)因为 $x=\sqrt{3}$,$y=-1$,所以

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2.$$

又 z 在第四象限内，于是

$$\theta=\arg z=\operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{6}.$$

所以

$$z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

由于辐角的多值性，z 亦可表示为

$$z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right]\quad(k\text{ 为整数}).$$

(2) $$r=\sqrt{(-\sqrt{12})^2+(-2)^2}=4,$$

由于 z 在第三象限，所以

$$\theta=\arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\pi=\operatorname{arctg}\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\pi.$$

$$\theta=-\frac{5\pi}{6}.$$

于是

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

由于辐角的多值性，z 亦可表示为

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)\right]\quad(k\text{ 为整数}).$$

§1.2 复数的代数运算

由于实数是复数的特例，因此规定复数运算的一个基本要求是，复数的运算法则施行于实数时，必须与实数的运算结果相一

致，且能够满足实数运算的一般规律.

一、复数的加(减)法

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的和(差)作如下规定

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2), \tag{1.6}$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2). \tag{1.7}$$

不难验证复数的加法满足交换律

$$z_1+z_2=z_2+z_1$$

和结合律

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

由复数与平面向量的一一对应关系，以及复数的加、减法则与向量的加、减法则是相同的，因此可以通过两个向量的和与差的几何作图法在复平面上求出相应两复数的和 z_1+z_2 与差 z_1-z_2 的对应点(图 1.4). 在图 1.4 中以向量 $\vec{oz_1}$、$\vec{oz_2}$ 为两邻边的平行四边形的两条对角线向量 $\overrightarrow{oM}$ 和 $\overrightarrow{z_2z_1}$ 分别对应于复数 z_2+z_1 和 z_1-z_2. 由于 $\overrightarrow{oM}$ 的起点为原点 o，所以终点 M 对应的复数就是 z_1+z_2. $\overrightarrow{z_2z_1}$ 的起点不是原点，经平移后得到起点为原点的向量 $\overrightarrow{oN}$，终点 N 所对应的复数就是 z_1-z_2.

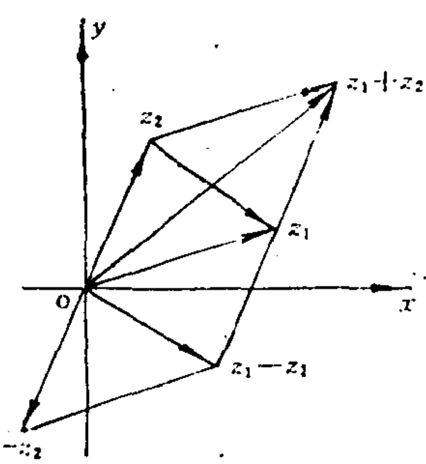


图 1.4

从图 1.4 还可以看到

(1) $|z_1-z_2|$ 表示复平面上两点 z_1 和 z_2 之间的距离. 事实上，

$$
\begin{aligned}
|z_1-z_2| &= |(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)| \\
&= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},
\end{aligned}
$$

这正是平面上两点距离公式.

(2) 由三角形三边关系,有

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|,$$

$$|z_1-z_2| \geqslant ||z_1|-|z_2||.$$

分析证明参看例 6.

二、复数的乘法

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的乘积规定为

$$
\begin{aligned}
z_1z_2 &= (x+iy_1)(x_2+iy_2) \\
&= (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

即求两个复数相乘的积可以视为两个二项式的相乘积,只要注意到 $i^2=-1$ 即可.

可以验证复数的乘法满足交换律

$$z_1z_2=z_2z_1,$$

结合律

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),$$

及乘法对加法的分配律

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

如果采用三角表示式,两个复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$的乘积可以写成

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

于是得到

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|, \tag{1.9}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2. \tag{1.10}$$

注 1　由于 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$、$\mathrm{Arg}z_1$、$\mathrm{Arg}z_2$ 都是无穷多值的，故应把它们看作角的集合，这里等号"＝"指的是集合相等，即在等号左端集合内给定一个值，右端两个集合内各有一个值，使(1.10)式成立.

注 2　公式(1.10)中的 $\mathrm{Arg}z$ 可以换成 $\arg z$，但 $\arg z$ 应理解为辐角的某个特定值，不必是主值. 若均理解为主值，则两端允许相差 2π 的整数倍.

由此可以得到两个复数乘积的几何作图法：将向量 $\overline{oz_1}$ 沿本身方向伸长(或缩短) $|z_2|$ 倍，再旋转一个角 $\arg z_2$，所得向量的终点即为 z_1z_2(图1.5). 当 $|z_2|=1$ 时，只需要旋转一个角度 $\arg z_2$ 即可. 例如，iz 相当于将 z 所对应的向量 $\overline{oz}$ 逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 即得 iz 所对应的向量.

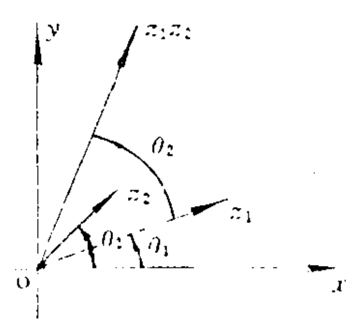


图 1.5

三、复数的除法

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2(z_2\neq 0)$ 相除的商规定为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{1.11}$$

若采用三角函数表示式，$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)}{r_2^2}$$

$$+i\,\frac{r_1r_2(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{r_2^2}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

由此得到

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{1.12}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\theta_1-\theta_2=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2. \tag{1.13}$$

(1.13)式应理解为集合相等，其意义请看前面的注 1.

四、共轭复数

我们把实部相同而虚部为相反数的两个复数 $x+iy$ 和 $x-iy$ 称为共轭复数. 与 $z=x+iy$ 共轭的复数记为 $\bar{z}$，即

$$\bar{z}=x-iy.$$

显然复数共轭的概念是相互的，即若 $\bar{z}_1=z_2$，则 $\bar{z}_2=z_1$.

因为 0 的相反数仍旧是零，从而得到：$z=\bar{z}$ 的充要条件是 z 为实数.

利用共轭复数可以得到以下重要的关系式

$$\mathrm{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad \mathrm{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

容易验证以下关于共轭复数的运算公式

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2,\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad (z_2\neq 0),$$