高等学校试用教材

概 率 论

第三册 随机过程

复旦大学编

人民教育出版社

高等学校试用教材

概 率 论

第三册 随机过程

复旦大学 编

人民教育出版社

内 容 提 要

全书分为三册：概率论基础、数理统计、随机过程．材料比较丰富，并配备一定数量的习题．

本册主要介绍应用中经常遇到的几种基本随机过程及随机模拟的基本概念．其内容可作为"概率论与数理统计"基础课或选修课的教材，也可作为希望得到随机过程知识的理、工科师生和工程技术人员的参考书．

高等学校试用教材

概 率 论

第三册 随机过程

复 旦 大 学 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 12.375 字数 297,000

1981 年 1 月第 1 版 1981 年 6 月第 1 次印刷

印数 00,001—30,500

书号 13012·0564 定价 0.90 元

编写说明

本书是《概率论》一书的第三册，主要介绍应用中经常遇到的几种基本的随机过程和随机模拟的基本概念。本书可作为概率论与数理统计基础课或选修课的教材，也可作为希望得到较多随机过程知识的理、工科师生和工程技术人员的参考书。读者可以在学完概率论基础(即相当于本书第一册的内容)后直接阅读本书各章。若要较好地掌握本书第三、四、五各章，还应具备实变函数论与泛函分析的初步知识。

由于本书内容组织采用"模块式"，本册第二章，第三、四、五章和第六章是三个独立的模块，在学完第一章后，这三个模块可以任意选读，一种可供选择的教学时数安排是：

$$\text{第一章(10学时)}\begin{cases}\text{第二章(20学时)},\\ \text{第三、四、五章(40学时)},\\ \text{第六章(10学时)}.\end{cases}$$

本书中的定理、公式和图表等均按节编号，引用同节的公式时，只指明编号；同章跨节引用时还指明节号，例如(2.21)表示同章第2节(21)式；跨章引用时还指明章节号，例如(3.2.21)表示第三章第2节(21)式。

全书由吴立德，汪嘉冈，李贤平，卞国瑞四同志参加编写，本册第一、二、三、六章由吴立德同志编写，第四、五章由汪嘉冈同志编写。全书并由北京大学等14个单位参加的审稿会议集体审阅过。

由于水平所限，编写工作又较匆促，因此一定存在不少缺点和错误，欢迎读者批评指正。

编　者

1980. 3.

目　　录

第三册　随机过程

第一章　引　　论

§1. 随机过程的概念及其作用

在前两册中，我们学习了随机变量、随机向量，即多维随机变量的知识，那儿主要涉及一个或有限个随机变量．在极限定理中，我们涉及了无穷多个随机变量，但他们之间是相互独立的．在这一部份中，我们将研究一族无穷多个、相互有关的随机变量，记为$\{X(t), t\in T\}$，其中T是一个无穷集合．最常见的有：(1) $T_1=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$，(2) $T_2=\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$，(3) $T_3=[a, b]$，其中a, b可以是$\pm\infty$．由于t一般表示时间，通常就称它们为随机过程．所以，**随机过程**就是一族无穷多个随机变量$\{X(t), t\in T\}$，也可称它为**随机函数**，其中的T又称为**参数集**．今后除特别声明外，参数集T总假定是上述三种形式之一．当T为(1)，(2)两种情形时，也称为**随机序列**．

随机过程的理论产生于本世纪的初期，是由于物理学、生物学，通讯与控制，管理科学等方面的需要而逐步发展起来的．下面我们简要地说明一下，在上述诸领域中是怎样提出随机过程的问题，以及随机过程理论的研究对这些领域的发展又有些什么意义．

一、统计物理

随机过程理论的许多部份的发展是与研究物理系统中的噪声密切有关的．反过来，随机过程理论的发展又为诸如布朗运动，热噪声等物理现象提供了数学模型，更进一步为统计物理奠定了数学基础．

布朗运动　英国植物学家布朗注意到，漂浮在液面上的微小

粒子，不断地进行着杂乱无章的运动．后来这种运动就称为**布朗运动**．从统计物理学的观点来看，粒子的这种运动是由于受到大量随机的、相互独立的分子碰撞的结果．如用$(X(t), Y(t))$表示时刻t时粒子的位置，则由于运动是杂乱无章的，$X(t)$和$Y(t)$都是随机变量，于是描写粒子位置的$(X(t), Y(t))$就是一个随机过程．

热噪声　考虑电子网络中的一个电阻．由于电阻中自由电子的随机运动，导至电阻两端的电压$X(t)$有一个随机的起伏．这一起伏的电压就称为**热噪声**．它也是依赖于时间t的一族无穷多个随机变量，于是它是一个随机过程．

散弹噪声　考虑一个真空二极管，由于自热阴极发射出来的电子是不稳定的，因而从阳极到阴极的电流就有随机的起伏．这一随机起伏的电流$X(t)$就称为**散弹噪声**．它当然也是一个随机过程．

二、群体生长的随机模型

一个群体(例如可以是某公社饲养的猪的全体，一个宇宙射线粒子引起的裂变的原子全体等等)的大小和组成通常是有起伏的．如用$X(t)$表示时刻t时群体的大小，则$\{X(t), t\in T\}$是一个随机过程．

随机过程理论为与群体生长有关的许多生物和物理现象的研究提供了数学模型．它们包括：灭种问题；数量遗传学；竞争现象；传染病扩散；癌细胞扩散等等．

三、管理科学

排队　顾客来到服务站要求服务．当服务站中的服务员都忙碌时，即当服务员都正在为别的顾客服务时，来到的顾客就要排队等待服务．由于顾客的来到一般是随机的，每个顾客所需的服务时间也是随机的，因此如用$X(t)$表示时刻t时的队长，用$Y(t)$表

示时刻 t 时来到的顾客所需的等待时间等，这些都是随机的. 因而$\{X(t), t\in T\}$等都是随机过程.

由于“顾客”与“服务员”的概念是相当的广泛，例如，顾客可以是电话的“呼唤”，“服务员”则是“电话交换总机”；“顾客”可以是“待修复的机器”，“服务员”则是“修理工人”；“顾客”也可以是“待加工的程序”，“服务员”则是“中央处理器”等等. 因此关于排队的理论，即排队论有着广泛的应用，而排队论也正是随机过程理论的一个重要分支. 历史上，排队现象(特别是电话问题)中的随机过程，如上述的队长，等待时间等也是最早被研究的随机过程之一.

存储控制 在存储控制中的两个重要问题是：(1) 何时要开始订货；(2) 每次订货的量以多大为宜. 这两个问题的回答，当然依赖于货物的销售速度和每次从订货到得到货物所需的时间. 而这两者显然都不是确定的. 如果用 $X(t)$表示在$[0, t]$中的销售量，$Y(t)$表示时刻 t 时发出的订货到真正得到所订货物需要的时间等，则由于各种复杂的因素，$\{X(t), t\in T\}$等都是随机过程. 由此可见，有关随机过程的研究将为进行最优的存储控制提供依据.

四、预测和控制

在与预测和控制有关的问题中，出现大量的随机过程，它们正是随机过程理论发展的一个重要推动力.

预测 预测问题一般可表述为：如何根据对随机过程 $X(t)$在时间间隔 $s-L\leqslant t\leqslant s\,(L>0)$上的观察来估计以后某时刻 $s+\tau$时的值 $X(t+\tau), \tau>0$.

如果 $X(t)$表示时刻 t 时的某处的气温，那便是天气预报问题；如果 $X(t)$表示时刻 t 时的某处的水位，那便是水位预报；$X(t)$也可以表示时刻 t 时敌机的高度，那么上述预测对于火炮的控制便有很大的意义.

参数估计 考虑一个雷达站. 它在 $t=0$ 开始发出一个信号，遇到障碍物后又反射回来，在 $t=\tau$ 时雷达站开始收到反射信号. 若时刻 t 发出的信号为 $s(t)$，则此时收到的反射信号可表示为 $A\cdot s(t-\tau)$，其中 A 反映信号经反射后的能量损失，τ 反映雷达站与障碍物之间的距离. 由于各种随机干扰的存在，雷达站实际接收到的是 $X(t)=A\cdot s(t-\tau)+N(t)$，其中 $N(t)$ 反映各种随机干扰的效应，它是随机过程. 雷达信号处理中的一个十分重要的问题就是如何从被干扰(也称为噪声)模糊了的 $X(t)$ 中，把参数 τ 尽可能精确的估计出来，估计出 τ，也就确定了障碍物到雷达站的距离 $d=\frac{c}{2}\cdot\tau$，其中 c 是光速. 显然，这一问题的解决有赖于对反映干扰的 $N(t)$ 这一随机过程的特性的研究.

上述问题是有代表性的，类似的问题在涉及有干扰存在时的动态测量中都是存在的.

五、时间序列分析

在本书的第一册中，我们学习了随机变量及其描述(分布，数字特征)等. 在第二册中，我们学习了如何从随机变量的观察中，对随机变量的分布，数字特征等进行估计和推断. 类似地，在随机过程的理论中，我们也要研究如何从对随机过程的观察中，对随机过程的统计特性进行估计和推断的方法，这也就是随机过程的统计理论.

对随机过程 $X(t)$ 进行一次观察，得到的便是一个确定的普通意义下的函数 $X(t)$，它称为相应随机过程 $X(t)$ 的一个**“现实”**或**“样本函数”**. 在时间参数为离散的场合，就是一个序列，通常称为**“时间序列”**，“现实”、“样本函数”、“时间序列”等术语有时也相互通用.

时间序列的例子是十分广泛的：(1) 某地历年来的月平均气

温；(2) 某地下水水位观察井历年来的旬地下水水位；(3) 某一品种鸡的平均日产蛋个数；(4) 国际市场上历年小麦与大米价格比等等.

时间序列分析的一个重要课题是如何根据对时间序列的研究分析，建立起一个合适的随机过程模型，以用于预测或控制等目的.

§2. 有限维分布族与柯尔莫哥洛夫(Колмогоров)定理

设$\{X(t), t\in T\}$是一个随机过程，为了描述它的统计特性，我们自然要知道每个 $t\in T$ 的$X(t)$的分布函数

$$F(t;x)\triangleq P\{X(t)<x\}, t\in T$$

我们称$F(t;x)$为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的**一维分布**，与此有关的，我们引入(当然假定下式右端存在)：

$$m(t)\triangleq E\{X(t)\}$$

$$D(t)\triangleq E\{(X(t)-m(t))^2\}$$

分别称它们为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的**均值函数和方差函数**. 显然只有一维分布，还不足以完全描述随机过程. 为了研究随机过程中任意两个随机变量之间的关系，我们再引入

$$F(t_1, t_2; x_1, x_2)\triangleq P\{X(t_1)<x_1, X(t_2)<x_2\}, t_1, t_2\in T$$

称它们为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的**二维分布**，与此有关的，我们引入(当然假定下式右边存在)

$$\begin{aligned}\Gamma(s, t)&=\mathrm{cov}\{X(s), X(t)\}\\&=E\{(X(s)-m(s))(X(t)-m(t))\}\end{aligned}$$

它称为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的**协方差函数**. 显然有：

$$D(t)=\Gamma(t, t)$$

一般地，对任意有限个 $t_1, t_2, \cdots, t_n\in T$，引入

$$F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$\triangleq P\{X(t_1)<x_1, X(t_2)<x_2, \cdots, X(t_n)<x_n\}$$

并称它们为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的 n **维分布**.

随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 的一维分布, 二维分布, …, n 维分布等等, 其全体$\{F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, \cdots, x_n), t_1, \cdots, t_n\in T, n\geqslant 1\}$称为随机过程$\{X(t), t\in t\}$的**有限维分布族**. 如上所述可见, 如果知道了随机过程$\{X(t), t\in T\}$的 n 维分布全体, 则对随机过程$\{X(t), t\in T\}$中任意 n 个随机变量的联合分布也就完全知道了, 如果我们知道了随机过程的有限维分布族, 便知道了这一随机过程中任意有限个随机变量的联合分布, 也就可以完全确定它们之间的相互关系等等.

由多维分布函数的性质和上述定义, 容易看出, 一个随机过程的有限维分布族具有如下两个性质.

(1) **对称性** 对$(1, 2, \cdots, n)$的任一排列$(j_1, j_2, \cdots, j_n)$, 有

$$F(t_{j_1}, t_{j_2}, \cdots, t_{j_n}; x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_n})$$
$$=F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

(2) **相容性** 对 $m<n$, 有

$$F(t_1, t_2, \cdots, t_m, t_{m+1}, \cdots, t_n; x_1, x_2, \cdots, x_m, \infty, \cdots, \infty)$$
$$=F(t_1, t_2, \cdots, t_m; x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

引入特征函数

$$\phi(t_1, t_2, \cdots, t_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$$
$$=E\{e^{i(\theta_1 X(t_1)+\theta_2 X(t_2)+\cdots+\theta_n X(t_n))}\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\theta_1 x_1+\cdots+\theta_n x_n)} F(t_1, \cdots, t_n; dx_1, \cdots, dx_n)$$

称$\{\phi(t_1, \cdots, t_n; \theta_1, \cdots, \theta_n), n\geqslant 1, t_1, \cdots, t_n\in T\}$为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的**有限维特征函数族**. 由特征函数唯一性定理(第一册§4.4)可知有限维分布族与有限维特征函数族是相互唯一决定的, 有限

维分布族的对称性和相容性对有限维特征函数族表现为：

(1) **对称性** 对$(1, 2, \cdots, n)$的任一排列$(j_1, j_2, \cdots, j_n)$，有

$$\begin{aligned}&\phi(t_{j_1}, t_{j_2}, \cdots, t_{j_n}; \theta_{j_1}, \theta_{j_2}, \cdots, \theta_{j_n})\\&=\phi(t_1, t_2, \cdots, t_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)\end{aligned}$$

(2) **相容性** 对$m<n$，有

$$\begin{aligned}&\phi(t_1, t_2, \cdots, t_m, t_{m+1}, \cdots, t_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m, 0, \cdots, 0)\\&=\phi(t_1, t_2, \cdots, t_m; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)\end{aligned}$$

苏联数学家柯尔莫哥洛夫在1931年证明了如下的基本定理：

定理(柯尔莫哥洛夫) 设分布函数族$\{F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \cdots, x_n), n\geqslant 1, t_1, t_2, \cdots, t_n\in T\}$，满足上述对称性和相容性，则必存在一个随机过程$\{X(t), t\in T\}$，使$\{F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \cdots, x_n), n\geqslant 1, t_1, t_2, \cdots, t_n\in T\}$恰好是$X(t)$的有限维分布族，即

$$\begin{aligned}&F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \cdots, x_n)\\&=P\{X(t_1)<x_1, X(t_2)<x_2, \cdots, X(t_n)<x_n\}\end{aligned}$$

定理的证明比较复杂，这儿从略①.

为了帮助理解，我们来看几个简单的随机过程的例子.

[例 1] $X(t)=X_0+V\cdot t, a\leqslant t\leqslant b$，其中$X_0$和$V$是相互独立的正态$N(0, 1)$分布的随机变量.

由于X_0和V都是正态分布，所以$X(t)$也是正态分布，并且$X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)$也是$n$维正态分布. 对于正态分布，只要知道它们的一阶矩和二阶矩就完全确定了它们的分布.

对于我们现在这个过程，一阶矩和二阶矩是容易求得的：

$$\begin{aligned}m(t)&=E\{X(t)\}=E\{X_0+V\cdot t\}\\&=E\{X_0\}+tE\{V\}=0\end{aligned}$$

$$\Gamma(s, t)=E\{X(s)X(t)\}$$

---

① 参见王梓坤，随机过程论，科学出版社，1965，第6页。

$$=E\{(X_0+V\cdot s)(X_0+V\cdot t)\}$$

$$=E\{X_0^2\}+E\{V^2\}s\cdot t=1+st$$

根据前面所述,现在已经很容易写出 $X(t)$的有限维分布了. 例如

$$F(t;x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2(1+t^2)}}du$$

[例 2] $X(t)=A\cdot\cos\theta t+B\cdot\sin\theta t$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 其中 A, B是相互独立的正态 $N(0,\sigma^2)$分布的随机变量, θ 是一个实常数.

由于这里的$X(t)$是正态随机变量 A, B 的线性组合, 所以$X(t)$也是正态分布的, 同样, $X(t_1)$, $X(t_2)$, …, $X(t_n)$是 n 维正态分布的, 这时要知道 $X(t)$的有限维分布, 只要知道它的一阶矩和二阶矩, 即它的均值函数和协方差函数就可以了.

我们有:

$$m(t)=E\{X(t)\}$$

$$=E\{A\cdot\cos\theta t+B\cdot\sin\theta t\}=0$$

$$\Gamma(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}$$

$$=E\{(A\cdot\cos\theta s+B\cdot\sin\theta s)$$

$$\cdot(A\cdot\cos\theta t+B\cdot\sin\theta t)\}$$

$$=\sigma^2(\cos\theta s\cdot\cos\theta t+\sin\theta s\cdot\sin\theta t)$$

$$=\sigma^2\cdot\cos\theta(s-t)$$

[例 3] $Z(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i\theta_k t}$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 其中 A_k, $1\leqslant k\leqslant N$ 是相互独立的 $N(0,\sigma_k^2)$分布的随机变量, $i=\sqrt{-1}$ 是虚数单位.

由欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 可知

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k\cdot\cos\theta_k t+i\cdot\sum_{k=1}^{N}A_k\cdot\sin\theta_k t$$

因此 $Z(t)$一般是复的. 对于复的随机变量 $Z=X+iY$, 其中 X, Y 都是实的随机变量, 我们称 X, Y 的联合分布为 Z 的分布, 称 $EX+$

iEY(如果 EX 和 EY 都存在)为 Z 的均值，记为 EZ. 对于两个复的随机变量 $Z_1=X_1+iY_1, Z_2=X_2+iY_2$ 定义它们的协方差为:

$$\operatorname{cov}(Z_1, Z_2)=E\{(Z_1-EZ_1)\cdot(\overline{Z_2-EZ_2})\}$$

其中"——"表示"共轭". 这是与实的随机变量时的定义形式上不同的地方,但这一定义应用于实的随机变量时,由于这时共轭与否是一样的,所以结果是一样的.

由于 $Z(t)$ 的实部 $X(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k\cos\theta_k t$ 和虚部 $Y(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k\sin\theta_k t$ 都是正态随机变量 A_k, $1\leqslant k\leqslant N$, 的线性组合，所以它们也都是正态的，因此也只要求出它们的均值函数与协方差函数就可以了.

我们有:

$$\begin{aligned}m(t)&=E\{Z(t)\}\\&=E\{X(t)\}+iE\{Y(t)\}=0\\ \Gamma(s, t)&=E\{Z(s)\overline{Z(t)}\}\\&=E\left\{\left(\sum_{l=1}^{N}A_le^{i\theta_l s}\right)\cdot\overline{\left(\sum_{k=1}^{N}A_ke^{i\theta_k t}\right)}\right\}\\&=\sum_{l,k=1}^{N}E\{A_lA_k\}e^{i(\theta_l\cdot s-\theta_k\cdot t)}\\&=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2e^{i\theta_k(s-t)}\end{aligned}$$

类似地可以求得 $Z(t)$的实部 $X(t)$和虚部 $Y(t)$的均值函数和协方差函数.

$$\begin{aligned}m_x(t)&=E\{X(t)\}=0\\ \Gamma_x(s, t)&=E\{X(s)X(t)\}\\&=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\cdot\cos(\theta_k s)\cos(\theta_k t)\end{aligned}$$

$$m_y(t)=0$$

$$\Gamma_y(s,t)=E\{Y(s)Y(t)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\cdot\sin(\theta_k s)\sin(\theta_k t)$$

从上面的例子可以看出，如果随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$的有限维分布都是正态分布，那么要知道它的有限维分布族，只要知道它的均值函数 $m(t)$和协方差函数 $\Gamma(s,t)$就足够了。

§3. 随机过程的基本类型

一般的随机过程是相当复杂和难以研究的，已有的结果也比较少。所以在本书中，主要研究两类最重要的随机过程：马尔可夫过程和二阶矩过程。

一、二阶矩过程

如果随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$，对每个 $t\in T$，$X(t)$的均值和方差都存在，则称它为**二阶矩过程**。特别，如果$\{X(t),\ t\in T\}$的有限维分布都是正态分布，则称为**正态过程**，正态过程是二阶矩过程的一个最重要的子类。

由上述定义立即可知，上节的三个随机过程的例子，都是属于二阶矩过程的，而且还都是正态过程。

由定义可知，对于二阶矩过程$\{X(t),\ t\in T\}$，它的均值函数 $m(t)=E\{X(t)\}$是存在的。因此，如从 $X(t)$中减去 $m(t)$，即代替$\{X(t),\ t\in T\}$而考虑 $\widetilde{X}(t)=X(t)-m(t)$，则有：

$$m_{\widetilde{X}}(t)=E\{\widetilde{X}(t)\}=0$$

因此，今后一般都假定二阶矩过程的均值函数为零。这时，协方差函数简化为：

$$\Gamma(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}$$

应用许瓦兹(Schwartz)不等式，可以证明，二阶矩过程的协方差函数总是存在的. 事实上，由许瓦兹不等式有

$$(E\{|X(s)\overline{X(t)}|\})^2 \leqslant E\{|X(s)|^2\} \cdot E\{|X(t)|^2\}$$

而根据定义，上式右边是有限的.

下面给出协方差函数的两个性质.

定理 1 二阶矩过程的协方差函数 $\Gamma(s,t)$ 是埃密特的，即

$$\Gamma(s,t) = \overline{\Gamma(t,s)}, \qquad s, t \in T$$

如果过程是实的，即 $X(t)$ 是实的随机变量，则 $\Gamma(s,t)$ 是对称的.

［证明］ 我们有

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma(t,s)} &= \overline{E\{X(t)\overline{X(s)}\}} \\ &= E\{\overline{X(t)}X(s)\} \\ &= E\{X(s)\overline{X(t)}\} = \Gamma(s,t)\end{aligned}$$

定理 2 二阶矩过程的协方差函数 $\Gamma(s,t)$ 是非负定的，即对任意有限个 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$ 和任意的普通函数 $\theta(t)$，$t \in T$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma(t_k,t_j)\theta(t_k)\overline{\theta(t_j)} \geqslant 0$$

［证明］ 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma(t_k,t_j)\theta(t_k)\overline{\theta(t_j)} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E\{X(t_k)\overline{X(t_j)}\}\theta(t_k)\overline{\theta(t_j)} \\ &= E\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}X(t_k)\theta(t_k)\right)\cdot\overline{\left(\sum_{j=1}^{n}X(t_j)\theta(t_j)\right)}\right\} \\ &= E\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}X(t_k)\theta(t_k)\right|^2\right\} \geqslant 0\end{aligned}$$

顺便指出，由非负定性可以推出埃密特性. 因此，定理 2 包含了定理 1.